# 數學基本觀念辨正

王湘君

## 一、前言

同學們在學習數學時，常忽略了基本觀念，只是硬記一堆公式，這是徒勞而無功的學習方法。事實上，大部分的題目，只要靈活地運用基本觀念及方法，均能解得出來。所以，盼同學們學習數學時，能把握住基本觀念，通盤而徹底的理解，對於解題自然有幫助。

在解一個問題時，同學們常易犯的錯誤是：連題意都還沒有搞清楚，就急着去求解答，又不講求方法。每做每挫，因而信心喪失，興趣大減，於是，只好背誦一些公式，以應付考試。其實，在面對一個問題時，應從「幾何」與「代數」兩方面去分析；幾何圖形能把題意具體化，明朗化，可幫助推理思考，再應用「代數」的方法，去演算求解。同學們平常做練習時，並不是求得其解，便算完事，應試着做出多種不同的解法，然後加以比較，那種方法最明快最恰當。同時，更要深入瞭解解題過程中，所使用的觀念及方法，每當學習更新的東西後，要再回顧一下，以往所學的問題，設法以更新更高的觀點，來分析問題，解釋問題，往往能因此而把所學的東西連貫起來，並更進一層地瞭解及推廣以往所學的，這就是所謂的「溫故而知新」吧！

下面是個人在教學中，發現同學們，對某些基本觀念及方法，混淆不清，因此解答錯誤而不自知。我覺得，有時候，讓同學瞭解一個問題的誤解所在，比瞭解一個正解更為重要，因為它不但糾正了錯誤的觀念，而且常會使我們跟着發現一些新的問題，而這些新的問題，又往往能澄清某些觀念。同學們在做（不是看）下列各題時，請先不要看「正解」，自己試着去做解答，很可能您的解法是文中所提到的「誤解」，這時，您也不要忙着去看「正解」，設法找出錯誤所在，才是要緊的。（下面第六題以前，適合高一程度同學；第十三題以前，適合高二程度同學）

## 二、誤解辨正

**一、一元二次方程式**　設二次方程式 $x^2+3x+1=0$ 的二根為 $\alpha,\beta$，求 $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$ 之值。

誤解：$\because \begin{cases}\alpha+\beta=-3\\ \alpha\beta=1\end{cases}$

$$\therefore\ (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}=-3+2\sqrt{1}=-1$$

正解：$\begin{cases}\alpha+\beta=-3\\ \alpha\beta=1\end{cases}$

$$\therefore\ (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}=-3-2=-5$$

說明：(1)方程式 $x^2+3+1=0$，判別式 $D=9-4>0$

$\therefore$ 二根為相異實根

(2) $\because \begin{cases}\alpha+\beta=-3<0\\ \alpha\beta=1>0\end{cases}$　$\therefore\ \alpha,\beta$ 皆為負

(3)當 $\alpha<0,\beta<0$，則

$\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=(\sqrt{-\alpha}\,i)(\sqrt{-\beta}\,i)=-\sqrt{\alpha\beta}$

（例如：$\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-5}=(\sqrt{3}\,i)(\sqrt{5}\,i)=-\sqrt{15}\neq\sqrt{15}$）

