

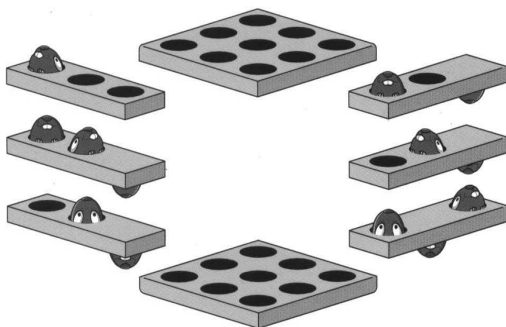
土撥鼠遊戲研究

孫君儀 · 葉均承 · 陳天任

一. 前言:

土撥鼠是草食群居的松鼠科動物，它們建築數以百計的洞穴及四通八達的地道網路，彷彿一座繁忙的城市。土撥鼠警覺性很高，當發現土狼、老鷹等危險動物出現時，就會發出尖銳的聲音向同伴們示警。土撥鼠遍佈美國西部地區廣大的平原及台地。黑尾品種及白尾品種的土撥鼠現仍存活於美國國家公園及野生動物保護區中。

土撥鼠遊戲是由 Andy Turner 及其女兒 Sarah 設計的，美國 Binary Arts 公司出品。在圖一中有上、下二片墊板及六片土撥鼠骨牌，本遊戲之目的是設法將六片骨牌整整齊齊地放入上下兩塊墊板之間。



圖一

剛開始時，我們都以爲它很容易完成，漫

不經心地隨意亂擺，擺了很長的時間還是完成不了。有一次碰巧拼成了，但是弄亂了又拼不回去了。在拼湊的過程中我們驚訝地發現，我們經常在重複一些曾犯過的錯誤，不設法尋求一些策略不可，於是我們決定動手進行分析。

二. 認識配件

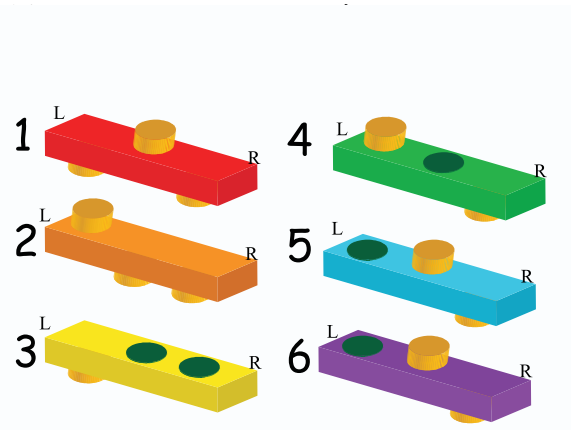
土撥鼠遊戲的配件有:

1. 上下墊板各一片，每片分別有 3×3 個大小相同的洞。
2. 土撥鼠骨牌六片，每片爲 1×3 單位，骨牌兩面有些位置上有些土撥鼠，有些沒有；有些有洞，有些沒有；每片骨牌的三個位置上，至多有一面有土撥鼠。

三. 記號說明

爲了便於分析，我們分別將這些骨牌的造型記錄及編號如下：我們以 U 代表圖二中所示骨牌朝上那面，D 代表圖中所示骨牌朝下那面，L 代表圖中所示骨牌之左邊，R 代表圖中所示骨牌之右邊。由於骨牌上土撥鼠的影像不易繪製，我們以凸出的圓木取代土撥鼠，故以圖二之示意圖表

示之。圖二中類型 1,2,3,4,5,6 在下文中分別

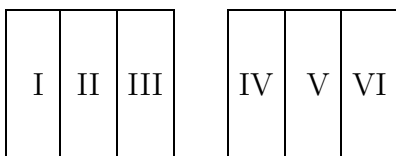


圖二

經過一陣嘗試錯誤，我們體驗到：上、下墊板的洞很多，可充分讓土撥鼠進住，因此可不考慮骨牌最上及最下二個外層的情況。但是欲把這些骨牌整齊堆好，二層骨牌相接的中間層部份的每個土撥鼠必須有洞可以住入。因此，中間層洞的與中間層的土撥鼠的數量關係是很重要的。為了記錄方便，我們以 UL 代表骨牌放置於墊板上時 U 面朝中間（我們把下層的骨牌朝上、上層的骨牌朝下的情況稱作骨牌朝中間），骨牌的 L 邊朝北或朝西；DR 代表骨牌 D 面朝中間，R 邊朝北或朝西。UR, DL 的規定相同。

