Cantor集合的基本性質及其用於反例

胡紹宗

Cantor 集是一個構思巧妙的特殊點集, 此集合是 Cantor 在解三角級數問題時作出來的, 它有著一些“奇怪”的性質。一般實變函數教科書中都有證明: Cantor集是一個疏朗的完全集, 具有連續基數的點集和不可數的零測度集。這些性質在對許多問題的討論中都起著很大的作用, 特別常是構造重要反例的基礎。

例1: 構造一個在 R 上幾乎處處等於零的函數, 它在每個非空開區間上的值域都是 R。

解: (1) 設 p 是 [0,1] 上的 Cantor 三分集, θ 爲定義在 [0,1]上的 Cantor 函數 (參見「數學傳播」第二十一卷第一期, 胡紹宗「Cantor 函數的分析性質及其用於反例」)。

在 (0,1) 上定義函數:

$$g(x) = \tan[\pi(\theta(x) - \frac{1}{2})], \quad 0 < x < 1$$

則 $g[p \cap (0,1)] = R$。

(2) 對於任意開區間 $I = (a,b)$, 令

$$E_1 = \{a + (b-a)x | x \in p \cap (0,1)\}$$

則 E_1 是 I 的零測度子集

在 E_1 上定義函數:

$$g_1(x) = g(\frac{x-a}{b-a}), \quad x \in E_1$$

則 $g_1(E_1) = R$。

(3) 定義所要求的函數 f, 先令它在整數集 Z 上等於零, 然後定義開集序列 $\{G_n\}$ 如下:

$$G_1 = R - Z = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} (n, n+1)。$$

在每一個這些開區間 I 上, 設 E_1 爲 (2) 中定義的零測度集, 並在 E_1 上定義 f 等於 g_1。G_1 內 f 尚未定義的點組成子集 G_2, 它是開集, 因而是互不相交的開區間的聯集。在每一個這些開區間 I 上, 設 E_1 爲 (2) 中定義的零測度集, 並在 E_1 上定義 f 等於 g_I。G_2 內 f 尚未定義的子集 G_3 仍是開集, 因而還是互不相交的開區間的聯集。在每一個這些開區間 I 上, 設 E_1 爲 (2) 中定義的零測度集, 並在 E_1 上定義 f 等於 g_1。依照上述方法每進行一步, 函數 f 的定義域就能擴大一次, 以包括這些零測度集。將這種步驟繼續下

去, 因爲可數個零測度集之聯集仍是零測度集, 所以函數 f 轉化爲定義在一個零測度集上。同時不難看出, 按照此種方法可使每個非空開區間必然包含開集 G_n 之一的一個開區間 I, 因而也包含一個集 E_1, 其上 f 的値域都是 R。最後, 在 f 一直沒有定義的各點, 令 f 恆等於零。

這樣, 上述所定義的函數 f 就是一個在 R 上幾乎處處等於零的函數, 它在每個非空開區間上的値域都是 R 。

測度理論告訴我們: 任何正測度集 A, 其差集 $\Delta(A)=\{x-y|x\in A, y\in A\}$ 必包含對稱於原點的開區間。現在要問: 所有零測度集, 其差集必不包含對稱於原點的任何開區間嗎? 我們的回答是不一定, 請看

