Polya啓發法的哲學面向

洪誌陽

一、前言

George Polya (1887~1985) 除了數學成就爲數學家所熟知之外, 更多的人是透過「如何解題」(1945)、「數學與合情推理」(1954) 及「數學發現」(1962) 三本書來認識他的。他在「數學發現」的序言指出:

> 本書目的有二, 一是理論上的目的, 及進行探索是的研究, 另一個具體而又迫切的實際目的, 則是提高中學數學教師的水平。

Polya 所說的"理論上的目的", 是指對「啓發法」研究的 (一般) 模式介紹及解題心理程序的討論。所謂啓發法, 對 Polya 而言, 是研究「發現」和「發明」的方法和規則, 是「服侍發現」的一種附屬方法, 是他在思考如何具體化解題過程時自然觸及的問題。雖然 Polya 只是爲數學而數學, 不像 Pappus、Decartes、Leibniz、Bolanzo 等人有哲學上的考量, 但是一旦觸及同樣的主題 (方法論), 哲學問題自然湧現。本文的目的, 除了簡單的介紹 Polya 啓發法之外, 也考察 Polya 的「數學方法論」在數學哲學中的面向。

Polya 復興啓發法, 意在數學。他圍繞著「如何解題」這一中心, 展開對數學啓發法的研究。他說:

> 現代啓發法力求了解解題過程, 特別是解題過程中典型有用的心智活動。

啓發推理只是一種暫時的、粗糙的推理, 而不是最後的、嚴格的推理, 它的目的是在發現當前問題的解答。Polya 曾經以下面的類比:

> 方法論：啓發法=策略：實戰策略

來凸顯啓發法在解題過程中的重要性。策略和實戰策略在戰爭的運籌上的關係, 正如同方法論和啓發法在建構數 (科) 學時, 心靈運作的關係一樣。策略對戰爭有一般性的指引, 而實戰策略則是在眞實的作戰中和軍隊的努力有關。類比地, 方法論的目的, 是在確認科學系統建造的大準則, 至於啓發法, 則是去了解當一位解題者面對他的問題時所作的奮鬥。簡單地說,「啓發法」就是問題解決的「實戰策略」。

二、啓發法

Polya 在「如何解題」中, 花了相當大的篇幅來討論第三部份「啓發術小辭典」。事實上, 這一部份也可視爲是「數學與合情推理」和「數學發現」的摘要。Polya沿著學習數學的經驗、研究數學的心得, 發展了一套問題解決的模型。此一模型的主要核心, 是在每個步驟後, 羅列了一些經仔細選擇和排列口語化的「問句」和「提示」。

> ⋯ 如果你能適當地用這些問句和提示來問你自己, 那麼這個表可以幫助你解決你的問題。如果你能適當地的用這些問句和提示來問你的學生, 那麼這個表可以幫助你的學生解決他的問題。

事實上, 整本「如何解題」主要就是在討論這些問句和提示的。就 Polya 所提出的四個解題步驟而言, 並不能超越或優於以前的人所提出的解題模型。但 Polya 的模型影響遠遠超過其他學者, 主因之一, 就是這些有效、恰當而又自然的問句和提示。對其他的模型而言, 步驟的區隔、提出的層次已是主角, 對各層之間多是靜態的描述, 少有動態的指導語。而 Polya 卻是用一連串的問句去堆砌他的四個步驟, 當你冥想一句句由這些字句所串連起來的情境時, 一幅精彩的解題圖畫已呼之欲出。

很明顯地, Polya 正是利用這些經過仔細挑選、精煉後的問句和提示, 來還原自己的解題活動的經驗。事實上, 運用語言在進行思考正是 Polya 研究風格的特徵之一。正如同他對 Hadamard 所說:

> 我相信, 對於一個問題的關鍵性思想總聯繫著一個恰當的詞或句子。這個詞或句子一經出現, 形式即刻明朗。⋯ 它給出了問題的全貌。語言可能略略超前於關鍵性思想, 也可能緊緊跟隨於其後出現, 也許可以大致的說, 它們與關鍵性思想是同時出現的。⋯ 一個好的詞或一個恰當的句子, 以幫助我回憶起那關鍵性思想。⋯ 可以幫助我們把思想固定下來。