(4)試問 $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\beta}$ 何時方成立？

**二、集合的相等**　二集合 $A,B$，設 $A=\{x,y,z\}$，$B=\{x+3,3,6\}$。若 $A=B$，則 $(x,y,z)$ 有幾組解？

誤解：$A=B\Longrightarrow\{x,y,z\}=\{x+3,3,6\}$

（i）$x=3\Longrightarrow B=\{6,3,6\}$，$\therefore\ (y,z)=(6,6)$

（ii）$x=6\Longrightarrow B=\{9,3,6\}$，

$\therefore\ (y,z)=(9,3)$ 或 $(3,9)$

由 (i),(ii) 知有三組解。

正解：（i）$x=3$ 時 $\Longrightarrow B=\{6,3,6\}=\{3,6\}=\{3,3,6\}$

$\therefore\ (y,z)=(6,6)$ 或 $(3,6)$ 或 $(6,3)$

（ii）$x=6\Longrightarrow B=\{9,3,6\}$，

$\therefore\ (y,z)=(9,3)$ 或 $(3,9)$

由 (i),(ii) 知共有五組解。

說明：集合內的元素，沒有順序之別，也可以重複，例如 $\{f,l,o,w\}=\{f,o,l,l,o,w\}=\{w,o,l,f\}$。

**三、分式不等式**　求不等式

$$\frac{4x^2-20x+18}{x^2-5x+4}<3$$

之解集合。

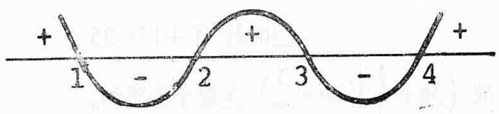
誤解：$\dfrac{4x^2-20x+18}{x^2-5x+4}<3\Rightarrow 4x^2-20x+18<3x^2-15x+12$

$\Rightarrow x^2-5x+6<0\Rightarrow(x-2)\cdot(x-3)<0\Rightarrow 2<x<3$

$\therefore$ 解集合為 $\{x|2<x<3\}$

正解：

$$\frac{4x^2-20x+18}{x^2-5x+4}-3<0\Longrightarrow\frac{x^2-5x+6}{x^2-5x+4}<0$$




$\Longrightarrow (x-2)(x-3)(x-1)(x-4)<0$

$\therefore$ 解集合為 $\{x|1<x<2$ 或 $3<x<4\}$

說明：(1)設 $a>b$

$\begin{cases}\text{若 } c>0\text{，則 } ac>bc\\ \text{若 } c<0\text{，則 } ac<bc\end{cases}$

故去分母時，要留意分母為正或為負。

(2) $a,b\in R,\ b/a>0\Longleftrightarrow ab>0$。

**四、函數的值域**　設多項函數 $f:x\longrightarrow 2x+\sqrt{x-2}$，求 $f$ 之值域。

誤解：令 $y=2x+\sqrt{x-2}\Rightarrow y-2x=\sqrt{x-2}$

$\Rightarrow(y-2x)^2=x-2\Rightarrow 4x^2-x(4y+1)+y^2+2=0$

$\Rightarrow$ 判別式 $(4y+1)^2-16(y^2+2)\geq 0\Rightarrow y\geq 31/8$，

故 $f$ 之值域為 $\{y|y\geq 31/8\}$。

正解：$y=2x+\sqrt{x-2}$，令 $t=\sqrt{x-2}\geq 0$，

$\therefore\ t^2=x-2$

$y=2(x-2)+\sqrt{x-2}+4=2t^2+t+4$

$=2\left(t^2+\dfrac{t}{2}+\dfrac{1}{16}\right)+4-\dfrac{1}{8}=2\left(t+\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{31}{8}$

$\because\ t\geq 0$　$\therefore$ 當 $t=0$ 時，$y$ 有最小值 4

$\therefore\ f$ 之值域為 $\{y|y\geq 4\}$。

說明：(1)函數 $f$ 之定義域 $\{x|x\geq 2\}$ 為實數之一部分，不可利用判別式來處理。

(2)本題有速解法，因為 $f$ 之定義域為 $\{x|x\geq 2\}$，可由觀察知 $x=2$ 時，$f(x)$ 有最小值 4，故 $f$ 之值域為 $\{y|y\geq 4\}$。

(3)「正解」中使用了代換法，是規規矩矩的做法，希望同學模仿此種方法。

**五、極值問題** 設$a,b>0$，求$(3a+2/b)(2b+3/a)$之最小值。

**誤解：** $\because\ a,b>0$

$$\therefore \begin{cases} 3a+\dfrac{2}{b}\geq 2\sqrt{\dfrac{6a}{b}} \\ 2b+\dfrac{3}{a}\geq 2\sqrt{\dfrac{6b}{a}} \end{cases}$$

二式相乘 $\left(3a+\dfrac{2}{b}\right)\left(2b+\dfrac{3}{a}\right)\geq 24$，故$\left(3a+\dfrac{2}{b}\right)\left(2b+\dfrac{3}{a}\right)$之最小值爲24。

