——組合學專題之二——

鴿 籠 原 理

謝聰智

I. 鴿籠原理

鴿籠原理是說將 k 個東西分成 n 類，若 $k \geq nr-n+1$ 則有一類東西之數目大於或等於 r。十隻鴿子分放在九個籠中，必有一籠至少放二隻鴿子。五房客四房間，一定有二房客共一房間。三男追二女，必有二男爲情敵。十三人同行，必有二人同月生。五人分十六本書，必然有人至少獨得四本書。這些都是鴿籠原理在生活中常碰到的實例。這樣平凡的道理人人在諸多待人接物中，不假思索屢用不爽。道理雖然簡單，巧妙地運用卻有意想不到的驚奇結果。

§ 1.1. 連勝 21 次的圍棋高手

沈士海是位圍棋新秀，去年參加全國圍棋名人大賽，從地方初選到最後名人爭奪戰，一連比賽了 11 星期。沈高手之戰績輝煌，優勝記錄是：每日至少勝一次；每星期最多勝 12 次。由此記錄可推得在一段連續的日子裏，沈棋士不多不少連勝了 21 次。

結論似乎有點出奇。想一想，再看下面的證明。

設 $s_1, s_2, \cdots\cdots, s_{77}$ 等爲第 1 天，第 2 天，……最後第 77 天沈高手勝棋的累積數。由於每天至少勝一次及每星期最多勝 12 次，得

$$1 \leq s_1 < s_2 < \cdots\cdots < s_{77} \leq 12 \times 11 = 132 \tag{1}$$

令

$$t_i = s_i + 21, \quad i = 1, 2, \cdots\cdots, 77 \tag{2}$$

則

$$22 \leq t_1 < t_2 < \cdots\cdots < t_{77} \leq 153 \tag{3}$$

$s_1, s_2, \cdots\cdots, s_{77}$ 及 $t_1, t_2, \cdots\cdots, t_{77}$ 共有 154 個數，但其值落在 1 至 153 之 153 個數中。由鴿籠原理，其中必有二個數其值相同。由 (1) 及 (3)，s_i 之間彼此不相等，t_j 之間亦彼此不相等。因此某一 s_k 等於某一 t_l。此卽 $s_k = t_l = s_l + 21$ 或 $s_k - s_l = 21$。換言之，從第 $l+1$ 天至第 k 天，沈棋士不多不少勝了21次。

§ 1.2. 園遊會中好友知多少

前日學校舉辦園遊會，我帶着妻子兒女參加。那天晴空萬里，人山人海，熱鬧非常。節目精彩，有吃有玩，孩子們格外高興。正巧碰到一位多年不見的老朋友談笑言歡話當年，卻將妻冷落在一旁，妻有意提醒似的朝我問：「聽說這麼多人中有兩人認識的朋友一樣多你信不信？」原來妻精通鴿籠原理，有意考我。好在我在這方面也不是弱者，略加思索，我得出一般的推論：「一羣人中必有二人各有一樣多的知友」。各位讀者，你認爲這結論對嗎？想一想，再看下面證明。

今有人數爲 n 的一羣人 S。S 可分爲 n 類 $A_0, A_1, \cdots\cdots, A_{n-1}$，此中 A_i 表示 S 中有 i 個朋友的那些人。視 a_i 爲鴿，A_i 爲籠。在此 n 鴿 n 籠，鴿籠原理得不出結論，但稍加注意就可看出 A_0 與 A_{n-1} 中必有一

籠是空的。若 A_0 不空，表示有一人跟其他所有人都不是朋友，因此沒有一人認識所有其他 $n-1$ 人，此卽表示 A_{n-1} 是空的；若 A_{n-1} 不空表示有一人認識所有其他 $n-1$ 人，因此不可能有一人跟其他所有人都不是朋友，此卽表示 A_0 是空的。故或 A_0 或 A_{n-1} 爲空，不管如何，S 事實上分爲 $n-1$ 類。由鴿籠原理，有一類至少有二人。換言之，有二人各有一樣多的朋友。

