圓錐截痕與二次曲線:
一個數學老師的無聊之舉

鄭英豪

致謝: 承蒙台灣師大數學系教授洪萬生博士指導修正, 本文方得以完成, 特此致謝。

一. 緣起

圓錐截痕 [註] (或叫做圓錐曲線、二次曲線) 在中學數學課程中具有很重要的地位。從數學思維的角度來說, 它是幾何問題完全轉換爲代數方法處理的代表作。從起源來說, 它是數學知識體系中極少數在遠古時期就已經定型完備的專題, 除了它以外, 只有平面幾何學、比例論 (皆完成於 Euclid 編著*Elements* 時) 有此地位。從知識完整性來說, 以圓錐切割或二次方程就可以完全涵蓋所有的研究對象也是數學知識中的少數。從數學結構來說, 此專題的探討向下連接算術、代數、幾何等基本知識, 向外接觸微積分, 向上發展現代分析理論基礎。總之, 其獨特性不在話下。

然而, 無論從學或教來看, 此專題都有一些困難之處, 例如: 到底它是當成幾何還是代數? 學生爲什麼非得學不可? 如果我們希望學生學得有感覺, 至少教師自己得先有點感覺, 那麼, 我們對這個專題的感覺到底是什麼? 我們到底學了什麼? 教了什麼?

二. 教與學的圓錐截痕

在數學課本裡, 教學內容其實大同小異, 一般都會包含下面這些:

(一) 長相 (如圖一)

(二) 名稱與定義

圓	橢圓	拋物線	雙曲線
circle	ellipse	parabola	hyperbola
$PC=r$	$PF_1+PF_2=2a$	$PF=PL$	$\lvert PF_1-PF_2\rvert=2a$

(三) 圖形元素與長度關係

		中心		中心
圓心		頂點×4	頂點×1	頂點×2
		焦點$c \times 2$	焦點$c \times 1$	焦點$c \times 2$
軸、線		長a、短b軸	對稱軸	貫a、共軛b軸
			準線	漸近線×2
長度		$a^2 = b^2 + c^2$		$c^2 = a^2 + b^2$

(四) 光學性質 (如圖二)

(五) 標準方程式

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad y^2 = 4cx \qquad \frac{x^2}{a^1} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(六) 圖形與元素的關係 (如圖三)

三. 學生的問題與我的問題

一個教師當然要面對學生的提問, 有三個問題是令我難以招架的:

· 爲什麼這些東西要放在一起談?
· 爲什麼按照那個順序談?
· 這些東西在哪裡?

「爲什麼這些東西要放在一起談?」, 在章節名稱上課本通常就會主張它們都是從圓錐上切出來的, 或者都是 $ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = 0$ 所表現。但是這樣的安排顯然不能讓學生認同, 因此我要學生把對圓錐截痕的所知列出來, 從這些項目中把覺得一樣的作上記號, 學生討論的結果列表如下:

		圓	橢圓	拋物線	雙曲線
長相	封閉	●	●		
	開放			●	●
名稱	中文	●	●		
	英文			●	●
定義	軌跡		●		●
點	中心	●	●	●	
	頂點		●		●
	雙焦		●		●
線	兩軸		●		●
錐截	單葉	●	●	●	
	截斷	●	●		
	截開			●	●

再計算它們兩兩之間「覺得一樣」的量就是:

圓	5	2	0
	橢圓	2	4
		拋物線	2
			雙曲線

看到沒? 拋物線是孤立的, 圓和橢圓是一族的, 而橢圓和雙曲線是一族的, 但是圓和雙曲線一點相同處都沒有!

提出「爲什麼按照那個順序談?」的學生, 是個很喜歡自我挑戰的孩子, 他自己在課本裡搞了半天, 結果發現不知道的比知道的多很多。如果圓錐切截是起源, 那定義是怎麼來的? 定義中的點與線與距都是圓錐上沒有的, 誰搞出來的? 如何放在平面上討論? 在坐標還沒引進的遠古時期, 一個圖形的特徵如何描述? 又按切面夾角的順序應該是圓、橢圓、拋物線、雙曲線, 而爲什麼課本順序不是如此? 如果是按方程式難易程度, 那也該是拋物線放第一個, 爲什麼是圓?

說眞的, 我不知道, 打從我第一回看到這些東西它們就是這樣的順序!