**正解：** $\left(3a+\dfrac{2}{b}\right)\left(2b+\dfrac{3}{a}\right)=6ab+\dfrac{6}{ab}+4+9$

$$\geq 6\cdot 2\sqrt{1}+13=25$$

故 $\left(3a+\dfrac{2}{b}\right)\left(2b+\dfrac{3}{a}\right)$ 之最小值爲24。

**說明：** (1)$a,b>0$，若 $(a+b)/2\geq\sqrt{ab}$，則等號成立 $\Longleftrightarrow a=b$。

(2)誤解中$3a+2/b\geq 2\sqrt{6a/b}$，等號成立時爲$3a=2/b$

$\Longrightarrow 3ab=2 \Longrightarrow ab=2/3$,

$2b+3/a\geq 2\sqrt{6b/a}$，等號成立時爲$2b=3/a$

$\Longrightarrow 2ab=3 \Longrightarrow ab=3/2$,

上二式矛盾。

(3)$ab+1/ab\geq 2$，當 $ab=1/ab\Longrightarrow ab=1$時原式有最小值。

**六、含絕對值方程式** 設二次方程式$|x|^2+|x|-6=0$，則下列何者爲眞?

(A)二根之和爲$-1$ (B)二根之和爲0 (C)二根之積爲$-6$

(D)二根之積爲$-4$

**誤解：** A, C

由根與係數之關係，易知二根之和爲$-1$，二根之積爲$-6$。

**正解：** B, D

原式 $\Longrightarrow (|x|-2)\cdot(|x|+3)=0$

$\Longrightarrow |x|=2$ 或 $|x|=-3$ (不合)

$\therefore\ x=2$ 或 $-2$

故二根之和爲0，二根之積爲$-4$。

**說明：** (1)含絕對值方程式，不適用根與係數之關係。

(2)欲解含絕對值方程式時，都是先除去絕對值符號，但在去絕對值符號之前，要先討論絕對值符號裏的值是正還是負，同學們不妨試用此法去解，上述「正解」中的方法，是比較明快的解法。

**七、二次方程式根與係數之關係** 設二次方程式$ax^2-4x+(a-3)=0$ $(a\neq 0)$之二根介於0與1之間，求$a$之範圍。

**誤解：** $ax^2-4x+(a-3)=0$二根介於0與1之間，故二根皆爲實根，所以判別式$\geq 0$，即

$$\begin{aligned} 4-a(a-3)\geq 0 &\Longrightarrow a^2-3a-4\leq 0 \\ &\Longrightarrow (a-4)(a+1)\leq 0 \\ &\Longrightarrow -1\leq a\leq 4 \qquad (1) \end{aligned}$$

再利用根與係數之關係得

$$\text{二根之和}=\frac{4}{a}>0 \Longrightarrow a>0 \qquad (2)$$

$$\text{二根之積}=\frac{a-3}{a}>0 \Longrightarrow a>3 \qquad (3)$$

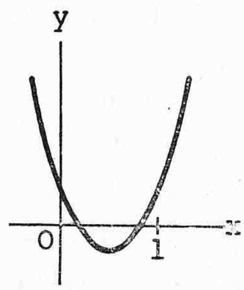
由(1)、(2)、(3)得知$3<a\leq 4$。

**正解：** $ax^2-4x+(a-3)=0$二根爲實根

$\therefore$ 判別式$4-a(a-3)\geq 0\Longrightarrow -1\leq a\leq 4$

$$\text{二根之和}=\frac{4}{a}>0\Longrightarrow a>0$$

$$\text{二根之積}=\frac{a-3}{a}>0\Longrightarrow a>3$$




令 $f(x)=ax^2-4x+(a-3)$，根據上述理由知其圖形爲開口向上之拋物線，且與 $X$ 軸相交於0與1之間，其圖形如上。

$\therefore\ f(0)=a-3<0\Longrightarrow a>3$

且 $f(1)=a-4+a-3>0\Longrightarrow a<7/2$

故$a$之範圍爲 $7/2<a\leq 4$。

**說明：** 二次方程式，如果二根之範圍已知，單是用「根與係數之關係」是不夠的，必須配合二次函數之圖形，利用圖形之性質，做出一些不等式來，這就是從「代數」與「幾何」兩方面着手，去解題。

**八、二次方程式** 設實係數二次方程式 $x^2-2ax+2-b^2=0$之二實根爲 $\alpha,\beta$，若 $\alpha^2+\beta^2\leq 4$，求 $(a,b)$ 所成之點集合的面積。

**誤解:** $\begin{cases}\alpha+\beta=2a\\ \alpha\beta=2-b^2\end{cases}$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4a^2-4+2b^2\leq 4$

