書評・書介

「Morris Kline：新數學爲何失敗」書介

黃武雄

原 著：Morris Kline

譯 者：方 祖 同

出 版：科學月刊社

最近美國「時代週刊」(*Time*, March 13, 1978) 登載一則消息:

> 「**DIED. Edward Griffith Begle**, 63, mathematics professor at Yale and Stanford who was a chief proponent of the "new math"; of emphysema; in Palo Alto, Calif. As head of the School Mathematics Study Group, an organization with nearly $10 million in Government grants, Begle emphasized the theoretical principles of the number system in addition to rote calculation learned in traditional math.」

(Edward Griffth Begle，「新數學」的首要推動者，也是SMSG的主持人，因氣腫病逝於加州，享年63歲。)

Edward G. Begle 是 SMSG 的主持人，SMSG 則是 1958 年在美國數學學會下，成立的一個組織，對於當時「新數學」的推動，不遺餘力。這套教材經譯成中文于民國五十五年(1966)起到六十一年(1972)，在國內實施，完全支配了當時國內數學教學的方向。

Begle 與 Max Beberman 可以說是「新數學」教材的代表人物，到了六十年代末期，他們所受的阻力已經相當巨大。事實上早在 1962 年便有 Ahlfors 等六十五位美洲重要數學家聯合簽署的呼籲書「高中數學課程」的全盤商榷發表（參見「數學教室」第六期），到 1973 年更有 Morris Kline: "*Why Jonny Can't Add——the failure of the New Math.*" 的暢銷書風行各地。國內亦在 1975 年 7 月由科學月刊社推出方祖同的譯本，譯名爲「新數學爲何失敗?」

Morris Kline 曾寫有 "Mathematical Thoughts from Ancient to Modern Times"，是當今數學史方面最有哲學意義的一本重要著作。他以對數學史的深刻的了解，來討論「新數學」的功過，無疑是十分發人深省。當他提到: 主張新數學的數學委員會說原有數學教育的失敗是由於教材的陳舊，屬 1700 年以前的數學，並以「你會去請教那些只具 1700 年以前專業知識的律師和醫師嗎? 」來支持新數學的時候，Morris Kline 的看法是: 「雖然這些發言人都自認深諳數學，竟忘了數學是累積發展的這項事實，如果沒有舊有的做基礎，根本不可能去學習新的數學。」(書中第 20-21 頁) 這便是數學史的觀點，從事數學教育在取材上，不能忽略歷史的提示。

對於新數學派強調的邏輯推理及數學的嚴格性，Morris Kline 也從歷史的觀點來討論，他詳述代數、分析的發展過程說「爲什麼用文字作一般係數會遲延到十六世紀的後期才出現（如當時Francois Vieta 推出像 $ax+b$ 的數式）？巴比倫人、埃及人、亞歷山大時期的希臘人、印度人、阿拉伯人（中國人）都在研習代數，經過這麼多世紀用文字代表一類的數的概念竟然未見發生，原因只能說，就數學而言，這是最高的抽象層次。從 $ax^2+bx+c=0$ 加以思考，遠較從 $3x^2+5x+6=0$ 困難。」（第 35 頁），說「十七世紀牛頓與萊布尼茲在微積分建立時，都未能給予導數嚴格的定義，這個缺點歷經攻擊，直到十八世紀實數邏輯基礎確立之後。」他指出「直到十九世紀後期，數學、代數、分析的邏輯基礎才開始建立，換句話說，多少世紀來，數學各主要科目的發展，幾乎全未依賴邏輯。」(第37頁)，並引用 Johann F. Herbart 的話「數學這門偉大的科學，需要想像力的程度，絕不下於邏輯推理的能力。」

新數學要求學生在做數的基本運算時逐步註明公設（參見以下第一章摘錄）。Morris Kline 講了一個有關的故事，說「有條蜈蚣正自然而舒緩爬過一個土堆，遇見一隻青蛙，青蛙對蜈蚣說“眞是了不起！你有一百隻脚，竟知道什麼時候用哪一隻脚走”，蜈蚣聽過話後，不覺心中盤算起自己到底哪一隻脚先哪隻脚後，結果笨拙不堪，寸步難行。」

