微積分教學拾趣

蔡聰明

在微積分的教學中, 筆者遇到了兩個有趣的極限:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \text{ 與 } \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$$

探求它們, 可以將一些美妙的概念與結果, 有機地連結在一起, 非常值得, 於是寫成本文。

一. 緣起

問題: 利用 Riemann 積分的定義求定積分 $\int_1^2 \ln x\,dx$, 這個計算分成四個步驟: (參見圖1)

(i) 分割: 將區間 $[1,2]$ 分割成 n 等分

$$1<1+\frac{1}{n}<\cdots<1+\frac{k}{n}<\cdots<1+\frac{n}{n}=2$$

(ii) 取樣: 取每一小段的右端點當樣本點

$$\xi_k=1+\frac{k}{n},\quad k=1,2,\cdots,n$$

(iii) 求近似和: 即作Riemann 和

$$R_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln(1+\frac{k}{n})$$

(iv) 取極限:

$$\lim_{n\to\infty}R_n=\int_1^2\ln x\,dx \tag{1}$$

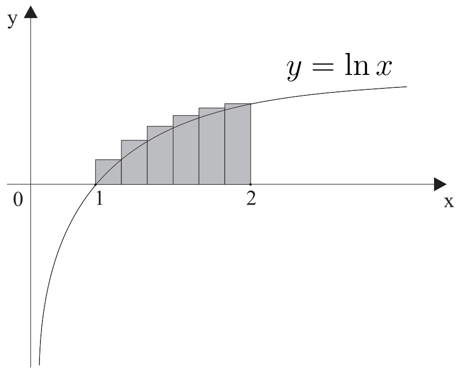

圖1

為了探求極限值 $\lim_{n\to\infty}R_n$, 我們利用對數律將 Riemann 和R_n整理成下形:

$$\begin{aligned}R_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln(1+\frac{k}{n})\\&=\ln\Big[\frac{\sqrt[n]{2n(2n-1)\cdots(n+2)(n+1)}}{n}\Big]\\&=\ln\Big[4\cdot\frac{(\sqrt[2n]{(2n)!}/2n)^2}{\sqrt[n]{n!}/n}\Big]\end{aligned}\tag{2}$$

於是出現了極限:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\tag{3}$$

再利用 Stirling 公式

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\,n^ne^{-n}\tag{4}$$

得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{2\pi n}\,n^ne^{-n})^{1/2}}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[2n]{2n}\,\sqrt[2n]{\pi}}{e} \tag{5}$$

這裡出現了兩個極限: 一個是顯明的

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad (a > 0) \tag{6}$$

另一個是待求的

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \tag{7}$$

習題1: 利用等比分割與積分的定義求算 $\int_1^b \ln x\, dx$。

二. 一題七解

對於極限 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ 的探求, 我們可以先用電算器試算一下: 令$a_n = \sqrt[n]{n}$, 於是

$$\begin{array}{ll} a_1 = 1 & a_2 = 1.414\cdots \\ a_3 = 1.442 & a_4 = 1.414 \\ a_5 = 1.380 & a_6 = 1.348 \\ a_7 = 1.320 & a_8 = 1.297 \\ a_{20} = 1.162 & a_{30} = 1.120 \end{array}$$

似乎是不斷地往 1 接近, 這讓我們對於數列 (a_n) 有了初步的感覺 (feeling)。

進一步, 從理論上來探討。經過簡單的計算:

$$\begin{aligned} &\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1} \\ \Longleftrightarrow\ & n^{n+1} > (n+1)^n \\ \Longleftrightarrow\ & n > (1+\frac{1}{n})^n \end{aligned}$$

最後一式對於 $n = 3, 4, 5, \cdots$ 都成立。因此, $(a_n)_{n\geq 3}$ 是遞減且有下界的數列。根據實數系的完備性知道極限 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ 存在, 它等於多少呢?