例2: 設 p 爲零測度集中的 Cantor 三分集, 則 $\Delta(p)=[-1,1]$。

證: 由於 p 是經過一系列刪去“三分中段”的步驟而得到的, 因此能夠把 p 與 p 的笛卡爾乘積 $p\times p$ 設想爲可數個閉集 $p_1,p_2,p_3,\ldots$ 的交集, 每個 p_n 都按下述方法作爲一些“隅角正方形”的聯集: 集 p_1 由四個面積皆爲 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$ 的位於整個正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 四隅的閉正方形 $[0,\frac{1}{3}]\times[0,\frac{1}{3}]$, $[0,\frac{1}{3}]\times[\frac{2}{3},1]$, $[\frac{2}{3},1]\times[0,\frac{1}{3}]$ 和 $[\frac{2}{3},1]\times[\frac{2}{3},1]$ 組成; 集 p_2 由十六個面積皆爲 $\frac{1}{9}\times\frac{1}{9}$ 的位於 p_1 的四個正方形四隅的閉正方形組成; 集 p_3 由六十四個面積皆爲 $\frac{1}{27}\times\frac{1}{27}$ 的位於 p_2的十六個正方形四隅的閉正方形組成; 等等。對於任給的 $\alpha\in[-1,1]$, 直線 $y=x+\alpha$ 與 p_1 的四個正方形中至少有一個相交, 選出這樣一個正方形並記爲 S_1。這條直線也必然與 p_2 的位於 S_1 之內的四個正方形中至少有一個相交, 選出這樣一個正方形並記爲 S_2。如果這個過程繼續下去, 就得到一個閉正方形序列 $\{S_n\}$, 且有 $S_{n+1}\subset S_n$, S_n 的邊長 $\frac{1}{3^n}\to 0$ $(n\to\infty)$, 所以由矩形套定理, 存在唯一的一點 $(x,y)\in S_n$ $(n=1,2,3,\ldots)$。因此, 點 (x,y) 必然屬於 $p\times p$, 但因爲這個點還必須位於直線 $y=x+\alpha$ 上, 於是得到 p 的兩個元 x 和 y, 它們的差是給定的數 α, 即 $\Delta(p)=[-1,1]$。

例3: 對任意開集G, 證明或否定:

(1) $m\overline{G}=mG$;

(2) G 約當可測。

解: (1) 不一定。在 [0,1]上作類 Contor 集 P:

第一次刪去閉區間 [0,1]中央的長度爲 $\frac{1}{5}$ 的開區間,

第二次刪去餘下的2個閉區間中央的長度皆爲 $(\frac{1}{5})^2$ 的開區間,

第三次刪去餘下的 2^2個閉區間中央的長度皆爲 $(\frac{1}{5})^3$ 的開區間,

$\cdots$

一般說來, 第 n 次刪去餘下的 2^{n-1} 個閉區間中央的長度皆爲 $(\frac{1}{5})^n$ 的開區間。

如此等等, 這樣便得到類 Cantor 集 P 與開集 $G=[0,1]-P$, 易知

$$\begin{aligned}mG&=\frac{1}{5}+2(\frac{1}{5})^2+2^2(\frac{1}{5})^3+\cdots\\&\quad+2^{n-1}(\frac{1}{5})^n+\cdots\\&=\frac{1}{5}[1+\frac{2}{5}+(\frac{2}{5})^2+\cdots+(\frac{2}{5})^{n-1}+\cdots]\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{5}}=\frac{1}{3}$$

另一方面, 因 P 沒有內點, 故 P 的任一點 x_0 的任何鄰域都含有 G 的點, 即 x_0 是 G 的聚點, 從而有 $P\subset G'$, 又 G 爲開集, $G\subset G'$, 因此

$$\overline{G}=G'\cup G=(p\cup G)\cup G=P\cup G$$
$$=[0,1],\qquad m\overline{G}=1$$

於是

$$m\overline{G}=1\neq\frac{1}{3}=mG$$

(2) 不一定。如 (1) 中所作類 Contor 集 P 及開集 G, 已知 $mG=\frac{1}{3}$, 從而 $mP=m[0,1]-mG=\frac{2}{3}$。因 P 是沒有內點的完全集, 即 P 中沒有 G 的外點, 都是 G 的邊界點, 故 $\partial G=P$, 由約當外測度與勒貝格外測度的關係, 可知

$$(m^*\partial G)_J=(m^*p)_J\geq m^*p=\frac{2}{3}$$

即 G 的邊界的約當外測度不能是零, 但因有界點集約當可測的充要條件是其邊界的約當外測度爲零, 所以 G 不是約當可測集。

参考文獻

1. 鄭維行、王聲望編「實變函數與泛函分析概要」, 人民教育出版社, 1980年6月。
2. 程其襄等編「實變函數與泛函分析基礎」, 高等教育出版社, 1986年5月。
3. (美) B. Gelbaum 著「實分析習題及解答」, 陝西人民出版社, 1986年5月。
4. (美) B. R. 蓋爾鮑姆、J. M. H. 奥姆斯特德著「分析中的反例」, 上海科學技術出版社, 1980年3月。

—本文作者任教於安徽省阜陽師範學院—