§ 1.3. 科學小飛俠的紙牌遊戲

小飛俠一號鐵雄與三號珍珍，在掃蕩惡魔黨之餘暇，常愛玩一種鬪智的紙牌遊戲。遊戲開始前，兩人各準備五張空白的紙牌，各按自己的意思在每張牌上寫一個號碼，然後各自將五張寫上號碼的牌與對方交換。遊戲開始，兩人猜拳決定先後秩序輪流出一張牌。當出手之牌與桌面上適當挑選的牌加起來，其點數和爲10之倍數時，出牌者得勝，比賽結束；否則輪到對方出牌繼續比賽。若最後各人把五張牌出完而未分勝負，比賽卽爲雙和。這遊戲既簡單又有趣，鐵雄與珍珍玩得津津有味。但很奇怪，玩了千百次的記錄中，各有勝負，但從來沒有雙和的情況發生。有一次，他們就把這遊戲是否有雙和的問題請敎南宮博士。他思索片刻，洞察其中道理後說：「是的，十個任意數目統統加起來若不是十的倍數，其中必有一部份加起可被十除盡」。接着南宮博士又說：「事實上，任意給定 n 個正整數的數列 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$，必定有一段連加起來是 n 的倍數。用鴿籠原理試證明看」。小飛俠鐵雄不僅武功非凡，智力亦高，經南宮博士一提醒，花了一天一夜苦思，果然看透了問題並想出了證明。各位讀者，想一想，再看以下鐵雄的證明。

$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 爲給定之 n 個正整數列，設

$$s_j=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_j, \quad j=1,2,\cdots\cdots,n。$$

以 n 除 s_j 得商 q_j，餘 r_j，寫成

$$s_j=nq_j+r_j, \qquad 0\leq r_j\leq n-1, \quad j=1,2,\cdots\cdots,n。$$

若某一 $r_k=0$ 則 s_k 爲 n 之倍數卽得結論，因此假定所有 $r_j\neq 0$，$j=1,2,\cdots\cdots,n$，則

$r_1, r_2, \cdots\cdots, r_n$ 等 n 個數，其值皆落在 $1,2,\cdots\cdots,n-1$ 等之 $n-1$ 個數中，由鴿籠原理，必有某一 r_k 等於某一 r_l。故 s_l-s_k 爲 n 之倍數。此卽說

$$a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots\cdots+a_l$$

可被 n 除盡。

§ 1.4. 十人中之高矮次序

十個人任意排成一列必定有四人是按高矮順序排列。事實上，一般的情形，任意長度爲 n^2+1 之實數敍列必包含有 $n+1$ 長度之遞增或遞減子敍列。下面是組合學大師耶廸西 (Erdös) 的證明。

假設給定之實數敍列 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_{n^2+1}$ 中沒有長度爲 $n+1$ 的遞增子敍列，我們將證明必定有長度爲 $n+1$ 之遞減子敍列。對任意 a_i，考慮所有以 a_i 爲起點之遞增子敍列。令 m_i 爲此種遞增子敍列中可能達到之最大長度。由開始的假定得

$$1\leq m_i\leq n, \quad i=1,2,\cdots\cdots,n^2+1。$$

$m_1, m_2, \cdots\cdots, m_{n^2+1}$ 爲 n^2+1 個數，其值落在 $1,2,\cdots\cdots,n$ 之 n 個數中，由鴿籠原理，必有 $n+1$ 個 m_i 取同一值。令

$$m_{i_1}=m_{i_2}=\cdots\cdots=m_{i_{n+1}} \text{ 且 } i_1<i_2<\cdots\cdots<i_{n+1}。 \tag{4}$$

若 $a_{i_1}\leq a_{i_2}$ 則 a_{i_1} 接上以 a_{i_2} 爲起點之最長遞增敍列構成以 a_{i_1} 爲起點，長度爲 $m_{i_2}+1$ 之遞增子敍列因此 $m_{i_2}+1\leq m_{i_1}$。此與(4)式矛盾，故 $a_{i_1}>a_{i_2}$ 同理 $a_{i_2}>a_{i_3}, \cdots\cdots, a_{i_n}>a_{i_{n+1}}$ 等。此卽 $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots\cdots, a_{i_{n+1}}$ 是長度爲 $n+1$ 之遞減子敍列。