$\Longrightarrow 2a^2+b^2\leq 4\Longrightarrow \dfrac{a^2}{2}+\dfrac{b^2}{4}\leq 1$ (1)

此橢圓之面積爲 $2\sqrt{2}\pi$

**正解:** 同上，又 $\alpha,\beta\in R$

∴ 判別式 $a^2-2+b^2\geq 0\Longrightarrow a^2+b^2\geq 2$ (2)

∴ 由(1)、(2)得 $(a,b)$ 所成之集合面積爲 $2(\sqrt{2}-1)\pi$。

**說明:** (1)當二次方程式中，有未定係數時，此未定係數之範圍受到方程式根的性質所限制。

(2)$ax^2+bx+c=0$ $(a,b,c\in R, a\neq 0)$ 二根爲實根時，$b_2-4ac\geq 0$，二根爲虛根時，$b^2-4ac<0$。

(3)橢圓 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 之面積爲 $ab\pi$。

**九、三角不等式** 設 $f(x)=\sin^2x+4\csc^2x$，$x$ 爲使 $f(x)$ 恆有意義之所有可能值，則 $f(x)$ 之最小值爲何?

**誤解:** ∵ $\sin^2x, \csc x>0$

∴ 利用算術平均≥幾何平均

$\dfrac{\sin^2x+4\csc^2x}{2}\geq\sqrt{4\sin^2x\csc^2x}=2\Rightarrow f(x)\geq 4$

∴ $f(x)$ 有最小值4

**正解:** $f(x)=\sin^2x+\csc^2x+3\csc^2x\geq 2+3\csc^2x\geq 5$

∵ $\dfrac{\sin^2x+\csc^2x}{2}\geq\sqrt{4\sin^2x\cdot\csc^2x}=1$ 且 $\csc^2x\geq 1$

故 $f(x)$ 有最小值爲5。

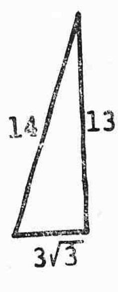
**說明:** (1)$x,y\geq 0$，若 $(x+y)/2\geq\sqrt{xy}$，則 $x=y \Longleftrightarrow$ 等號成立。

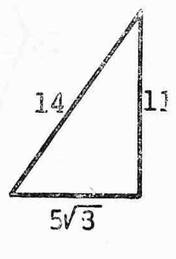
(2)「誤解」中用到 $\sin^2x=4\csc^2x$，此式恆不成立，爲什麼?

(3)「正解」中用到 $\sin^2x=\csc^2x$，此式中的 $x$ 存在，($x$ 究爲何值? )

**十、三角函數** 設

$\sin\alpha=\dfrac{13}{14}\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\sin\beta=\dfrac{11}{14}\ \left(0<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$




求 $\alpha+\beta$ 爲若干弳?

**誤解:** $0<\alpha<\pi/2$, $0<\beta<\pi/2$

$\Longrightarrow 0<\alpha+\beta<\pi$

由左圖知 $\sin\alpha=13/14$, $\cos\alpha=3\sqrt{3}/14$; 由右圖知 $\sin\beta=11/14, \cos\beta=5\sqrt{3}/14$; 並得

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$=\dfrac{13}{14}\cdot\dfrac{5\sqrt{3}}{14}+\dfrac{11}{14}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{14}=\dfrac{98\sqrt{3}}{14\cdot 14}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

∴ $\alpha+\beta=\pi/3$ 或 $2\pi/3$ (弳)

**正解:** 同上

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$=\dfrac{3\sqrt{3}\cdot 5\sqrt{3}}{14\cdot 14}-\dfrac{13\cdot 11}{14\cdot 14}=\dfrac{-98}{14\cdot 14}=\dfrac{-1}{2}$