下面我們提出七種解法, 都各有巧妙, 值得欣賞。

解法1: 因爲 $(\sqrt[n]{n})_{n\geq 3}$ 遞減且有下界: $\sqrt[n]{n} \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$。所以由實數系的完備性知, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = a$ 存在並且 $a \geq 1$。如果 $a > 1$, 則 $\sqrt[n]{n} > a$, 即 $n > a^n$, 但這是不可能的, 因爲當 n 是夠大時 $a^n > n$, 事實上, $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n} = +\infty$。因此, $a = 1$, 亦即 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$。

解法2: 因爲 $\sqrt[n]{n} \geq 1$, 所以令

$$\sqrt[n]{n} = 1 + v_n$$

於是 $v_n \geq 0$, 由二項式定理得到

$$\begin{aligned} n &= (1+v_n)^n \\ &= 1 + n\cdot v_n + \frac{n(n-1)}{2} v_n^2 \\ &\geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} v_n^2 \end{aligned} \tag{8}$$

從而

$$\sqrt{\frac{n}{2}} \geq v_n \geq 0$$

顯然 $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2}{n}} = 0$, 由夾擠原理 (the squeeze principle) 知

$$\lim_{n\to\infty} v_n = 0$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \tag{9}$$

註: 在 (8) 式中, 若取

$$n \geq 1 + n\cdot v_n$$

則得

$$1 - \frac{1}{n} \geq v_n \geq 0$$

這就無法施展夾擠原理了。

解法3: 利用算幾平均不等式 (Arithmetic - Geometric mean inequality), 將 $\sqrt[n]{n}$ 視爲

$$\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n-2\text{個}},\sqrt{n},\sqrt{n}$$

的幾何平均, 於是

$$\frac{1+1+\cdots+1+\sqrt{n}+\sqrt{n}}{n}\geq\sqrt[n]{n}$$

從而得到

$$1-\frac{2}{n}+\frac{2}{\sqrt{n}}\geq\sqrt[n]{n}\geq 1$$

再由夾擠原理立得 (9) 式。

解法4: 仍然是利用算幾平均不等式, 將 $\sqrt[n]{n}$ 視爲

$$1,\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{4}{3},\cdots,\frac{n}{n-1}$$

的幾何平均, 於是

$$\frac{1+\frac{2}{1}+\frac{3}{2}+\cdots+\frac{n}{n-1}}{n}\geq\sqrt[n]{n}\qquad(10)$$

爲了估算分子的值, 首先我們觀察到

$$\begin{aligned}A_n&=1+\frac{2}{1}+\frac{3}{2}+\cdots+\frac{n}{n-1}\\&=1+(1+1)+(1+\frac{1}{2})+\cdots\\&\quad+(1+\frac{1}{n-1})\\&=n+(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1})\end{aligned}$$

接著有兩條小徑可以走:

(i) 利用定積分概念

$$\begin{aligned}A_n&\leq n+1+\int_1^n\frac{1}{x}\,dx\\&=n+1+\ln n\end{aligned}$$

由 (10) 式得到

$$1+\frac{1}{n}+\frac{\ln n}{n}\geq\sqrt[n]{n}\geq 1\qquad(11)$$

根據 L' Hopital 規則知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\qquad(12)$$

對 (11) 式使用夾擠原理立得 (9) 式。

(ii) 利用 Cauchy 不等式

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\Big)^2\\&\leq\Big(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\frac{1}{(n-1)^2}\Big)\cdot[1^2\cdot(n-1)]\\&<(n-1)\Big(\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots\\&\quad+\frac{1}{(n-2)(n-1)}\Big)\\&=(n-1)\Big(2-\frac{1}{n-1}\Big)\\&<2n\end{aligned}$$

於是由 (10) 式得到

$$1+\frac{\sqrt{2n}}{n}\geq\sqrt[n]{n}\geq 1$$

再由夾擠原理立得 (9) 式。

解法5: 對 $\sqrt[n]{n}$ 取對數得

$$\ln\sqrt[n]{n}=\frac{\ln n}{n}$$

由 (12) 式知

$$\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{n}=0\qquad(13)$$

從而得到 (9) 式。

解法6: 我們要利用下面的結果:

Cesaro 定理: 假設數列 (a_n) 收斂到 a

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a$$

那麼, (i) 用「直到 n 項爲止的 (算術) 平均」代替第n項, 也收斂到 a:
$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a$;

(ii) 如果 (a_n) 爲正項數列, 用幾何平均也可以:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} = a。$$

現在考慮數列

$$1, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \cdots, \frac{n}{n-1}, \cdots$$

它顯然收斂到1, 由上述定理的 (ii) 立得 (9) 式。

解法7: 我們要利用 Bernoulli 不等式:

定理: (Bernoulli, 1689年) 對於 $x \geq -1$ 與 $n = 0, 1, 2, \cdots$, 恆有

$$(1+x)^n \geq 1 + nxn。 \qquad (14)$$

以 $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$ 代入上式, 得到

$$(1+\frac{1}{\sqrt{n}})^n \geq 1 + \sqrt{n} > \sqrt{n}$$

從而

$$(1+\frac{1}{\sqrt{n}})^2 \geq n^{1/n} \geq 1$$

顯然 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{\sqrt{n}})^2 = 1$, 由夾擠原理立得 (9) 式。

