Foucault (1819-1868)和 Levi-Civita(1873-1941)[註一]

張海潮

先介紹佛科 (Foucault), 他是法國人, 本來學醫, 後來做實驗物理。早先他與菲索 (Fizeau) 一起測光速。他們用一個多面鏡, 鏡子一直轉, 從定點射出的光束, 碰到鏡子的時候, 如果碰到的這一面剛好是四十五度, 光就會成直角反射到另一個接收點。如果多面鏡轉得不夠快, 一束光射過去看得到, 過一下就看不到了。一直要到這個鏡子轉得非常快的時候, 才會連續地看到這束光。所以由多面鏡的轉速和鏡子的面數, 就可以測光速。佛科和菲索利用這個辦法可以測光速精準到百分之一。(測速是每秒 298000 公里)

1851 年, 佛科在巴黎一間大教堂的屋頂掛了一個 (佛科) 擺, 擺長 67 公尺, 用鋼繩懸一個 28 公斤的鐵球, 以擺動方向的改變來證明地球自轉。如果佛科擺掛在北極, 由於地球就在擺的下面由西向東轉, 因此擺動的方向會順時鐘一直改變, 剛好 24 小時轉一圈。若是在北緯 λ 度的佛科擺, 24 小時只能轉 $\sin\lambda$ 圈。例如在台北的佛科擺, 如果近似北緯二十五度的話, 一天只會轉 0.4 圈。這個比值 $\sin\lambda$ 並不難求, 比方說 Goldstein 的古典力學教本就把它擺在第 142 頁的習題裡。

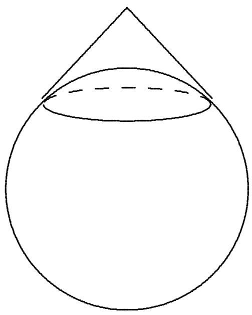
再說到 Levi-Civita, 他是義大利的猶太人, 後來在羅馬大學當教授。大家都知道有名的幾何學家 Ricci, Ricci 就是 Levi-Civita 的老師。由於是猶太人的關係, Levi-Civita 在 1938 年被羅馬大學開除。他最有名的工作叫 "Levi-Civita 平移", 如果我們沿北緯 λ 度做平移的話, 經一圈以後照 Levi-Civita 計算角度會差 $360^\circ \sin\lambda$, 和前段所談到的佛科擺一天的方向差值是一樣的。爲什麼會有這樣的巧合?

我們不準備做物理上的計算, 它牽涉到地球的自轉, 和自轉的角速度, 利用柯里歐力 (Coriolis force) 可以計算出 $\sin\lambda$ 這個比值。[註二]

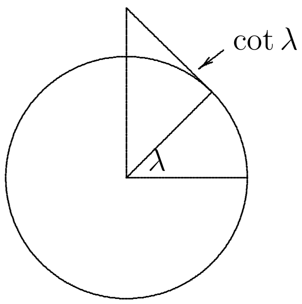
至於 Levi-Civita 在曲面上所定義的平移, 它的定義方法是先談沿一條 (曲面上的) 曲線如何對一個向量場做共變微分 (co-variant differentiation)。原來這個向量場躺在曲面的切平面上, 如果對它做一般的微分, 結果可能不再躺在切平面上, 所謂共變微分是指微分之後再進一步將結果投影回切平面。如果共變微分是零, 就定爲「平行」。如果沿曲線的單位切向量互相平行, 就稱曲線是一條測地線。球面上的測地線是大圓; 至於一般的緯圓, 它的單位切向量經過微分之後, 指向緯圓的圓心, 因此並不與球面垂直, 所以共

變微分並不爲零。更進一步說, 一個向量場沿一條曲線就三度空間看來若是變化率始終保持在曲面的法向量方向的話, 就是平行的。所謂平移一個向量就是將此向量沿曲線做平行移動 [註三]。

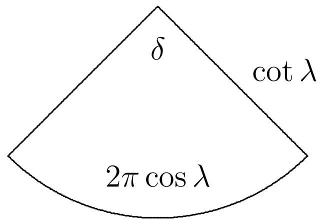
現在我們要在北緯 λ 度沿緯圓來做 (Levi-Civita) 平移, 由於緯圓不是測地線 (大圓), 因此平移一圈以後回來, 會有一個方向差。這個方向差究竟是多少呢? 因爲地球不是平面因此直接計算有點困難。不過, 因爲球的特殊形狀, 我們可以在球面上沿這個緯圓套上一個錐面 (圖一) 讓錐和球沿緯圓相切。因爲沿這個緯圓, 就球面或錐面來看它們有相同的切平面, 因此沿著緯圓在球面上做平移和沿著緯圓在錐面上做平移結果是一樣的。



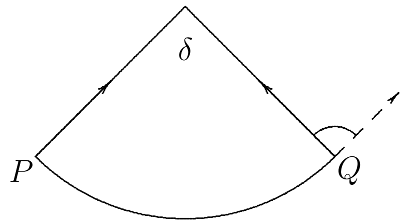
圖(一)



圖(二)



圖(三)



圖(四)