四. 分析

將上下墊板依圖三編號，任選一片骨牌放入位置 I~VI 的方法有 $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ 種。



圖三

每片骨牌都有 UL、UR、DL、DR 等 4 種擺法，我們可以選擇下層為鉛直或水平開始，上層與它合在一起可以是垂直或平行。

因此這些骨牌的任意排列有 $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 4^6 \times 2 \times 2 = 11796480$ 種組合，如果每秒鐘試 1 種，也要不吃不喝地連續作 136 天。寫程式用電腦來湊解也需近二個小時。

由圖二，可觀察到 #5 與 #6 是全等的二片，#4 上下面對稱，#1 左右對稱，整組旋轉 90 度視為相同，實際之組合數為上述數目之 $1/32$ ，但要求電腦在湊解前先判斷這些情況後再運行，必須撰寫較複雜之程式，讓它依序盲目地試反而簡單些。

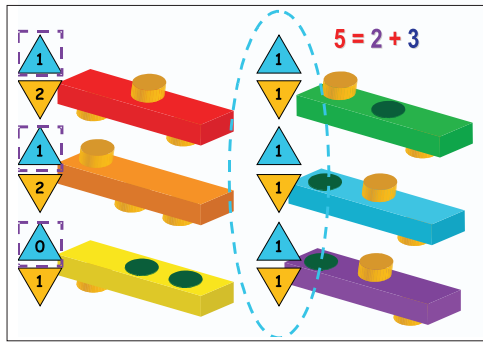
由於中間層骨牌的洞數共有 5 個，因此，只能安置 5 隻土撥鼠。我們暫將兩片墊板置於桌面上，將六片骨牌置入，再把兩組相對合併。#4, #5, #6 骨牌無論 U 或 D 朝中間，都有 1 隻土撥鼠朝上，這 3 片骨牌必佔 3 個洞，只剩下 2 個洞分給其它 3 片（圖四）。檢視 #1, #2, #3 骨牌可知，1D, 2D 要佔用 2 個洞；1U, 2U, 3D 要佔用 1 個洞；3U 不需佔用洞。如果把剩下的這二個洞全部給 1D 的二隻土撥鼠使用，則 #2 骨牌的土撥鼠無洞可住入，不可能完成目的；同樣地，這二個洞也不可以全部用在 2D。我們只能將這二個洞分給 1U 及 2U，各用一個洞，此時，已沒有洞供 3D 的土撥鼠住入。因此，#1, #2 骨牌都只能 U 面朝上各佔 1 個洞，#3 骨牌也必須是 U 面朝上，佔 0 個洞。由此我們得到：

事實 1：每片骨牌的土撥鼠至多只能佔用 1 個洞。

這6片骨牌總共只能佔用5個洞，並且骨牌的洞，一個也不能浪費。這也就是說這些骨牌只能是1U,2U,3U,4U 或4D,5U 或5D,6U 或6D 排列。由此我們得到：

事實2: #1、#2、#3骨牌必須 U 面朝中間。

為了方便以後#1、#2、#3骨牌一律指 U 面朝中間。



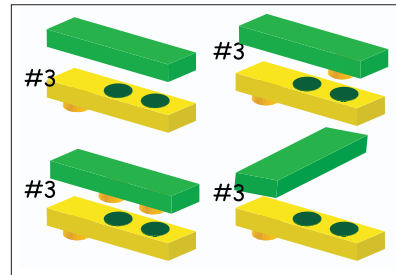
圖四

再仔細觀察這些骨牌的一些特性，我們發現了其他事實：

事實3: 中間的上、下二層必須垂直。

特別注意#3這一片骨牌，當它與其它骨牌平行接合時，無論是#1、#2或4U, 4D, 5U,5D,6U,6D 都會造成有一個洞沒有土撥鼠進住，與前面分析必須所有五個洞都有土撥鼠進住，不能浪費任何一個洞的原則相違背(圖五)。由此得知上、下二層骨牌必須相互垂直，這個重要的信息及有三片骨牌必須U 面朝中間，加上#5與#6全等；#4上下面對稱；#1左右對稱的特性；整組旋轉90度視為相同，使得需嘗試的組合數減為1/512，但