習題2: 將所有正有理數列成下表

$$\begin{array}{cccccc}
1 \rightarrow, & 1/2, & 1/3 \rightarrow, & 1/4, & 1/5, & \rightarrow\cdots \\
2, & 2/2, & 2/3, & 2/4, & 2/5, & \cdots \\
3, & 3/2, & 3/3, & 3/4, & 3/5, & \cdots \\
4, & 4/2, & 4/3, & 4/4, & 4/5, & \cdots \\
5, & 5/2, & 5/3, & 5/4, & 5/5, & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

然後按蛇行的方式排成一個數列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

因此, 所有的正有理數是可列的 (countable)。試證極限值 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$。

三. 極限 $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

對於這個極限的探求, 我們提出四種方法。

解法1: 由 (5) 式與 (9) 式立即得到

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e} \qquad (15)$$

解法2: 對於 $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ 取對數, 再取極限, 得到

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \ln \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} &= \lim_{n\to\infty} \Big(\frac{1}{n}\ln n! - \ln n\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln k - \ln n\Big] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Big[\sum_{k=1}^{n}(\ln k - \ln n)\Big] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(\frac{k}{n})
\end{aligned}$$

我們發現這個極限值正好是函數 $f(x) = \ln x$ 在區間 [0,1]上的積分。因此,

$$\lim_{n\to\infty} \ln \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \int_0^1 \ln x\, dx$$

利用瑕積分的分部積分公式與 L'Hopital 規則可算得

$$\int_0^1 \ln x\, dx = -1$$

從而

$$\lim_{n\to\infty} \ln \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = -1$$

由此立得 (15) 式。

習題3: 試證明下列兩式:

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Big[2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)\Big]^{\frac{1}{n}} = \frac{3}{e}$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \ln 2$。

在判別無窮級數的斂散準則中, 有兩個著名的方法: 比值試斂法 (the ratio test) 與根式試斂法 (the root test)。兩者都是由 Cauchy 在1821年首度明白敍述並且加以證明。

因爲我們可以證明: 若 $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r$, 則 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r$, 反之不然; 所以根式試斂法的適用範圍較比值試斂法寬廣。當然, 在應用上比值試斂法較方便。

解法3: 取 $a_n = \frac{n!}{n^n}$, 則

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^{-n} = \frac{1}{e}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{e}$$

解法4: 我們觀察到 $\frac{n^n}{n!}$ 出現在 e^n 的 Taylor 展式中, 因此就由 e^n 切入。因爲

$$\begin{aligned} e^n &= 1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}+\cdots \\ &= 1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} \\ &\quad +\frac{n^n}{n!}\Big[1+\frac{n}{n+1}+\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}+\cdots\Big] \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} e^n &< n\cdot\frac{n^n}{n!} \\ &\quad +\frac{n^n}{n!}\Big[1+\frac{n}{n+1}+(\frac{n}{n+1})^2+\cdots\Big] \\ &= (2n+1)\frac{n^n}{n!} \end{aligned}$$

於是

$$\frac{n!}{n^n} < \frac{2n+1}{e^n}$$

另一方面, 顯然

$$e^n > \frac{n^n}{n!}$$

亦即

$$\frac{1}{e^n} < \frac{n!}{n^n}$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^n} < \frac{n!}{n^n} < \frac{2n+1}{e^n} \qquad (16) \\ \frac{1}{e} < \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} < \frac{\sqrt[n]{2n+1}}{e} \end{aligned}$$

由夾擠原理立得 (15) 式。

注意到, 由 (16) 式可得

$$n^n e^{-n} < n! < (2n+1)n^n e^{-n} \qquad (17)$$

再精進就可以得到 Stirling 公式。另外, 我們也有

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n = e^{-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \\ \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \end{aligned}$$

值得順便一提, 在機率論中, 有一個著名的配對問題 (a matching game): 將 n 封信裝進 n 個信封, 問全部都裝錯的機率是多少?