§ 1.5. 101 個數中的奇蹟

從 1,2,3……,200 的二百個數中任取 101 個數則其中必定有二數 s,t，使得 s 是 t 的因數或 t 是 s 的因數。想一想，再看以下的證明。

任意選取之 101 個數記爲 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_{101}$。將 a_i 中所有含 2 之因數刮出，寫成

$$a_i=2^{l_i}p_i, \quad i=1,2,3,\cdots\cdots,101$$

其中 p_i 爲奇數。$p_1,p_2,\cdots\cdots,p_{101}$ 等 101 個數，其值落在 $1,3,5,\cdots\cdots,199$ 等之 100 個數中。由鴿籠原理，知道某兩個 p_i 相等。設 $p_k=p_l=p$ 則 $a_k=2^{l_k}p$ 及 $a_l=2^{l_l}p$ 令 $s=a_k$，及 $t=a_l$，則 s,t 滿足所要的條件。

§ 1.6. 圓盤上之七點

半徑爲 1 的圓盤上有七點，其中任意二點點的距離都不小於 1。則七點中有一點爲圓心。結論有點出奇，想一想，再看以下證明。

將圓盤如圖一分成六塊相等之扇形 $A_1OA_2, A_2OA_3, \cdots\cdots, A_6OA_1$ 等。令

S_1＝扇形 A_1OA_2 但不含 OA_2

S_2＝扇形 A_2OA_3 但不含 OA_3

S_3，S_4，S_5，S_6 同樣定義。

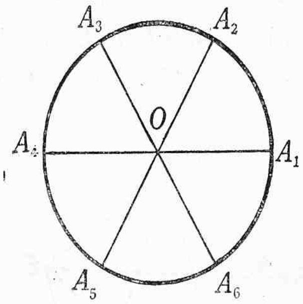

圖 一

除圓心外，圓盤上之任意點都屬於而僅屬於某一 S_i。若七點中無一爲圓心， 則其中有二點屬於同一 S_i。但 S_i 中之任意二點的距離都小於 1，故不可能七點中無一點爲圓心。結論確定。

§ 1.7. 正三角形內之三個區域

正三角形 ABC 各邊長爲 1，將 ABC 所圍成的點集合，任意分成 S_1,S_2,S_3 三區域， 則必定有某一 S_i 之直徑大於或等於 $1/\sqrt{3}$。此中所謂點集合 S 的直徑是指 S 中任意兩點距離的最大數。由於 S_1, S_2,S_3 之形狀毫無限制，初看，問題是似乎很難，想一想，再看以下的證明。

令 O 點爲正三角形的中心。O,A,B,C 中任意二點的距離都大於或等於 $1/\sqrt{3}$。視 O,A,B,C 四點爲鴿，S_1,S_2,S_3 爲籠，由鴿籠原理，某一 S_k 包含此四點之兩點。因此 S_k 之直徑大於或等於 $1/\sqrt{3}$。

§ 1.8. 廣義的鴿籠原理

給定非負的整數 $q_1,q_2,\cdots\cdots,q_n$，將 k 個東西分爲 n 類， 若 $k\geq q_1+q_2+\cdots\cdots+q_n-n+1$ 則一定有某第 i 類東西個數大於或等於 q_i 個。這是鴿籠原理一般情形。它的證明很簡單，假若結論不確卽是說第 1 類東西小於 q_1，第 2 類小於 q_2，…第 n 類小於 q_n。則所有東西總和