∴ $0<\alpha+\beta<\pi$, $\alpha+\beta=2\pi/3$ (弳)

**說明:** $\alpha+\beta$ 之範圍可能爲第 I 象限角或第 II 象限角，故 $\sin(\alpha+\beta)$ 恆正，尙無法判定 $\alpha+\beta$ 之範圍。而

$0<\alpha+\beta<\dfrac{\pi}{2}$ 時， $\cos(\alpha+\beta)>0$

$\dfrac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$ 時， $\cos(\alpha+\beta)<0$

故用 $\cos(\alpha+\beta)$ 之值來判定。

**十一、三角方程式** 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a/b=\cos B/\cos A$，則 $\triangle ABC$ 爲何種形狀?

**誤解:** 由正弦定律

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{\sin A}{\sin B}=\dfrac{\cos B}{\cos A}$

去分 $\sin A\cos A=\sin B\cos B$，並由倍角公式得

$\sin 2A=\sin 2B\Longrightarrow 2A=2B\Longrightarrow A=B$

故 $\triangle ABC$ 爲等腰△

**正解:** 在「誤解」中等式 $\sin 2A=\sin 2B$ 之前都正確，但是由 $\sin 2A=\sin 2B$ 可得兩種結果

(i) $2A=2B\Longrightarrow A=B$

(ii) $2A+2B=\pi$ (∵$\sin 2A\sin(\pi-2A)=\sin 2B$)

$\Longrightarrow A+B=\pi/2\Longrightarrow C=\pi/2$

故 $\triangle ABC$ 爲等腰△或直角△或等腰且直角△

**說明:** (1)在三角方程式 $\sin 2A-\sin 2B$ 中，因爲正弦函數非一對一(如 $\sin 30°=\sin 150°$)，故我們不可以只令 $2A=2B$。

(2)現在請看另一種解法，就不易產生錯誤。

$\sin 2A=\sin 2B\Longrightarrow \sin 2A-\sin 2B=0$

由和差化積

$2\cos(A+B)\sin(A-B)=0$

$\Longrightarrow \cos(A+B)=0$ 或 $\sin(A-B)=0$

$\Longrightarrow A+B=\pi/2$ 或 $A-B=0$

（請注意 $0<A,B,C<\iota$）

**十二、三角方程式** 求三角方程式 $\sin\theta+\cos\theta=1$ 之解，但 $0\leq\theta<2\pi$。

**誤解:** 原式平方得 $1+2\sin\theta\cos\theta=1$

$\Longrightarrow \sin\theta=0$ 或 $\cos\theta=0$

$\Longrightarrow \theta=0,\pi$ 或 $\pi/2, 3\pi/2$

**正解:** （解法一）：由 $\sin\theta+\cos\theta=1$，可得

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)=1$$

$$\Longrightarrow \sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\because\ 0\leq\theta<2\pi \Longrightarrow \frac{\pi}{4}\leq\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{9\pi}{4}$$

$$\therefore\ \theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}\text{或}\frac{3\pi}{4} \Longrightarrow \theta=0\text{或}\frac{\pi}{2}$$

（解法二）：
$$\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=1 & (1)\\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1 & (2)\end{cases}$$

解(1)、(2)兩式:

$\sin^2\theta+(1-\sin\theta)^2=1$

$\Longrightarrow 2\sin^2\theta-2\sin\theta=0$

$\Longrightarrow \sin\theta(\sin\theta-1)=0 \Longrightarrow \sin\theta=0$ 或 $\sin\theta=1$

故求得解為

(i) 當 $\sin\theta=0$ 時，$\cos=1 \Longrightarrow \theta=0$

(ii) 當 $\sin\theta=1$ 時，$\cos\theta=0 \Longrightarrow \theta=\pi/2$

**說明:** (1)「誤解」中把等式 $\sin\theta+\cos\theta=1$ 平方而產生增根，同學們應注意：一個代數式，將之變換成另一形式，這一新形式要與原式同義。

(2)在「解法一」中應用了

$$a\cos\theta+b\sin\theta=c \Longrightarrow \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\phi)=c,$$