仍為23040種組合，用電腦試解約需10分鐘左右。

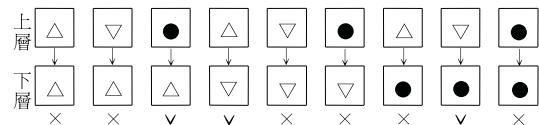


圖五

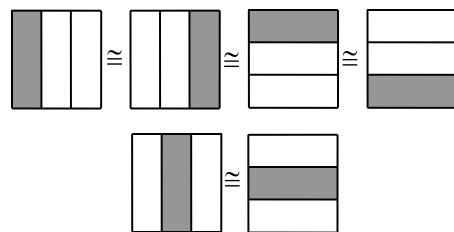
事實4: 骨牌中若有土撥鼠朝中間時，另一層骨牌的這個位置必須是洞才能接合；反之，骨牌中某位置有洞時，另一層骨牌的這個位置必須有一隻土撥鼠朝中間；若骨牌某位置之土撥鼠朝外時，另一層骨牌的這個位置的土撥鼠也必須朝外(見圖六)。

有了上述的規律，我們就可以用畫樹狀圖的方式嘗試求解。由於墊版可以任意旋轉或上下翻轉，因此，任取一片骨牌開始嘗試時，只要考慮在角落及中央兩種情況即可(見圖七)。

(●表示洞，△ 表土撥鼠朝上，▽ 表土撥鼠朝下，× 表不合，√ 表可以。)