$$k\leq(q_1-1)+(q_2-1)+\cdots\cdots+(q_n-1)=q_1+q_2+\cdots\cdots+q_n-n。$$

此與原前提矛盾故不可能。

當 $q_1=q_2=q_3=\cdots\cdots=r$ 時卽爲原來的鴿籠原理。

II. 三個知友或三個陌生人

鴿籠原理有一種更廣義的形式，那就是組合學上有廣泛應用的蘭姆西（Ramsey）定理。定理敍述前先看一個特例。

§ 2.1. 三知友或三鮮人

一羣人，人數大於等於 6，必然有三知友兩兩彼此認識或有三新鮮人兩兩彼此都不認識。以下就是證明。

任取一人名之爲 A，其他人，人數至少爲 5，可分爲二類。與 A 認識者爲一類，與 A 不認識者爲另一類。由鴿籠原理，必有一類人數大於等於 3。令此三人之名爲 B,C,D。若 B,C,D 皆與 A 認識且其中有二人彼此相識，則 A 及此二人爲三知友，不然 B,C,D，兩兩不認識則 B,C,D 爲三新鮮人；若 B,C,D 皆與 A 不認識且其中有二人彼此不相識，則 A 與比二人爲三新鮮人，不然 B,C,D 中兩兩互相認識則 B,C,D 爲三知友。無論有三知友或三新鮮人，結論都是對的。

6 是滿足上述性質最小的數，它有特殊的意義，我們記爲 $N(3,3;2)=6$，表示「一羣人 S，人數未知。但 S 中任 2 人的關係分爲兩類，且知道 S 中有一小羣人 T，T 人數爲 3 而 T 中所有 2 人的關係都屬於同一類，則 S 的人數至少爲 6」。圖二中頂點 A,B,C,D,E 代表五人，其二人之關係分爲實線相連的與虛線相連的兩類。很容易看出任意三人其所有 2 人的關係不可能屬於同一類。

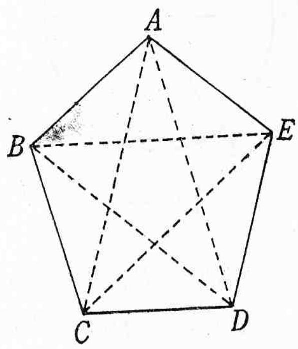

圖 二

§ 2.2. 蘭姆西定理

爲敍述方便，集合 S 的子集 T 若具有 l 個元素我們稱 T 爲 S 的 l-子集。

蘭姆西定理是說將 S 中的 l-子集分爲 $S_1,S_2\cdots,S_t$ 等互不相交之 t 類，任意給定不小於 l 之 t 個整數 $q_1,q_2\cdots,q_t$，一定可以找到一個最小整數 $N(q_1,q_2,\cdots,q_t;l)$，只要 S 的元素個數 $n\geq N(q_1,q_2,\cdots q_t;l)$，$S$ 中必定有子集 T，其元素個數爲某一 q_k 且所有 T 之 l-子集都屬於 S_k。

當 $l=2$，$t=2$，$q_1=q_2=3$ 時 $N(q_1,q_2;l)=6$ 卽爲上一節所舉的例子。當 $l=1$ 時

$$N(q_1,q_2,\cdots\cdots q_t;l)=q_1+q_2+\cdots\cdots+q_t-t+1$$

卽是鴿籠原理。蘭姆西定理可以說是將鴿籠原理從裝 1-子集的籠子推廣到裝一般 l-子集的籠子。$N(q_1,q_2,\cdots\cdots q_t;l)$ 稱爲蘭姆西數，一般情形蘭姆西數並不能寫成 $q_1,q_2,\cdots\cdots,q_t$ 及 t 的整齊形式，這也是此定理難說難懂的原因。蘭姆西數由定理可知是確定存在的，但到底爲何數，所知極少。譬如

$$N(3,3;2)=6,\quad N(3,4;2)=9,\quad N(3,5;2)=14,$$
$$N(3,6;2)=18,\quad N(4,4;2)=18,\quad N(3,3,3;2)=17。$$