Morris Kline 對於數學的實用問題，尤有他的犀利的看法。廿世紀中葉以來，數學家因極端專業化，知識的視野逐漸偏窄，做出很多閉門造車的純新數學。Kline 從歷史的眼光看這個問題，說「數學現在轉而內向，自成系統。到目前爲止，可以確定大多數新數學的研究對於當今的科學進展毫無幫助，很多純粹數學家遇到這種責難，只能用數學創造本身頗有美感來搪塞。」（第 100 頁）關於數學漸脫離服務科學的崗位，他引用 1944 年著名物理學家 John Synge 的話說「科學創造的活動目前不僅不在衰退，且正在急劇高漲。但有心人士卻驚覺科學活動的守夜者正成羣結體，紛紛在離開他們的職守，他們並不是去安歇，他們仍一如以往努力在工作，只是現在他們的工作純爲滿足自己。」（第 101 頁），在 Kline 的書中，讀者可以發現其他重要數學家如 Courant, von Neumann, Birkhoff 及 J. Stoker 等人的見解（第 102-105 頁）

Begle 死了，新數學的熱潮這幾年也已漸次黯淡，它的影響即使在臺灣亦未完全解除。前些時候，我在一所著名的高中參觀教學，看到教師在教一對一函數。他定義一個函數 $f:X\longrightarrow Y$ 爲一對一的條件是「對於 $x_1, x_1\in X$，若 $f(x_1)=f(x_2)$，則 $x_1=x_2$」，然後證明說這條件與「若 $x_1, x_2\in X$ 且 $x_1\neq x_2$，則 $f(x_1)\neq f(x_2)$」是等價的。事實上，如果從一對一函數的例子，抽出它定義的意思，這兩句話代表同一回事，正如「吃飯要張口」與「不張口便吃不了飯」一樣是不言自明的。但這位教師卻生硬地給學生這樣看起來步驟井然的證明，說：

敍述 P 代表　$x_1=x_2$

敍述 Q 代表　$f(x_1)=f(x_2)$

那麼原來定義是「$Q\Longrightarrow P$」，故由邏輯法則「$\sim P\Longrightarrow\sim Q$」得「$x_1\neq x_2\Longrightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$」，反之亦然。這種說明方式叫學生掌握不住原來的內涵，而流於表面的形式推演。這便是 Morris Kline 所攻擊的邏輯教法在臺灣的翻版。

我們介紹這本書，希望國內讀者能深一層去探討當前數學教育的一些隱藏的問題。今摘錄其第一章「新數學一瞥」及第十章「深一層看新數學」，第一章所挖苦的固非新數學運動主持者的原意，但確爲其實際發生的弊端。第十章，則涉及數學發展的本意，很值得讀者細讀。其他各章對新數學運動的推行過程作了詳細的報導與評論。是值得一讀的一本好書。

※　　※　　※

章 次 目 錄

第 一 章　新數學一瞥
第 二 章　傳統的數學課程
第 三 章　現代數學運動的起源
第 四 章　數學的演繹教法
第 五 章　論謹嚴
第 六 章　數學的語言
第 七 章　爲數學而數學
第 八 章　新數學的新內容
第 九 章　實驗及測試的實際情形
第 十 章　深一層看新數學
第十一章　改革的正當方向

第 一 章 摘 錄

"……偉大的上帝! 我寧願是受陳腐教條養育的異教徒; 使我能, ……
有一閃光亮來減輕我的孤寂。"

威廉・華玆華斯
(William Wordsworth)

讓我們看一下教室裏上新數學課的情形。

教師在問: "爲什麼$2+3=3+2$?"

學生毫不猶豫的回答: "因爲兩者都等於5。"

老師帶着責備的口吻說: "不對, 正確的答案是: 因爲加法是服從交換律的。" 接着問 "爲什麼$9+2=11$?"

學生又立即回答: "9加1是10, 再加1就是11。"

"又錯了," 老師大聲喊著說。"應該說是根據2的定義, 我們得知

$$9+2=9+(1+1)$$

再根據加法結合律, 有

$$9+(1+1)=(9+1)+1$$

再從10的定義得知$9+1$是10, 又從11的定義得知$10+1$是11。這才是正確答案。"

顯然這一班學生表現不夠好, 於是教師提了一個較簡單問題, "7是一個數嗎?" 學生被這樣簡單的問題弄糊塗了, 認爲簡直不值得回答; 但是由於對老師習慣性的服從使然, 一致肯定的答對。這可把老師嚇呆了。"假如我問你們是誰, 你們怎麼回答?"