圖六

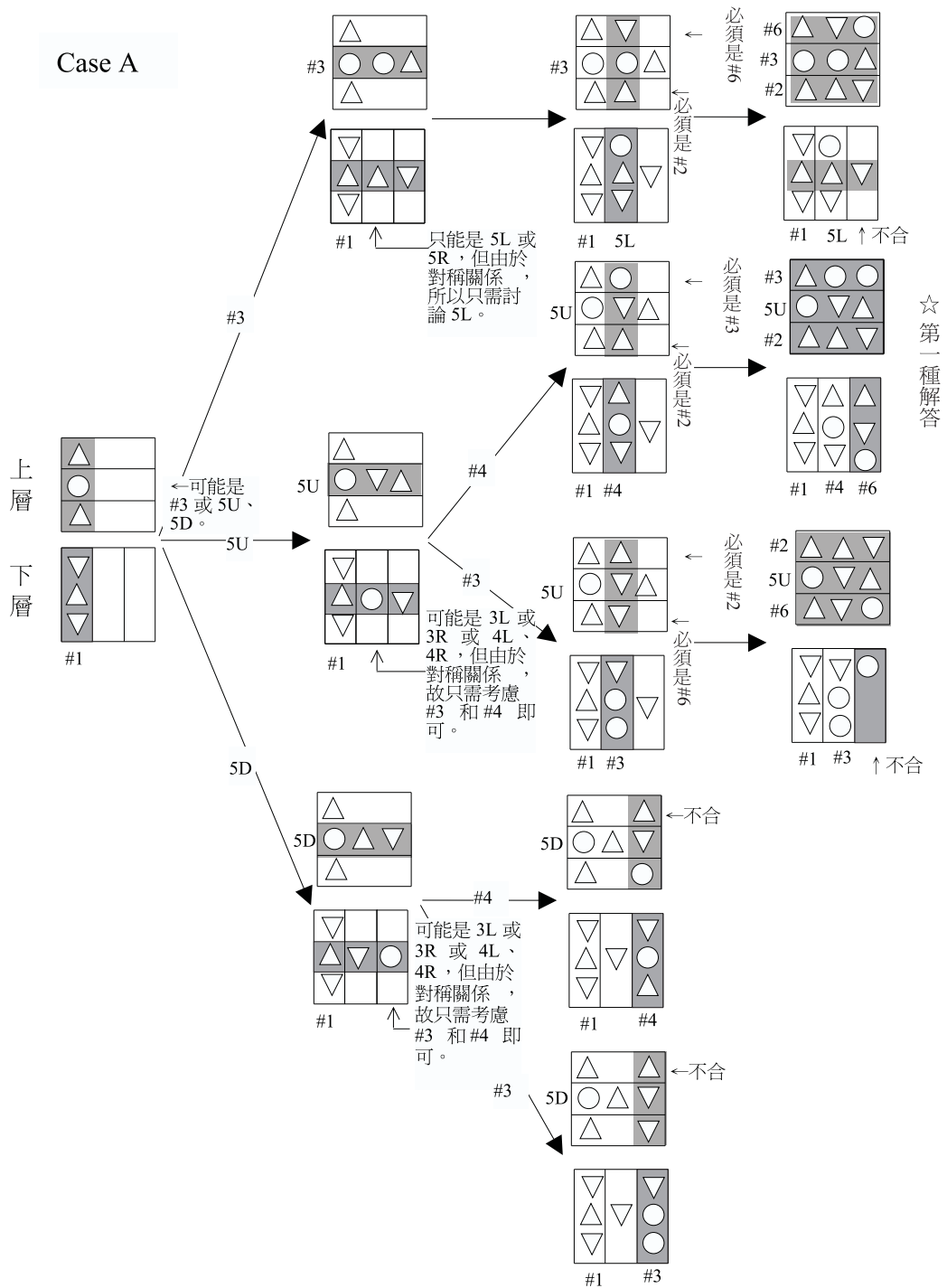


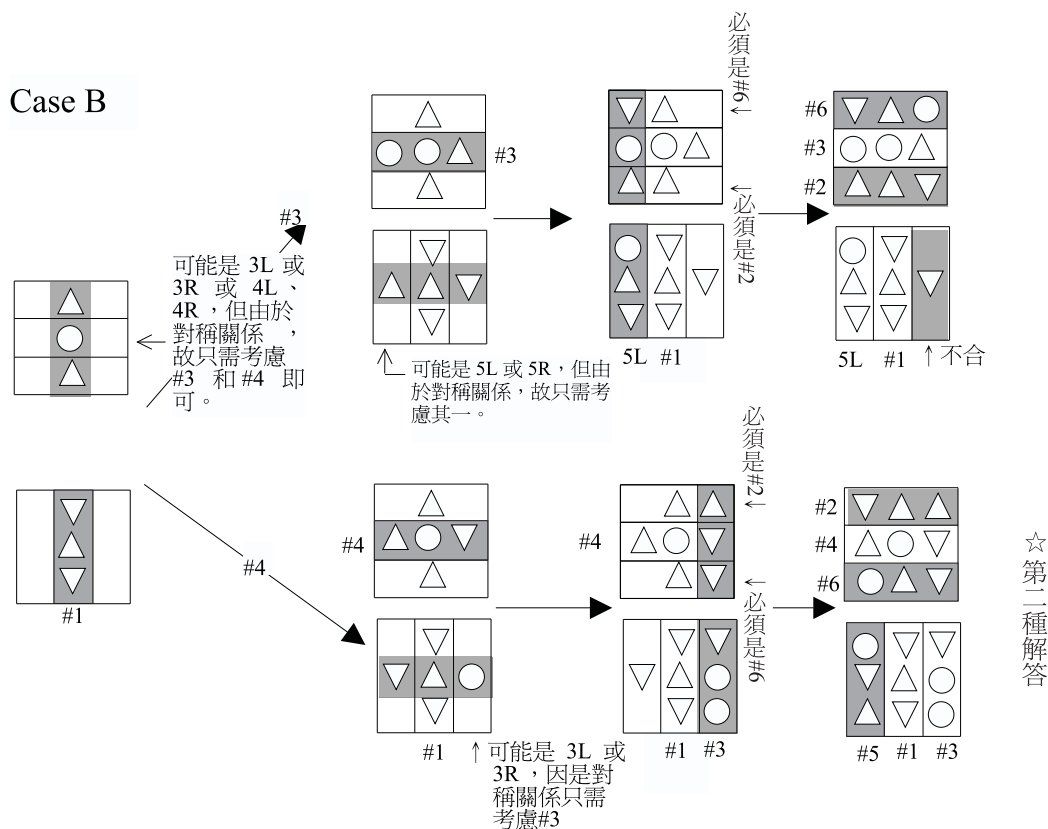
圖七

片開始較容易些。

由於#1,#2,#3骨牌只能 U 面朝中間,#4骨牌是上下面對稱的,由其中任選一

假設由#1開始嘗試:(陰影所示為新增步驟)