在 Polya 心中, 表中的問句及提示, 暗示了現代啓發法的內容。「啓發法」: 能夠指明方向但卻不能保證成功的一般方法, 對 Polya 而言, 它實際上是同等於問題解決的。雖然 Polya 曾說很難對啓發法下定義, 但還是對它研究的範圍做了描述:

> 現代啓發法致力於了解解題的過程, 尤其是在這過程中具有代表性的心智活動 ⋯ 啓發法的研究應該兼顧到邏輯的和心理的背景⋯

這個界定和解題過程是一致的。值得注意的, 是 Polya 同時強調了邏輯和心理的背景。

因此, 想瞭解 Polya 的工作, 最基本的是要認識 Polya 把數學視爲一項「活動」, 是眞實且實際的解題過程。雖然他喜歡收集諺語來描述解題, 但「分析學中的問題和定理」德文版 (1925) 的序言中寫著:

> 能夠描述最有用的思想訓練的一般法則, 我們並不知道。即使這些法則可以被公式化, 它們也可能不

> 是很有用。與其理論上去知道正確的思考法則, 倒不如將它們溶入人的血肉之中, 可以做直接和本能的使用 ······。雖然開始時, 把一些金玉良言當座右銘並沒有害處, 但獨立解具挑戰性問題的經驗, 比起它對讀者的的幫助多太多了。

他也一直強調解題就像游泳, 是一種實際的技術。任何實際技術的獲得都靠模仿和練習。「數學性的參與」在 Polya 的觀念裡是很根本的。這種參與的部份, 就是要積極主動的參與發現, 靠著猜想來享受發現的樂趣。

解題活動對 Polya 而言, 是一項基本的人類行爲, 人們大部分有意識的思維都和解題有關。因此, 以解題爲中心所研究出來的啓發法, 自然有相當的普遍性。事實上, Polya 雖然是以數學的發現或發明爲直接研究的對象, 但他也同時強調這種研究的普遍意義:

> 在研究啓發法時, 我們不能忽視任何一類的問題, 我們應該從處理各類問題的方法中找出共同的特點; 我們應以找出各類問題的普遍性爲目的。

在「數學與合情推理」中, Polya 所舉的例子就不單限於數學, 也包括字謎、法庭及物理等方面的實例。在「數學發現」的第三部份, 更直接以一般解題方法爲研究的對象。這說明了數學啓發法的用途不限於任何題目, 不管是代數或幾何的、數學或非數學的、理論的或實際的。

Polya 很清楚自己並不希求 Descartes 和 Leibniz 所渴望的「萬能方法」, 用以解決一切的問題。他說:

> 不幸的是, 從來就沒有萬能的、完善的解題方法, 沒有能應用於一切情況的精確法則。

但是:

> 各種各樣的規則還是有的, 諸如行爲準則、格言、指南等等。這些都還是有用的。· · ·
> · · · 如果你確實理解並感興趣於一個你已解決的問題, 那麼你就會得到一種寶貴的東西: 一個模式或一個模型, 以後可以模仿它去解決問題。· · · 提出這樣的模式之後, 你便眞地有所發現。

儘管萬能的方法並不存在, 但在實際解題的過程中, 透過回顧的功夫, 可以發展或總結出一般的方法或模式, 這種模式在以後類似的情況下, 就可以達到啓發和指導的作用。

無疑地, Polya 相當清楚 Pappus 與 Descartes 的工作, 在「如何解題」中, Polya 意譯了 Pappus 論分析與綜合, 並利用例子做實際的解說。他做了總結:

> 分析和綜合包含著同樣的對象; 這對象使這人的心思應用到分析上, 使他的體力應用到綜合上; 分析包含於思想之中, 綜合則位於行動中。······分析自然地先來, 綜合接著; 分析是發明, 綜合是實行; 分析是設計一個計畫, 綜合則是實踐這個計畫。

在這裡似乎可以看到, Polya是以一個解題過程的兩個主要部份來理解 Pappus 的分析-綜合法。在「數學發現」評註 8.1 中, 他又對這個主題做了論述。他認爲制定方案時採用倒退的方法, 即“分析法”, 是比較可取的一種辦法; 而向前做, 我們可能會得到一些無法利用的資料。他說:

> 用向前做的方法制定方案的解題者, 可能早就構思了某一思路——這裡所謂的“構思”, 我的意思是隱隱約約, 可能是潛意識的。

由此可以發現 Polya 對分析法的重視。相較於在「如何解題」中對 Pappus 的討論, 這裡的用詞架構都已是 Polya 自己的東西, 已經被整理進一個清晰明確的架構之中。

不僅如此, Polya 在第九章「數學發現」討論輔助問題時, 也把 Pappus 方法中等價問題轉換 (雙向變換) 推廣到了較強或較弱的輔助問題轉換 (單向變換)。我們知道 Pappus 方法中最大的局限是當倒推 (分析) 過程中不可逆時; Polya 則提出了更一般輔助問題的找法。例如令

A. 已知$\cdots$, 求稜錐的體積。

是一個省略部份敍述的問題, 假定根據給出的數據足以確定這個稜錐, 但稜錐的底面和高不在已知數據之中, 這兩個量均不爲已知量。這時我們可以把 A 轉化爲另一個問題:

B. 已知$\cdots$, 求稜錐的底面和高。

如果我們解出了 B, 得到稜錐的底面和高, 自然能解出 A, 反之則不然。Polya 把 A 稱爲較弱的問題, 而將 B 稱爲較強的問題。我們可以看到將問題向較強問題的轉換, 有時更容易解決。而另一方向的變換, 也是有用的, 如:

A' 已知 $\cdots$, 計算未知量 $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ 和 x_n

B' 已知 $\cdots$, 計算未知量 x_1

解問題 B(B') 可以做爲解問題 A(A') 的踏脚石。由此可見, Polya 走得比 Pappus 更遠。

在「數學發現」中, Polya 把 Descartes 模式 (註一) 的討論及推廣當作解題的一個重要方案提出, 當中討論了它在文字題、幾何題、物理題及智力題等的應用。他在看到它的局限性的同時, 也了解到它的威力。Polya 另外就作圖題提出了另一個模式—雙軌模式。首先將問題簡化爲一個點, 然後使每個未知點都變成一條軌跡。然後還有遞歸模式及疊加模式, 這些模式對 Polya 而言和 Descartes 模式沒有什麼不同, 它們都是解題時有用的架構。筆者要強調的是, Pappus 和 Descartes 所主張的都已經被 Polya 消化成他自己的體系; 在此一體系裡, 這些啓發法都有自己的位置, Polya 是以自己的專業數學家經驗爲基礎去統整它們的。另外一個明顯的例子是, 雖然 Polya 在多處提及 Leibniz 及 Bolzano 的主張, 但除了「宣言」式的描述外, 沒有任何有關他們所提方案細節的論述。我們知道他們兩人的切入點在於邏輯, 而對眞實的解題活動, 是很難有什麼助益的, 反倒不如 Leibniz 和 Bolzano 他們所留下的那些雋永的陳述。對 Polya 而言:

> 我想利用我在研究工作和教學工作上的全部經驗, 給讀者以適當的機會, 來作有意義的模仿和進行獨立的工作。

在研究及教學的長期實踐, 正是 Polya 在啓發法的研究能作出傑出貢獻的重要原因。

三、數學家自己的現身說法

在這一方面,Euler 的立場上和 Polya 是一致的。Euler也是以一位數學家的角色出發, 忠實地記錄自己研究的過程, 在他的著作中所出現的合情推理, 如類比、歸納等方法, 在數學家的實際工作中, 更是經常出現、更是重要的。這也是 Polya 討論啓發法的重要組成。Polya 是深深爲 Euler 所吸引的, 他不僅在著作中大量重建了 Euler 的發現, 也明白地指出 Euler 對他自己研究的影響:

> 在我熟悉的所有數學家的著作中, Euler的著作對本書 (「數學與合情推理」) 的研究是最重要的。

要注意的是, 在一個完整的解題過程中, 一般而言既包括了嚴格意義上的發現 (如對於可能的結論在可能的解題方法的猜測), 也包括了所謂的檢證 (如定理的證明及猜想的檢驗等), 亦即所謂的啓發性及證明性兩種程序。Polya 以解題爲中心進行研究, 在一定的程度上就擺脫了關於發現與檢證嚴格區分的思維框架。事實上, 就實際的過程去進行分析, 發現和檢驗的嚴格區分是不可能的。對原始猜想的證明, 往往會導致新的發現, 即新的改進了的猜想; 而在對一個理論做評價時, 也往往必須考慮到導致這一發現的各種因素。這兩種在本世紀初期被嚴格區分 (發現脈絡 V.S. 檢證脈絡), 且不考慮 「發現過程」的科學哲學研究主流中, Polya 是一個特殊的例子。而他之所以採取這樣的研究取向, 主要還是因爲他強烈地意識到發現 (啓發) 過程在實際解題中的重要性, 而這當然也與他鮮明的數學家角色和對數學教育的興趣有直接的關係。

如此一來, Polya 的數學觀便是一個有趣的問題了。他出生的年代正逢數學史上的第三次危機, 數學 (哲學) 家們忙於爲數學尋找堅實的基礎, 提出了三種典範的解決方案。Polya 暴露在這樣的環境下, 自然相當熟悉這些討論。他在「數學發現」評註 14.10 中, 就曾對形式主義的主張做了描述。但卻從未見他出現於論戰的核心之中。最有名的是他和 H.Weyl 在1918 年的打賭。Weyl 是直觀主義者, 他預測在二十年裡, Polya 和其他頂尖的數學家將會承認當代數學中有許多概念, 譬如數、集合可數性等等, 都是相當模糊, 而且會認爲“判斷包含這些概念的定理的對錯, 和宣稱黑格爾的自然哲學是眞實的一樣”。例如:

A. 每一個有界的數集合都有上界。

B. 每一個數的無限集合都有一個可數子集。

這兩個定理將會被視爲假的。如果其中之一被視爲眞, 則必是數學有重大的發展, 而使得現代數學已和當代的完全不同。Polya 不贊成這個預測。

打賭的結果無疑地是 Polya 贏了。在接受 Alexanderson 訪問時, 談到他是否爲一個打賭者時, Polya 說:

> 我不是一位打賭的人, 相反的, 我非常的小心。

Polya 心中的這份肯定從何處來? 是因他持有其他學派的觀點? 還是有其他的原因? 筆者認爲, Polya 的堅持並不來自三大學派中的任何一個。事實上, 正如 I. Lakatos 所說的形式、邏輯及直觀三種典範是嘗試把數學重建爲歐幾里得式 (Euclidean) 的數學, 而 Polya 的立場卻是以一個專業數學家的角度出發, 這是歐幾里得式的數學不可能含攝進去的。其次, 這些主張的提出有他們相對要解決的問題— 數學基礎何在? 但如 Russell 和 Whitehead 並不是眞正專業的數學家, 而 Hilbert 做「通常的」(非基礎的) 數學研究時, 他並不覺得必須在他的工作中處理公式而不處理意義; Brouwer 在拓撲學的研究中也沒有爲他的直覺主義信條做出犧牲。對他們來說, 通常的數學實踐和他們對數學基礎主張的分離, 似乎不需要解釋或辯護。這點似乎顯示出, 大部分的數學家還是依照數學固有的方式在實踐數學, 很少有人因三種學派的主張而改變了他們做數學研究的方法。正是這樣的立場, 讓 Polya 擁有前面所說的信心。

若我們把「數學基礎」的解決看成數學上的一個問題, 顯然 Polya 的興趣不在這裡, 他除了鍾情於解題式的數學研究之外, 同時也關注解題本身的研究。而這些關懷的基本立場, 都出自一個數學家實務經驗 (mathematical practice)。數學的本質是什麼? 數學的對象是什麼? 數學的眞理性是什麼? 這些問題, 對一位正在工作中的數學家而言, 似乎沒有想像中那麼有意義。在「數學經驗」中, Davis 和 Hersh 很清楚的描述了正在工作中的數學家的哲學困境: 他們平時是柏拉圖主義者, 而在週末則是形式主義者。就是說, 當他們在做數學工作時, 他們確信是在處理一個客觀實體、在力圖確定這實體的性質。但在這之後, 當被要求對這實體給予哲學說明時, 他們發現最容易的辦法是假裝不相信它的存在。工作中的數學家所 (需要) 抱持的數學哲學觀點,「簡單」地令人驚訝! 數學的重要性是無庸置疑的, 就 Polya 來說, 如何使數學發明和發現的原理具體化, 比回答上面那些問題更重要、更有意義得多。