至於提問「這些東西在哪裡?」的學生, 是個相信數學是被創造發明出來的孩子, 但是, 發明總需要靈感吧? 誰會在靈感中想到要在圓錐上切切看呢? 古希臘人常劈紅蘿蔔和竹筍嗎? 它們看得到行星軌道是橢圓嗎? 丟一顆石頭的路徑可以在圓錐上切出來嗎?

被學生問倒不丟臉, 但被學生問到發現自己一點感覺都沒有的時候, 眞是無地自容。雖然每個人對感覺的感覺不一樣, 有人對「實體」有感覺, 有人對「有用」有感覺, 有人對「符號的相近性」有感覺。至於我自己, 除了上面這些問題, 我還想要知道:

圓錐截痕到底是怎麼一回事?

是哪些人用了哪些方法對哪些問題的探索而演變?

爲什麼他們要去探究圓錐截痕?

四. 圓錐截痕的「數學性」發展

回答那些問題免不了得去翻翻數學史, 看看這個專題是如何演變的, 也看看有哪些有趣的想法和方法。

大體而言, 圓錐截痕的研究在 Apollonius $(-262 \sim -190)$ 時已完成, 後來的人在此面向上沒什麼新的貢獻, 而是以不同的觀點重新詮釋古典幾何的結果。因此, 論及起源, 應該追溯 Apollonius 之前的發展。

一種說法是: 解倍立方問題 (相當於尺規作 $\sqrt[3]{2}$ 的問題) 可能是整個發展的起點。爲此,Hippocrates(公元前5世紀) 提出連續比例中項的想法。

Hippocrates認爲若能做出連續比例中項 $a:x=x:y=y:2a$, 由比例運算 $a^3:x^3=(a:x)^3=(a:x)(x:y)(y:2a)=a:2a=1:2$, x 代表的就是2的正立方根。這件事用現在 (2500年後) 的想法來說, 就是找出 $x^2=ay$ 與 $y^2=2ax$ 的交點, 這是兩拋物線交點, 很可惜當時並沒有能力作拋物線圖形 (尺規作圖當然作不出來)。

至於希臘人對比例的重視, 則可歸結到他們對數、形的哲學觀點。在古希臘人心目中, 直線與圓形 (幾何形體) 是萬物的元素,

而數 (自然數) 是萬物的語言, 數與數之間必然有某種形的意義, 也就是說形與數都可歸於幾何方法來探討 (這一點可以在 *Elements* 書中看到)。

在自然數的世界裡, 以1(單位) 爲基準作其他數是很容易的, 只需不斷延長1就可以 (打個岔, 古希臘人是不處理無限的, 直線其實是線段, 可以在作圖時延伸到需要的地方, 但絕不是無限延伸。對於無限的恐懼一般認爲與 Zeno 的四個悖論所造成的混亂有關), 但是在沒有分數和有理數的世界裡, 他們用比例關係來表現這些幾何量, 如下圖四, 未標號線段分別爲a、b、1與、1、b、a之第四比例項與a、b 之比例中項, 也就是a乘b、a分之b、a乘b的正平方根。

上述有關比例中項的作圖, 看來都涉及圓形, 或許這就可以讓 Menaechmus(公元前4世紀) 滑頭多了, 既然連續的拋物線作不出來, 但一點一點描總可以, 多描幾點也就有個大概了 (如圖五)。利用 $2a$ 和 x 作直徑的半圓上的比例中項可以描出一個拋物線上的點, 不同的幾個 x 作下來, 就差不多是個拋物線 $y^2 = 2ax$ 了。

當然這都不是合法的, 那個交點也只是想像的, 拋物線是個奇妙的東西, 如果不好好款待它, 這個問題永遠無解, 那麼拋物線究竟是怎樣的東西呢?