同樣地我們也可以從 #5=#6 開始，並且都可以得到上述二解。只不過從 #5=#6 開始時須先分 5U 及 5D 的情況討論。

用上述方法求解，想法雖較樸素，但仍需經過分別嘗試很多不同的情況。如果再仔細作一些分析，尋找一些規律，就可以減少嘗試的數量。

五. 進一步的分析

事實 5: #1、#2 骨牌不可在同一層。

如果 #1、#2 骨牌在同一層，它們各有 1 個土撥鼠朝中間，由前分析得知，全部共有 5 個位置有洞或土撥鼠，故在另一片骨牌的三個位置上，都必須有洞或土撥鼠，

而 #3、4U、4D、5U、5D、6U、6D 均只有二個位置上有洞或土撥鼠 (全部的骨牌中只有 3D 在三位置上有洞或土撥鼠，但此面不可朝中間)，沒有這樣的骨牌符合要求，所以 #1、#2 骨牌不可在同一層。

事實 6: #3、#4 骨牌不可在同一層。

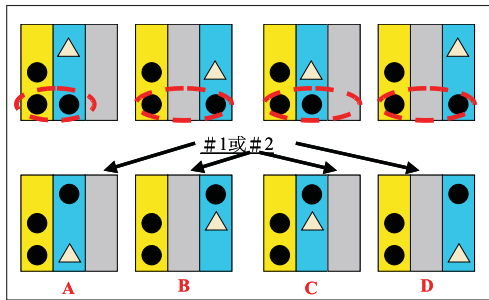
如果 #3、#4 骨牌在同一層，則無論是 4U 或 4D，則中間一列都會有兩個洞，而另一層的骨牌必須與它垂直，由前所述，任一片骨牌至多只能佔用一個洞，無論任何情況，它都會浪費一個洞。故 #3、#4 骨牌不可在同一層。

事實 7: #5、#6 骨牌不可在同一層。

若#5、#6骨牌在同一層，則此層之第3片骨牌只能是#1、#2 中的一片或#3、#4 中的一片，如此會造成 #3、#4在同一層或#1、#2在同一層，這違反事實 5、事實 6，故#5、#6骨牌不可在同一層。

事實 8: #3骨牌必須在角落。

如果#3骨牌在中間列，因而#4必須在不同層且與它垂直，由於#4骨牌中間有洞，如此會造成浪費一個或二個洞，故#3骨牌不可以在中間，必須在角落。



圖八

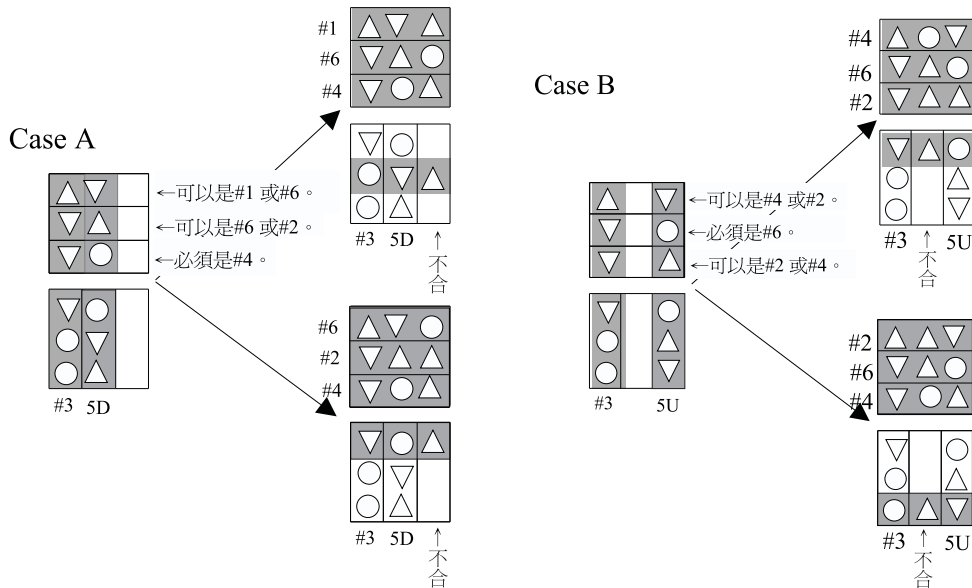
綜合事實 1~事實 8的結果，#3 必須#5 (= #6) 在同一層，它們有 8 種可能的擺法，但有 4 種情況會造成同一列有二個洞，故刪除之(圖八)。