其中

$$\cos\phi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\phi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

或

$$\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)=c,$$

其中

$$\sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

同學們務必熟悉此式。

**十三、二次方程式** 設二次方程式 $x^2+ax+a=0$ 之二根為 $\sin\theta,\cos\theta$，求$a$之值。

**誤解:** 由根與係數之關係得

$$\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=-a & (1)\\ \sin\theta\cos\theta=a & (2)\end{cases}$$

$(1)^2=1+2a=a^2 \Longrightarrow a^2-2a-1=0 \Longrightarrow a=1\pm\sqrt{2}$

故 $a$ 之值為 $1+\sqrt{2}$ 或 $1-\sqrt{2}$

**正解:** $\because\ |\sin\theta+\cos\theta|\leq\sqrt{2}$ $\therefore\ |a|\leq\sqrt{2}$

故 $a=1+\sqrt{2}$ 不合，$a$ 之值僅可為 $1-\sqrt{2}$。

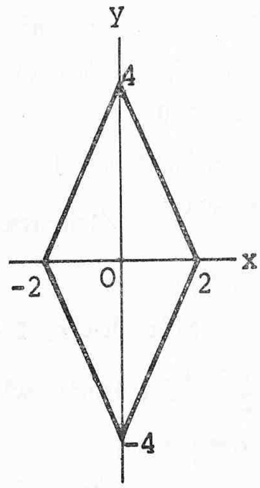
**說明:**
$$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leq\sqrt{2}$$

且 $\sin\theta+\cos\theta=-a$，$\therefore\ |a|\leq\sqrt{2}$。

**十四、對數不等式** 不等式 $\log_2(|2x|+|y|-2)\leq 1$，求滿足此不等式之 $(x,y)$ 所成集合的面積。

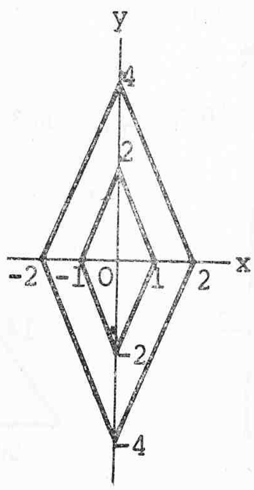
**誤解:** $\log_2(|2x|+|y|-2)\leq 1$

$\Longrightarrow |2x|+|y|-2\leq 2 \Longrightarrow 2|x|+|y|\leq 4$




則如上圖所示，面積 $=4\cdot(4\cdot 2\cdot 1/2)=16$。

**正解:** 同前，但 $|2x|+|y|-2>0$，故 $2<2|x|+|y|\leq 4$，因此面積為 $4(4\cdot 2\cdot 1/2)-4(2\cdot 1/2)=12$。（如下圖所示）



**說明:** 因爲 $\log_a x$ 有意義 $\Longleftrightarrow x>0$，而且 $a>0$，$a\neq 1$。

**十五、複數的極式** 設 $(1+i)^n+(1-i)^n=32$，$n\in N$，求 $n$ 之值。

**誤解:** 把 $(1+i)^n+(1-i)^n=32$ 化爲極式:

$$\sqrt{2}^n\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^n+\sqrt{2}^n\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)^n=2^5$$

$$\Longrightarrow 2\sqrt{2}^n\cos\frac{n\pi}{4}=2^5 \text{（由棣美佛De Moivre定理）}$$

$$\Longrightarrow \sqrt{2}^n\cos\frac{n\pi}{4}=2^4 \Longrightarrow n=8$$

**正解:** 同前,

$$\sqrt{2}^n\cos\frac{n\pi}{4}=2^4 \Longrightarrow \cos\frac{n\pi}{4}=2^{\left(4-\frac{n}{2}\right)}=2^{\frac{8-n}{2}}>0$$