蘭姆西定理的證明用數學歸納法，雖巧妙但稍微繁複，在此從略。有趣的讀者請參看文後參考文獻。

爲了使讀者對蘭姆西定理有比較具體的形象，我們用以下不太精確的語言再加說明。考慮 $l=20$, $q_1=50, q_2=10$ 的情形。定理告訴我們蘭姆西數 $N(50,100;20)$ 存在，但 $N(50,100;20)$ 確爲何數並不知道，姑且當它爲 1000 好了。S 是一個點數大於或等於 1000 的集合，將 S 中所有 20 點的集合分爲黑與白兩類。那麼，S 中一定有一個子集 T 滿足下列二條件之一：

(i) T 具有 50 點且 T 之所有 20 點的子集（此種子集的個數有 $\binom{50}{20}$ 個）都是黑的。

(ii) T 具有 100 點且 T 之所有 20 點的子集（此種子集的個數有 $\binom{100}{20}$ 個）都是白的。

§ 2.3. 平面上之凸多邊形

平面上四點，雖無三點共線，但不一定構成凸四邊形，然而點數超過四點必定其中有四點構成凸四邊形。我們將此給予更一般性的證明作爲蘭姆西定理應用之一例。

【定　理】 對任意 $m\geq 4$ 的整數，可找到正整數 $N(m)$。若 $n\geq N(m)$，平面上無三點共線的任意 n 點中必定有 m 點構成凸 m 邊形。

借用兩個事實作爲引理。

引理 1: 平面上有五點，其中任意三點不共線，則五點中必有四點構成凸四邊形。

引理 2: 平面上有 m 點，其中任意三點不共線，但任意四點構成凸四邊形，則此 m 點構成凸 m 邊形。

定理的證明如下：

將平面上所有四點的集合分爲兩類 S_1 及 S_2。四點構成凸四邊形者屬於 S_1；四點構成凹四邊形者屬於 S_2。設定 $q_1=m, q_2=5$ 及 $l=4$，則蘭姆西數 $N(m,5;4)$ 存在。令 $N(m)=N(m,5;4)$。若 $n\geq N(m)$，平面上 n 點的集合 S，其中無三點共線者必含有一子集 T 滿足 (i) T 具有 m 點且 T 之任四點構成凸四邊形，或滿足 (ii) T 具有 5 點且 T 之任四點構成凹四邊形。但由引理 1，(ii) 之發生爲不可能，故 T 滿足 (i)。由引理 2 得知 T 構成凸 m 邊形，定理得證。

$N(m)$ 之存在已證明確定，但 $N(m)$ 確爲何數與蘭姆西數一樣所知無幾。例如 $N(4)=5, N(5)=9$，但 $m\geq 6$ 就不知道了。有人猜測 $N(m)=2^{m-2}+1$，對此至今尚無證明或反證。

§ 2.4. 圖形學觀點看蘭姆西定理

圖形學 (Graph theory) 是組合理論很重要的一分支。很多非連續模型 (Discrete model) 都可用圖形 (graph) 描述。所謂圖形是指一個有限集合 V 及 V 中之一些 2-子集 E。V 中之元素稱爲點，E 中之元素稱爲線。普通記爲 $G=(V,E)$，稱 G 爲一圖形 (graph)。若 $\{x,y\}$ 爲 E 中元素，則稱點 x 與點 y 相鄰或點 x 與點 y 有關聯。以下圖三都是圖形簡單的例子。圖三中以 "•" 代表屬於 V 之點，兩點間若有線相連則此兩點構成的 2-子集屬於 E。

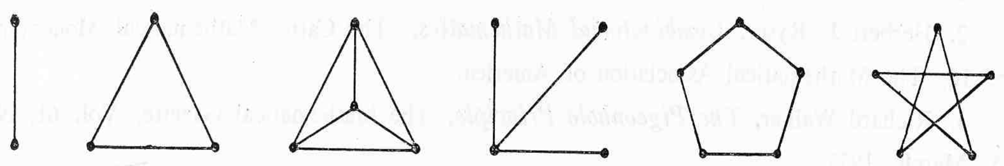

圖 三

結構最簡單的圖形爲 E 等於空集合或 E 等於所有 V 之 2-子集。前者稱爲無趣圖形，後者稱爲完整圖

形。完整圖形之點數有 p 個時稱該圖形爲 p 階完整圖形，記爲 K_p。圖三中前三個圖形各爲 2 階，3 階，4 階的完整圖形。對任一圖形 $G=(V,E)$，我們可以考慮其互補圖形 $\tilde{G}=(V',E')$，此中，$V'=V$ 及 $E'=$ 所有 V 之 2-子集扣除 E。圖三中最後兩個圖形互補。