根據容斥原理 (Inclusion and exclusion principle), 我們可以求得機率為

$$p_n = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

這恰是 Taylor 展式

$$e^{-1} = 1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}+\cdots \tag{18}$$

的首 $n+1$ 項之部分和。因此,

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{e} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n} \doteqdot 0.368$$

因為 (18) 式的級數為絕對收斂, 所以我們可將它改寫成各種形式:

$$\begin{aligned} e^{-1} &= 1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\cdots \\ &= \frac{1}{2!} - (\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}) - (\frac{1}{5!} - \frac{1}{6!}) - \cdots \\ &= \frac{1}{2!} - \frac{3}{4!} - \frac{5}{6!} - \frac{7}{8!} - \cdots \qquad (19) \\ &= (1-1)+(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!})+(\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!})+\cdots \\ &= \frac{0}{1!} + \frac{2}{3!} + \frac{4}{5!} + \frac{6}{7!} + \cdots \qquad (20) \end{aligned}$$

上述的 (19) 與 (20) 兩式, 將奇數與偶數上下分開來, 甚具有規律與美感, 好像是兩顆小珍珠。這可比美於 Leibniz 發現

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

的時候, 讚美說:「上帝喜愛奇數!」Huygens 也說:「這個美妙的公式數學家會永遠銘記在心中。」

四. 取道 $N-L$ 公式

由微積分根本定理的 Newton-Leibniz 公式 (簡稱為 $N-L$ 公式) 我們得知

$$\int_1^2 \ln x\, dx = (x\ln x - x)|_1^2 = 2\ln 2 - 1 \tag{21}$$

再由 (1) 與 (2) 得知

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \ln\Big[4\cdot\frac{(\sqrt[2n]{(2n)!}/2n)^2}{\sqrt[n]{n!}/n}\Big] &= 2\ln 2 - 1 \\ &= \ln(\frac{4}{e}) \qquad (22) \end{aligned}$$

因為

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[2n]{(2n)!}}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

所以比較 (9) 式的兩端就得到

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e} \tag{23}$$

代入 (5) 式得到

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[2n]{2n}\,\sqrt[2n]{\pi}}{e} = \frac{1}{e}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

註: 面對公式 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$, 有人想像力非常豐富: 把根號內的$n$當作「上帝」, 往無窮大跑, 而開 n 次方是「魔鬼」, 將上帝拉回來, 兩股力道平衡於1, 這是現實人間。

五. 一個應用

Stirling 公式告訴我們

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}} = 1 \tag{24}$$

這個式子的證明, 有點深度, 參見下面的習題 3。

不過, 利用公式 (23), 我們可以輕易地得到一個「次好」(the second best) 的結果: 令

$$a_n = \left(\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}}\right)^{1/n}$$

則有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \qquad (25)$$

證明: 對於 a_n 取對數, 得到

$$\ln a_n = \ln\Big(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\Big) - \frac{\ln n}{2n} - \frac{\ln 2\pi}{2n} + 1$$

再取極限, 得到

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \ln a_n &= \lim_{n\to\infty} \ln\Big(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\Big) + 1\\ &= -1 + 1 = 0\end{aligned}$$

從而

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^0 = 1。$$

注意到, 如果由 (25) 式可以推導出 (24) 式, 那麼我們就輕易地證明了 Stirling 公式。可惜, 這只是一個如願想法, 因為由 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = 1$ 不能推導出 $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$。一個現成的反例是 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, 但 $\lim_{n\to\infty} n = +\infty$。

習題 3: 利用下列三個步驟證明 Stirling 公式:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}} = 1$$

(i) 證明:

$$\begin{aligned}\ln n! &= \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n\\ &= (n + \frac{1}{2})\ln n - n + c_n\end{aligned}$$

其中 $\lim_{n\to\infty} c_n = c$ 存在且有限。

(ii) 利用 (i) 證明: $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{n} n^n e^{-n}} = e^c$。

(iii) 利用 Wallis 公式

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots (2n-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}$$

證明: $c = \ln\sqrt{2\pi}$。

六. 結語

兩個小小的極限問題之探尋, 居然牽涉到微積分這麼多重要的概念與結果, 並且讓我們有機會作一次知識的動員, 以及知識的重新連結, 這也算是學習微積分的一種樂趣吧。

微積分涉及無窮 (無窮大、無窮小、無窮地靠近), 落實於取極限的操作, 本來就具有相當的深度與難度。因此, 它是許多大一學生最感頭痛的一門課。如何幫忙他 (她) 們從學習中得到樂趣, 就成為微積分教學的一大挑戰。

參考資料

1. G. H. Hardy, *A course of pure mathematics*, Tenth Edition. Cambridge University Press, 1952.
2. G. Klambauer, *Aspects of calculus*, Springer-Verlag, 1986.
3. L. C. Larson, *Problem - Solving through problems*, Spring - Verlag, 1983.

—本文作者任教於國立台灣大學數學系—