一種看法是: 不同的 a 會做出不同開口大小的拋物線, 把這些拋物線想像成一片一片有點厚度的東西再疊起來就像個錐面。或者, 將拋物線想像成某個立體的光照投影, 像日晷那樣, 不同的照射點就會有不同開口的拋物線, 這樣的立體就是圓錐, 於是開啓了關於圓錐的探討。

另一種說法認爲圓錐對古希臘幾何學者來說並不陌生, 例如 Euclid(公元前4世紀) 稱一個直角三角形以一股爲軸旋轉, 斜邊轉出而成的曲面叫圓錐 (如圖六), 用平面以垂直錐面 (直角三角形的斜邊) 的方式切截, 可以在錐面上切截出曲線。Menaechmus 證實直 (right) 頂角圓錐 (頂角45度的直角三角形轉出) 切出的形狀滿足上段的方程式, 也就是說那是拋物線。而銳頂角錐 (頂角小於45度的直角三角形轉出) 則會切出一個像鵝蛋的形狀 (橢圓), 鈍頂角錐 (頂角大於45度的直角三角形轉出) 切出一葉像拋物線的曲線 (雙曲線的一葉)。這些圖形分別爲正、銳、鈍頂角錐截痕, Archimedes($-287 \sim -221$) 便以此命名, 這是第一次的命名。可以說拋物線、橢圓、雙曲線的形狀都出現了。請注意: 此時的圓錐是有限高度的單體正圓錐。

如圖七, 錐面被平面正切截, 第一觸點 A 至其錐的對面 B 就是此截痕的軸, 取截痕上任一點 P 做垂線交軸於 S, 截痕的圖形特徵以 AS 與 PS 的關係來刻畫。

過 P 作一個與錐的旋轉軸垂直的平面, 截錐面成一圓, MN 爲此圓順 AB 方向的直徑。由於 P 與 S 同高, 因此恰與 MN 正交, 即 PS 爲 MS 與 NS 的比例中項, 也就是說 $PS^2 = MS \cdot NS$ 恆成立。

當錐頂角爲直角時 (如圖八 (1)), 作 AD 平行 MN 交錐軸於 Z (恰爲中點), 設 AB 交錐軸於 W。由 ASM、AWV 相似得 $MS : AS = AW : AZ$; 而 $ADNS$

爲平行四邊形, $NS=AD=2AZ$; 因此得 $PS^2(=MS\cdot NS)=2AW\cdot AS$。其中 AW 與 P 無關, 若令 $2AW$ 爲 d, 則得 $PS^2=dAS$。

當錐頂角爲銳角與鈍角時 (如圖八 (2)、(3)), 則加作 D 與 N 對錐軸的平行線交 AB 於 Q、R。由AMS、NRS、DQA 相似與 NBS、DBA 相似可得 $MS:RS=AS:NS$、RS: $QA=NS:DA=BS:BA$。因此 $PS^2(=MS\cdot NS=AS\cdot RS)=AS\cdot BS\cdot 2AW/AB$。
其中 AB 就是軸的長, AS 和 BS 是正弦垂足的分軸兩段長, 而 $2AW$ 依然是一個定長 d (Archimedes 認爲 d 是很重要的一個量, 以今天的語言來說, 它就是正焦弦長)。很顯然地, 此時橢圓和雙曲線的特徵是一樣的, 大概到公元前300年左右, 數學家才將 BS 用 $AB\pm AS$ 加以區分 (橢圓、雙曲線), 而兩者爲 $PS^2=AS(d\pm dAS/AB)$。

值得注意的是: 若以 y 表 PS、x 表 AS、$2a$ 表軸長, 則上述三種曲線可分別表示爲:

$$y^2=dx,\quad y^2=x(d+\frac{d}{2a}x),$$
$$y^2=x(d-\frac{d}{2a}x)$$

跟現在大家熟悉的式子一模一樣。

Apollonius大概是將圓錐截痕整理並加以系統化的人物。一般相信在他 Conic-Sections 中整理了所有古希臘有關圓錐截痕的作品, 並加入自己的創見。正如同 Euclid 對平面幾何和比例論的處理一樣, 圓錐截痕被他整體完成, 後人沒有太多突破的空間, 直到今天我們所學的都還是當年那一套東西。

首先, Apollonius 所定義的圓錐就是一種突破, 圓錐指的是一定點與不共面圓相連接, 連線兩向延伸, 繞圓轉一圈的曲面叫圓錐。在這個定義中, 定點不一定恰在底圓的中心垂線上, 同時, 圓錐是兩支的。而所謂圓錐截痕, 指的是一平面任意切截圓錐面的曲線。他認爲平行面切出來的曲線都相似, 因此只要在錐面上定一點, 以不同角度切截就可以生出所有圓錐截痕。這樣做將圓錐截痕的起源統整在一個錐面上, 不必去處理不同的曲線由不同的錐面切出的麻煩。至於對各種切截出來的曲線特徵, 大概與前人相同, 並使用面積比較的方式來稱呼。