故得

(i) 若 $\cos\frac{n\pi}{4}=1$，則 $n=8$。

(ii) 若 $\cos\frac{n\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，則 $\frac{8-n}{2}=-\frac{1}{2}$

$$\Longrightarrow n=9。$$

故 $n$ 之值爲 8 或 9。

**說明:** 「誤解」中只是疏忽了在等式 $\sqrt{2}^n\cos(n\pi/4)=2^4$ 中 $\cos(n\pi/4)$ 有兩個可能值，就是 1 或 $1/\sqrt{2}$。

**十六、極值** 設直線 $L$ : $y=mx+k$，$m\neq 0$，與橢圓 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ $(a>b>0)$ 相切，求 $L$ 被二軸截取線段長之最小值。

**誤解:** 過橢圓上一 $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ 點之切線方程式爲

$$\frac{\cos\theta}{a}x+\frac{\sin\theta}{b}y=1,$$

$x$ 截距爲 $b/\sin\theta$，$y$ 截距爲 $a/\cos\theta$。設所截線段長爲 $d$，則

$$d^2=\frac{b^2}{\sin^2\theta}+\frac{a^2}{\cos^2\theta}\geq\frac{2ab}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{4ab}{\sin 2\theta}\geq 4ab$$

$$\Longrightarrow d \text{ 之最小值爲 } 2\sqrt{ab}$$

**正解:** 設橢圓 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 之切線方程式 $L$ 爲 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$，$L$ 與二坐標軸交於

$$(0,\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}) \text{ 及 } \left(\mp\frac{\sqrt{a^2m^2+b^2}}{m},0\right)$$

設 $L$ 被二軸截取之線段長爲 $d$，則

$$d^2=a^2m^2+b^2+\frac{a^2m^2+b^2}{m^2}=a^2+b^2+a^2m^2+\frac{b^2}{m^2}$$
$$\geq a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$$

故 $d$ 之最小值爲 $a+b$。

**說明:** 若 $\sin 2\theta=1$ 可取 $\theta=\pi/4$，則 $\sin\theta=\cos\theta$ 在

$$\frac{b^2}{\sin^2\theta}+\frac{a^2}{\cos^2\theta}=\frac{2ab}{\sin\theta\cos\theta}$$

中 $a=b$，與已知矛盾。

**十七、機率** 設袋中有 2 紅球、3 白球、4 黑球，隨意抽取三球（設每球被抽中機會均等），求此三球爲一紅一白一黑之機率。

**誤解:** $\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{7}=\frac{1}{21}$

**正解:** $\frac{C_1^2C_1^3C_1^4}{C_3^9}=\frac{2}{7}$

**說明:** 「誤解」中，樣本空間中每個樣本有排列之別，故抽取一紅一白一黑也應排列，「誤解」也可如下修正。

$$\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot 3!=\frac{2}{7}$$

## 三、結語

同學們在課堂上，學了一些定義、定理及公式，課後不單是溫習所學過的，還要自己多做題目。唯有藉着做題，才能熟悉定理及公式的用法，對於解題，才能達到「熟能生巧」的地步!

現在大部份的學校，都以爲平時多加測驗，就能提高學習效果及學習程度，其實並不盡然，個人以爲，如果測驗過多，學生每天忙於應付考試，沒有想到怎樣眞正學習數學，爲了應付考試，學生不得不背很多題目，沒有時間去思考，這樣，不但不能學到數學，而且也沒有機會，把自己潛藏的能力發揮出來。數學本來是發揮思考力，但經常測驗，會使學生疲勞，思考遲鈍，反成機械式，常此下去，到大學入學考試，也是機械反應，假如考題中，遇到從沒有見過的題目就會產生害怕的心理，而無法解答出來。我認爲「做練習」與「測驗」不一樣，做練習沒有時間限制，可以參考書本，研究很多不同的方法，更可以對各種方法加以比較，這樣，才能有學習心得。

盼同學能遵照課前預習，上課專心聽講，課後要溫習及做習題等基本原則。如有疑問，立刻請教老師或同學共同研討，務必全部理解透徹，更要有不怕問的精神，疑問愈積愈多，最後會影響學習信心。做習題一定要親自思考着去做，數學不是「談」、「看」、「抄」所可以學到的。最後，再提醒同學們，學習時，不可只學一些支離破碎的題目，或是專營一些解題技巧，要學習整體的概念。

（作者現爲師大附中數學教師）