其它的 4 種情況我們用先前使用的方法分別討論之:(陰影所示為目前之步驟)

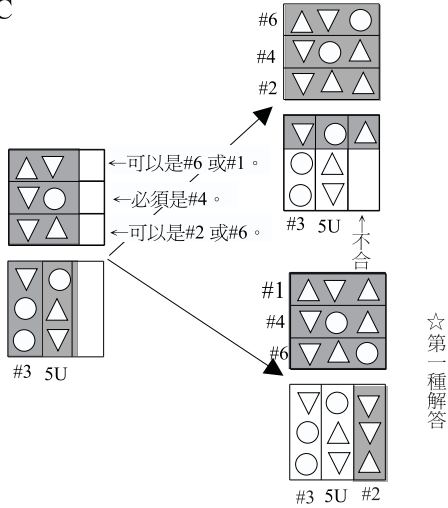
我們很容易就得到二組解答。土撥鼠遊戲全部結構不同的解答只有如圖九所示二種。注意，#1 骨牌一個解在角落，另一解在中間，故結構完全不同。

六. 研究心得

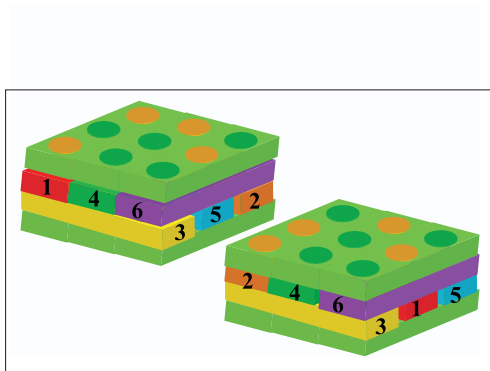
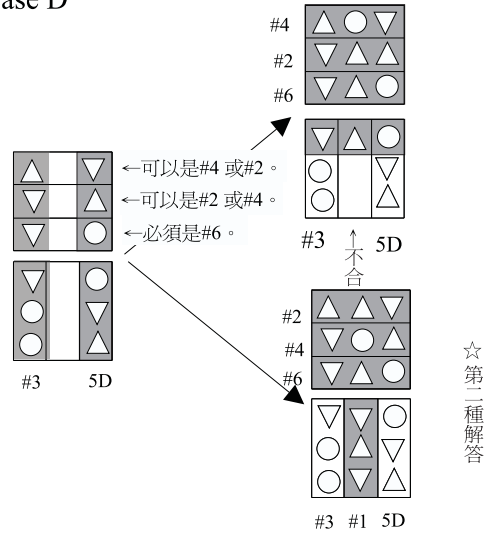
解決了這個看起來不起眼的玩具，讓我們非常興奮。在研究過程中給我們非常寶貴的經驗與啟發：



Case C



Case D



圖九

- (1) 我們在玩一些 puzzles 時，經常是一拿起玩具就盲目的嘗試，且不斷地重複一些曾犯過的錯誤。因此，首先要了解玩具所有配件的結構及特性，並仔細地觀察和分類。
- (2) 尋找簡易、明瞭的記號以表達、記錄操作的過程，否則不易作有系統地分析，也不易表述清楚。
- (3) 只要細心、耐心的分類就可找出所有可能的解答，並不一定要用什麼高深的技巧。

- (4) 能分析出愈多的特性與規律，排除許多不必要的嘗試，可使我們的求解過程愈趨簡單。
- (5) 數學不僅僅只是課堂的演算，它在實際生活上也是非常有用的。在土撥鼠的解題過程中，我們大量用到排列組合、對稱、反證法... 等等數學上的知識與方法。

以上的經驗與啓發對於解其它的 puzzles 也都是非常有用的。

七. 致謝

感謝萬芳高中國中部李淑青老師、北一女中曾昭武老師，耐心地指導我們，並細心地修正文中許多的錯誤。

— 孫君儀就讀於北一女中，葉均承就讀於萬芳高中國中部，陳天任就讀於誠正國中—