同樣考慮 AB、P、S, Apollonius 找到了一段與 P 無關的長度 d, 將 PS^2 想成一個正方形面積, 把這個面積轉換成以 AS 爲一邊的矩形, 看看另一邊與 d 的關係 (如圖九), 並分別以「相等」、「不足」、「超過」來命名, 也就是現在英文中的 parabola、ellipse、hyperbola, 完成了圓錐截痕的命名工作。

Apollonius對有心曲線 (橢圓與雙曲線) 的想法是一致的。如圖十, 此時平面會切斷錐面, 有兩個交點 (形成軸) AA', 假設一個底圓, 錐頂 V、AA'、與此圓直徑 BC 共平面, 剖開成平面,AA' (可延長) 交 BC 於 T, 作 VF 與 AA' 平行。相同於前人的 $PS^2=MS\cdot NS$, 也同樣要找 PS 與 AS 的比例關係。

在圖十中利用三角形相似的性質, 由 $AMS\sim VBF$ 可知 $AS:VF=MS:$

BF, 得 $MS = AS \cdot BF/VF$。又由 $A'SN \sim VFC$ 可知 $A'S : VF = NS : CF$, 得 $NS = A'S \cdot CF/VF$, 因此得 $PS^2 (= MS \cdot NS) = AS \cdot A'S (BF \cdot CF/VF^2)$。取 $d = AA' \cdot BF \cdot CF/VF^2$ 為定值, 而在橢圓和雙曲線中分別有 $A'S = AA' \pm AS$, 因此與之前的結果相同, 而 d 就是正焦弦長。

在拋物線中, 如圖十一, $AMS \sim VBC \sim VAQ$, 因此 $MS : AS = BC : VC$, 又 $NS = QA$, 故 $NS : BC = VA : VB$, 因此可以得到 $PS^2 = AS \cdot (VA \cdot BC^2/VB \cdot VC)$, 這裡 $VA \cdot BC^2/VB \cdot VC$ 是定長, 也就是 d。要注意的是 Apollonius 的 VBC 不一定是等腰三角形。

Apollonius的描述中切截平面一定要和底圓相交, 因此不含圓在內。如果要用同樣的方式來看圓, 那麼 d 只能說是圓的直徑, 根據圖十二, 正方形等面積變換矩形的另一邊就是直徑的右段, 永遠比直徑小, 圓和橢圓是同一個東西, 但是看起來不一樣吧?

Apollonius還做了另外很多事, 包括焦點、橢圓和雙曲線的軌跡、雙曲線的漸進線、切線以及它們的光學性質, 可以說目前我們所知的幾何性質都一覽無遺。當然, 圓錐截痕也就成為過去式了, 唯一大家還感興趣的是準線, Dioles(與 Apollonius 同時) 在拋物線上補上這個觀念, 而500年之後 Pappus 提出完整圓錐截痕的離心率性質, 不過, 他說 Euclid 老早就提過了。

接下來的發展基本上空白了一千多年, 中世紀歐洲沒有什麼數學發展。圓錐截痕的首次甦醒在文藝復興, Monte(1579) 直接以軌跡定義這些曲線, 當然, 這也代表了圓錐截痕完全被視為平面曲線的時代來臨, 此後大家關心的只是一族的平面曲線。比較特別的是 Kepler(1604) 將雙曲線一焦點固定後沿著軸移動另一焦點的變動觀點, 使得圓錐曲線可以從雙曲線轉為拋物線再轉為橢圓然後圓, 這一方面反映射影觀點的萌芽, 一方面則把圓納入此族曲線中, 這是現今教科書裡圓錐曲線族的第一次成形。而 Kepler(1609)、Galileo(1640) 在自然律動中發現圓錐截痕的規律 (行星軌道與拋體路徑), 讓這個沈寂的家族再度受到重視—科學家可藉數學操控天地。Wallis(1655) 引用尚未完全成熟的座標幾何, 重新以計算的方式再現圓錐截痕, 使圓錐曲線成為可逐點計算的東西, 於是行星軌道可推算、彈道可計算, 此後二次曲線成為自然科學的工具, 本身並沒有特別的發展。Dandelin(1822) 再回頭試圖將圓錐截痕轉化為二次曲線的路程以溯源的數學思維合理化, 直接從圓錐截痕上找到直接連接平面軌跡的路徑, 他的作品是如今多數30歲以上受台灣教育的人中學時的最大惡夢— 我們被迫將一個跨過2000年漫漫長路的數學結晶, 在一夕間以代數運算形成。