四、Polya 的數學觀

讓我們回到最先的問題來:Polya 的數學觀點是什麼? 他並沒有從哲學上抽象地討論這個問題, 但他在研究解題的方法中, 注意到了數學經常被忽略的另一個面向:

> 數學有兩個面向: 他一方面是歐幾里得式的嚴格的數學, 另一方面卻又是別的什麼東西。歐氏方法所表現的數學是一種系統的、演繹的科學; 但創造中的數學卻是實驗的、歸納的科學。

在歷史上, 對數學做後設討論時, 常將它視爲一種「產品」(product), 這種最後階段的數

學所呈現出來的「形象」大都是靜態的、嚴格的且確定的。Polya 卻以數學家及關懷數學教育的角色, 特別關心數學理論、概念以及定理的創生過程。數學成爲一個動態的「過程」, 生動、迷人而且不再冰冷。他所強調的並不是新的東西, 只是這種發明 (現) 中的數學, 很少有人將它表現在學生、教師或一般人面前, 但它卻是實際數學實務中極其重要、不可或缺的部份。Polya 本人對這兩個面向在數學研究的重要性都相當肯定, 他在「如何解題」及「數學發現」中, 都花了相當的篇幅在討論完全 (嚴格) 證明的重要性及教學, 但他的興趣多放在數學的直覺性和創造性這邊。他肯定了觀察、實驗、歸納、類比、假設、猜測等方法在數學研究中的重要性, 強調數學來源於實際的觀察, 不僅概念、定理、公式是先由觀察資料中歸納出來的, 就連證明的方法也是如此。他把研究工作中對圖形、數及式子的觀察、變換與計算看成是一種實驗, 還非常強調數學研究應當從天文學、力學、光學、化學以及生物學、醫學等學科中吸取營養。

Polya 的這種觀點是相當實證 (經驗) 的, 他強調的是數學家在做數學時是什麼樣子, 他要學生去眞正經歷數學創生、完善的過程, 透過眞正的實踐來學習數學、了解數學。他的思考基礎是自己長期研究的親身經驗。由此出發, 他一再主張認識數學的最佳途徑是看著它誕生; 他要人 (學生) 看到數學建構時的鷹架, 而不是單純的成品。我們在他的著作中裡可以很清楚地看到這個取向。在「數學發現」中對思維過程的討論就是一個相當典型的例子, 透過整個流程的呈現, Polya 成功地描繪了解題 (數學) 實際思考過程的全貌。他在討論幾何例題時, 常用幾個連續的圖形來展現整個思考的步驟, 也是一個極佳的例證。

筆者認爲 Polya 無意介入數學哲學的討論。但他的工作確有相當的前瞻性。他強調的數學實務, 爲數學的哲學性了解提供了重要的資源。他討論的數學發現和發展的問題, 對數學哲學的內容來說是基本的。他認爲數學和科學有基本的相似性, 對數學哲學的討論也有所啓發。而對教育學上的考量, 似乎也是數學哲學裡一個重要的主題。Tymoczko 認爲 Polya 的創新在數學哲學的發展中佔有過渡時期的特徵, 他爲擬經驗論 (quasi-empricisim) 舖了路, 卻沒有走到完成的最後一步。這當然是因爲 Polya 並不是由於哲學的考量才提出這樣的主張。而且, Polya 工作的這些啓示, 在早期並沒有受到數學哲學家的注意。因爲在三大學派這些基礎論者的眼裡, Polya 只是討論了數學證明的發展, 而這個範圍是數學社會學、數學史和數學教育所關注的問題, 不是數學哲學感興趣的主題。只有等到擬經驗論者 Lakatos 才使 Polya 的工作爲數學哲學界所重視。Tymoczko 在 1986年編的「數學哲學中的新方向」中, 就引錄了 Polya 的兩篇文章作爲基礎過渡時期的「插曲」。事實上, 近代數學哲學研究的一個最大特色, 就是加入了「數學家社群」這個概念的討論, 著眼於社群中的數學理論。而 Polya 無疑是這方向考慮的先驅。雖然他是以個人的經驗出發, 但他把數學家眞正「做數學」的情境帶入討論, 在當時是唯一的例外。前面曾