在錐面上看平移就很簡單了, 爲什麼呢? 因爲錐面攤開就是一個平面, 在錐上的平移就等同於在平面上的平移。原因有二: 第一, 錐面攤平時, 沒有拉扯, 因此是所謂保距的對應 (Isometric)。第二, 更重要的是 Levi-Civita 所定義的平移或更基本的共變微分是在保距之下的內稟 (Intrinsic) 性質, 因此可以將錐面攤成平面後來進行平移。[註四]

攤平之後是一個扇形 (圖三), 半徑是 $\cot\lambda$ 而扇形弧長是$2\pi\cos\lambda$, 因此扇形角 δ 是 $2\pi\sin\lambda$。現在在扇形上從左邊的箭頭開始沿圓弧平移到右邊的虛箭頭 (圖四), 虛實兩個箭頭是平行的, 再把攤開的扇形疊回原來的錐面, 注意 P 和 Q 是同一點, 因此虛實兩箭頭的方向差 δ 就是平移一圈以後的方向差, 它等於 $2\pi\sin\lambda$。

這跟佛科擺有什麼關係呢? 我們假設擺動的方向是向量場 V。它在擺的時候地球移了一點點, 所以它就從 $V(t)$ 變成了 $V(t+$

Δt), 但是在這一瞬間原來的切平面也移動了, 重力及擺的裝置要求 $V(t)$ 重回到新的切平面上, 這就是 $V(t+\Delta t)$, 所以 $V(t)$ 到新的切平面的投影是 $V(t+\Delta t)$。今以 $N(t+\Delta t)$ 表新的切平面的法向變, 因此得到 $V(t)=V(t+\Delta t)+\varepsilon N(t+\Delta t)$ (ε 是一個很小的量, $V(t+\Delta t)$ 與 $N(t+\Delta t)$ 垂直)。

如果我們同意佛科擺的裝置顯示 $V(t+\Delta t)-V(t)$ 與切平面垂直, 求微分以後 $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}(V(t+\Delta t)-V(t))$ 也仍然如此, 這就說明了 $V(t)$ 的共變微分是零。亦即佛科擺的擺方向 $V(t)$ 是沿緯圓的一個平移, 因此它經過24小時後的方向差 (根據前段的計算) 是 $360^0\times\sin\lambda$。

可以這麼說, 從佛科擺的裝置透過 Levi-Civita 式的計算, 我們可以以數學「預測」在北緯 λ 處的擺動方向每24小時轉動 $360^\circ\times\sin\lambda$。Levi-Civita 的平移理論是微分幾何中最基本的概念之一, 從這個概念出發而有了所謂的「連絡」(connection), 更進一步, 再求「連絡」的微分就是曲率; 平移可說是從極微小的幾何到大域幾何的橋樑。

佛科擺亦是如此, 在每一分每一秒的擺動中它不得不一再的回到 (地面的) 切平面上, 正是這樣微小變化的積累, 而得到24小時以後的方向差 $360^\circ\times\sin\lambda$。

但是很奇怪的, 早先我的同事王藹農告訴我 Levi-Civita 和佛科擺的關聯, 但是在文獻上卻一直看不到。在力學的書中不提 Levi-Civita, 而在微分幾何的書裡, 也不提佛科。親愛的讀者, 你想, Levi-Civita會受到佛科擺的啓發嗎?

註一: 八十七學年度下學期在東吳大學數學週對學生的演講整理。

註二: 詳細的計算可以看 Arnold「古典力學的數學方法」第132頁。

註三: 也可以參考拙文「球面上的測地線和一個平面幾何的問題」(數學傳播, 23卷2期, 88年6月)。

註四: 這件事可以直接證明如下: 假設平面不經拉扯而映至三度空間, 其坐標函數設爲 $X(u,v)=(x,y,z)$, 則有

$$X_u\cdot X_u=1, \tag{1}$$
$$X_u\cdot X_v=0 \tag{2}$$
$$X_v\cdot X_v=1 \tag{3}$$

將此三式分別對 u 和 v 偏微後

$$\begin{aligned}
&X_{uu}\cdot X_u=0\quad X_{uv}\cdot X_u=0\\
&X_{uu}\cdot X_v+X_u\cdot X_{vu}=0\\
&X_{uv}\cdot X_v+X_u\cdot X_{vv}=0\\
&X_{vu}\cdot X_v=0\quad X_{vv}\cdot X_v=0
\end{aligned}$$

由此可得 X_{uu},X_{uv},X_{vv} 和 X_u, 及 X_v 垂直, 因此和法向量平行; 考慮

$$\begin{aligned}
dX_u&=X_{uu}du+X_{uv}dv\\
dX_v&=X_{vu}du+X_{vv}dv
\end{aligned}$$

因爲 X_{uu},X_{uv} 和 X_{vv}都和法向量平行, 表示 X_u,X_v 這兩組向量的共變微分爲零, 因此是平行的。

回到原來的平面, 這表示 $(1,0)$ 和 $(0,1)$ 這兩組向量是平行的, 亦即平面本身的平移和 Levi-Civita 平移一致的。

—本文作者任教於台灣大學數學系—