給定一個圖形 $G=(V,E)$，很自然將 V 之所有 2-子集 X 分爲二類 $S_1=E$。及 $S_2=X-E$。p 及 q 爲不小於 2 之整數。若 G 之點數 $n\geq N(p,q;2)$ 時，V 中有子集 T 滿足 (i) T 有 p 點且 T 之所有 2-子集屬於 S_1，或滿足 (ii) T 有 q 點且 T 之所有 2-子集屬於 S_2。換言之，(i) 發生時 T 爲 K_p；(ii) 發生時 $\tilde{T}$ 爲 K_q。因此蘭姆西定理以圖形學之觀點是說：

「對任意給定不小於 2 之整數 p 及 q 必有一正整數 $N(p,q;2)$ 存在。任意圖形 G，只要其點數 $n\geq N(p,q;2)$，必然 G 包含 K_p 或 $\tilde{G}$ 包含 K_q。」

例如，知道 $N(3,6;2)=18$。這表示點數 17 以上的圖形必然有 3 點，兩兩有線相連；或有 6 點，兩兩無線相連。

III. 鴿籠原理的挑戰

善用鴿籠原理常有奇妙驚人的結果，各位讀者，你是不是也想一顯身手，以下是鴿籠原理對你的挑戰。

§ 3.1. 任意 52 個整數中，必定可以選取 2 個，使得其和或其差爲 100 的倍數。

§ 3.2. 在邊長爲 1 的正三角形上有十點，則必定有二點其距離至大爲 1/3。

§ 3.3. 從 1 到 $2n$ 的 $2n$ 個自然數中任取 $n+1$ 個數，必定有二數其一爲另一的倍數或因數。

§ 3.4. 阿德今年高三畢業，距離大專聯考尙有 37 天。爲了有效支配時間，他決定每天最少用 1 小時，總共用 60 小時準備數學科目的綜合溫習。不管阿德如何安排他的時間表（時間表以小時爲單位），在一段連續的日子裏，阿德將花 13 小時在溫習數學上。

§ 3.5. 任意給定 $mn+1$ 個自然數，必定有下列二情形之一發生：(i) 可找到 $m+1$ 個數 $a_1,a_2,\cdots\cdots,a_{m+1}$ 等，其中兩兩互不整除；或 (ii) 可找到 $b_1,b_2,\cdots\cdots,b_{n+1}$ 等 $n+1$ 個數，其中 b_1 除盡 b_2，b_2 除盡 $b_3,\cdots\cdots,b_n$ 除盡 b_{n+1}。

最後，我們以一個小故事結束本文。

§ 3.6. 世界人口何其多

大華好奇地問小明：「世界上有多少人，你知道嗎？」

小明裝大人樣說：「世界上的人不計其數，但至少比任何人的頭髮數還多。」

大華很自信的又說：「這樣的話，世界上一定有兩人，他們的頭髮一樣多。」

想一想，爲什麼大華那麼肯定而有自信。

參考資料

1. Richard A. Brualdi, *Introductory Combinatorics*, North-Holland Inc., 1977.

2. Herbert J. Ryser, *Combinatorial Mathematics*, The Carus Mathematical Monographs No. 14, The Mathematical Association of America.

3. Richard Walker, *The Pigeonhole Principle*, The Mathematical Gazette, Vol. 61, No. 415, March, 1977.

4. 黃光明：組合學漫談，「數學傳播」第一卷第四期(4)，民國 65 年 3 月。

—— 作者現任教於中央大學數學系