學生現在都戰戰兢兢地不敢貿然作答, 不過一位比較膽大的孩子還是說了: "我是羅拔史密斯。"

老師像是不肯相信, 用譴責的口氣問道, "你說你是羅拔史密斯這個名字? 當然不是! 你是一個人而你的名字才是羅拔史密斯。讓我們再回到原先的問題: 7是一個數嗎? 當然不是! 7祇是一個數的名字。$5+2$, $6+1$, $8-1$都是這一個數的名字。符號7祇是代表這個數的一個數字罷了"。

老師發覺學生對這種區分不能接受, 便試用另一種方法。她問道, "3這個數是8這個數的一半嗎?" 雖然她又自己答說: "當然不是! 但是數字3確是數字8的一半, 8的右半邊"。

此時學生們幾乎要衝口說出, "那麼究竟什麼才是數?" 不過由於一再答錯, 他們已不再有勇氣與心情發問。這點倒是幫了教師一個大忙, 因爲要眞正解說什麼是數, 實在超出了這位教師能力之外, 有關數的正確解說也是無法爲這批學生所理解的。從此以後, 學生都會小心翼翼地說: "7是一個數字, 不是一個字", 至於什麼是數, 學生就永不得而知了。

老師倒沒有被學生一再出錯的回答所困擾, 又再問道, "我們應該如何才能正確地表示出, 介於6和9之間的所有正整數?"

一個學生答道, "不就是7和8嘛!"。

"不對" 教師回答著說。"應該說是所有大於6的正整數集合和所有小於9的正整數集合的交集"。

集合的用法就以這類方式傳授給學生, 並認定這樣才算

是精確。

當這位迷信精確語言價值的教師想問學生，一堆棒棒糖是否和一羣女孩子數目相等這個問題時，於是他這樣問學生，“棒棒糖的集合與女孩子的集合間是否存在一個一一對應的關係呀？”結果可想而知，學生對這個問題不會有任何反應。

教師仍不氣餒，又提出一個問題：“用4除2是多少？”

一個聰明的學生立刻答道：“負2”。

教師詫異之餘就反問，“這個答案，你是怎麼得來的？”

“是這樣的”，學生說，“你曾經教過我們，除法就是連減，所以我從2減去4，就得到負2。”

這些可憐的孩子，放學後，實在應該稍爲輕鬆一下，可是家長卻急卽想知道他們的孩子在課業上有了些什麼進步，於是又向他們查詢。一位家長問他的八歲大的孩子，“5＋3是多少？”他得到的答案是，根據交換律5＋3＝3＋5。家長大吃一驚不得不換另一種問法：“那麼，5個蘋果和3個蘋果，是多少蘋果？”這個小孩不太懂得“和”就是“加”的意思，所以就問，“你是說，5個蘋果加3個蘋果？”

這位家長連忙答是的，並期待着回答。

“啊”，孩子答道，“不論你說的蘋果，梨子或書本，都沒有關係，在任何情形下5＋3＝3＋5”。

另外一位父親關切小兒子的算術學得怎麼樣，就問他情形還好吧。

“不很好，”孩子回答說，“老師不斷的與我們討論結合律，交換律及分配律。但我只知道去加，並且計算出正確的答案，所以老師對我不滿意”。

這些小小的例子，或許說明了目前所謂現代數學或新數學課程的一些概況。至於這項課程的主要特徵以及優缺點，我們隨後將細加研討。

不過在下一章，我們先對“舊”數學的課程作一簡單的介紹，藉以瞭解究竟是什麼課程上的缺失，方才促使“新”數學的發展。

感謝傅一駿先生，向本刊提供本書方祖同譯本：「新數學爲何失敗？」（科學月刊社）。因本期稿擠，第十章「深一層看新數學」將挪至下期轉載。

——編者識

每一個我所解決的問題都在日後幫助了我去解決別的問題。

——笛卡爾