經提及數學家回答及眞正在做數學時所抱持的數學觀是不一致的, 這是一件很奇怪的現象。數學哲學的任務應是闡明數學家們正在做什麼, 亦即研究人員、教師和使用數學者, 對他們所從事工作的哲學見解。Polya 的工作, 無疑是踏出了消解這種分歧的重要一步。

Polya的重要承繼者是數 (科) 學哲學家 Lakatos, 他在「數學方法論」上的工作, 除了是把 K. Popper 的證僞主義用在數學哲學的討論上之外, 他所研究的主題及內容, 實際上正是 Polya 工作哲學意涵的延伸。Lakatos 所謂的「數學發現的邏輯」, 即證明與反駁的邏輯。在數 (科) 學研究的過程中, 發現與確證常是密切相關、相互滲透的。Popper 從邏輯的角度探討科學方法論, 區分發明及確證兩個部份, 並言科學發現的邏輯探討的是「確證」這個脈絡的東西。雖然他以「證僞」的方法來替代「證實」, 但仍屬於邏輯實證論的基本觀點。不過 Popper 一方面斷言並不存在發現的邏輯; 另一方面他所倡導的“猜想與反駁”的方法卻可視爲一種發現的「邏輯」。Lakatos意識到了 Popper 這個困境, 認爲只要採取 Polya 在數學方法論上的基本立場即可擺脫這個困境, 也就是說: 儘管並不存在可以用以解決一切問題的萬能方法或絕對可靠的方法, 但仍然存在有數 (科) 學發現的邏輯, 而這就是 Polya 所謂的「數學啓發法」。

我們在這裡不詳細的介紹 Lakatos 的研究, 只是指出: Polya的啓發法爲 Lakatos 提供了適當的基點, 而且他對合情 (啓發) 推理的研究, 也對 Lakatos 有相當的啓發。事實上, 正是 Polya 的工作清楚的表現了數學發現並非僅僅屬於心理學的範圍, 而是一個可以進行理性分析的領域。如 Polya 在「數學發現」中利用邏輯的形式來表示合情推理的類型, 精彩的呈現出「非形式」範疇中的規則來。Lakatos 討論的, 正是非形式數學的過程, 而向數學形式主義挑戰。非形式、擬經驗的數學的生長, 靠的不是單純地去增加無可懷疑的定理的數目, 而是依靠思辨和批判、依靠證明和反駁的邏輯不斷地去改進「猜想」。正是這樣的過程中, 理性才得以展現出來。

五、結語

Polya 的工作對數學哲學的影響, 是殆無疑義的。前面已經提過, 他在基礎爭論的時期開始他的工作, 算是當時潮流下的一個特例, 他的工作中清楚的表示出數學的發現並非僅僅屬於心理學的範疇, 而是一個可以進行理性分析的的領域。在“期待一種萬能方法可以有效的從事發明創造, 或成功的解決一切問題” 及“根本不存在任何眞正意義的發現的方法”這兩種極端想法之間, Polya的工作, 更顯現出它所蘊含的重要性。對 Polya 而言, 數學方法論和數學教育學是糾纏在一起的。他認爲要給學生的是對數學專業的感覺, 他們對數學的經驗應該和數學家做數學的方法一致。數學哲學家現在已漸接受 Polya 對數學的觀點: 數學作爲一種實務, 學習數學和做數學的經驗界定數學哲學的主題。實際上, 這點思考上的啓迪, 正是 Polya 對數學哲學界最大的貢獻。

註一: 所謂的 Descartes 模式, 指的是他在「法則」中所提出解題的通用方法。簡單

而言, 分爲三個步驟。第一, 將任何種類的問題化歸爲數學問題; 第二, 將將任何種類的數學問題化歸爲代數問題; 第三, 將任何代數問題化歸爲單個方程的求解。

参考資料:

1. 中國社會科學院哲學研究所邏輯研究室編 1988,「數理哲學譯文集」, 北京: 商務印書館。
2. 王前 1991,「數學哲學引論」, 遼寧教育出版社。
3. 王順義 1984, "拉卡托斯的數學教育思想," 「自然科學史、自然辨證法文集, 第一輯」, 上海: 華東師範大學出版社。
4. 周小虎 1990, "論拉卡托斯的「無窮回歸與數學基礎」," 南京大學學報: 哲學·人文·社科版, 161-168。
5. 郭貴春 1990, "數學方法論的意義," 社會科學研究, 26-34。
6. 張祖貴 1989, "數學: 喪失了眞理嗎?, "自然辨證法, 137-138。
7. 張景中 1990,「數學與哲學」, 湖南教育出版社。
8. 鄭東皋、孫小禮、張祖貴編 1990,「數學與文化」, 北京: 北京大學出版社。
9. 鄭毓信 1983, "評 Polya 的代表性著作「數學發現」, "數學研究與評論, Vol.3, No.1, 213-216。
10. 鄭毓信 1989, "從數學發現的邏輯到科學研究綱領方法論, "南京大學學報: 哲學人文社科版, 61-70。
11. 鄭毓信 1990,「數學哲學新論」, 江蘇教育出版社。
12. 鄭毓信 1992, "數學哲學數學教育和數學教育哲學, "哲學與文化, 19卷11期, 876-884。
13. Davis, P. J. and R. Hersh 1990,「數學經驗」, 江蘇教育出版社。
14. Descartes, R. 1989,「方法導論·沈思錄」, 臺北: 志文出版社。
15. Hadamard, J. 1992,「數學領域中的發明心理學」, 江蘇教育出版社。
16. Kneal, W. and M. Kneale 1985,「邏輯學的發展」, 北京: 商務印書館。
17. Lakatos, I. 1987,「證明與反駁」, 上海: 上海譯文。
18. Polya, G. 1989,「如何解題」, 臺北: 九章出版社。
19. Polya, G. 1989,「數學發現」, 臺北: 九章出版社。
20. Polya, G. 1992,「數學與猜想」, 臺北: 九章出版社。
21. Ross, D. 1987,「萊布尼茨」, 中國社會科學出版社。
22. Alexanderson, G. L. 1985, "George Polya,"「Mathematical People; Profiles and Interviews」, Boston: Birkhauser, 246-253.
23. Bolzano, Bernard 1950,「Paradoxes of the Infinite」, Yale University Press.
24. Ernest, P. 1991,「The Philosophy of Mathematics Education」, The Falmer Press.
25. Heath, T. L. 1956a,「The Thirteen Book of Euclid's Element」, Vol.1, New York: Dover.
26. Heath, T. L. 1956b,「The Thirteen Book of Euclid's Element」, Vol.3, New York: Dover.
27. Koetsier, T. 1991,「Lakatos Philosophy of Mathematics: A History Approach」, North-Holland.
28. Lakatos, I. 1980,「Mathematics, Science and Epistemology」, London: Cambridge University Press.
29. Polya, G. 1941, "Heuristic Reasoning And The Theory of Probability",

American Mathematical Monthly, 450-465.

30. Polya, G. 1959, “Heuristic Reasoning And The Theory of Numbers”, American Mathematical Monthly, 375-384.
31. Polya, G.、G. Szego, 1972「Problems and Theorems in Analysis Volume I」, Springer - Verlag. Combinational Theory, Vol1,1-2.
32. Polya, G. 1977b,「Mathematical Methods in Science」, 新竹: 凡異出版社。
33. Polya, G. 1981,「Mathematical Discovery」, New York: John Wiley、Sons.
34. Polya, G. 1987,「Collected Papers, Volume V」, Cambridge: MIT. Press.
35. Polya, G. 1988,「How to Solve it」, Princeton: Princetion University Press.
36. Polya, G. 1990a,「Mathematics and Plausible Reasoning Vol.1」, Princetion: Princetion University Press.
37. Polya, G. 1990b,「Mathematics and Plausible Reasoning Vol.2」, Princetion: Princetion University Press.

—本文作者任教於竹北高中—