Dandelin在切截後的錐裡上下各塞進內切球 (圖十三 (1)、(2)), 球面與切截平面的切點就是焦點, 利用點對球的切線等長以及子線 (錐面上通過錐頂點的直線) 在兩等高水平面間距離固定的性質, 可以得到橢圓和雙曲線的軌跡性質。

這種手法很特別, 誰會沒事在錐面裡塞剛剛好卡住的球進去, 還上下各一顆? 那個

卡住的點還剛好是焦點? 而拋物線怎麼辦? 它只能塞一個球進去, 準線呢?

拋物線 (圖十三 (3)) 的準線是切球與錐面切圓平面與截平面的交線, 利用兩次子線等高定長以及平行四邊形對邊等長性質, 可以得出軌跡方程式。

拋物線的處理引出準線的產生方式, 在橢圓與雙曲線中, 切球與錐面切圓平面與截平面的交線便是準線, 接下來的是離心率 ($PF:PL$) 的性質。

我們用透視剖面來看 (圖十三 (4)), E、E' 為上下球錐相切平行面 (透視成線), L、L' 為準線 (透視成點), T、T' 為錐面與內切球切子線, P 為錐截上任一點。因為 $PLT \sim PL'T'$ (位在相交兩線 LL' 與 TT' 平面上), 所以得知 $PT:PL=PT':PL'=TT':LL'=SS':AA'$ (加法性質)。

也就是說 $PF:PL$ 為一個定值 $e=SS':AA'$ (注意到 $PF=PT$), 其中 AA' 為軸長 ($2a$), 而 SS' 為兩焦點間距離 ($2c$), 因此, 離心率 $e=c/a$。在橢圓中,e 小於 1, 而在雙曲線中, e 大於 1。

避開希臘時期的立體幾何推理, 現在我們可以直接從圓錐上看到軌跡的定義與離心率的定義, 再將它們貼在座標平面上, 方程式就可以導出來了。

將這一連串事件排起來就像下表, 有點感覺了。

年代	內　涵	意　義
希臘時期	倍立方問題	作 $y^2=2dx$、$x^2=dy$ 圖形的需求產生
	以三種圓錐的正切截截面曲線, 拋物線圖形,	出現拋物線圖形與圓錐
	正方形面積轉換, 比較邊長與正焦弦長的盈虧	再定義圓錐、依盈虧定義曲線名稱。
	離心率性質	完備化
1579	軌跡定義	脫離立體
1604	焦點的連續變動	將圓含入此類曲線
1609	證實: 行星運行軌道為以太陽為一焦點的橢圓	
1640	證實: 拋體路徑為拋物線	
1655	曲線代數化	二次曲線成型
1822	切球法	圓錐截痕、平面軌跡等價

五. 幾個與課本不同的東西

現行的中學教材應該是採文藝復興後平

面軌跡代數化的取向寫的, 這裡面焦點、準線與特徵長是給定的, 而名稱是直接說的 (中文思維傾向具像描述的特徵— 可以望文生形—在這件事上很佔便宜), 通常不需要理由, 當然, 也很難說出理由。

從歷史發展來看, 起點既不是焦點、準線, 也不是軌跡、離心率。後人將立體圖形平面化、計算化後直接以特徵下定義, 這點原本無可厚非, 大多數幾何物件都是這樣處理, 不過, 中間的一些差異性可能更饒賦趣味。

這樣問吧, 希臘時期的焦點、準線、軌跡、離心率是什麼? 如果沒有19世紀的溯源詮釋, 我們怎麼看待這些東西?

到 Apollonius 之時, 圓錐截痕是以平面切截錐面形成的, 此時的特徵是以一個固定的比例關係 $PS^2 = MS \cdot MS$ 爲基準, 再利用剖面的平面圖形中相似形的比例關係, 導出個別截痕的座標式 (形式上和現今的直角座標系統一樣) 特徵。特徵長 (d、$2a$) 是一個被發現的有意義定長, 主要是作爲一種相對固定的長度, 這個長度是立體切截的產物, 不在截痕上。即使到這裡, 焦點也還沒出現, 其實也不需要, 因此正焦弦長 (d) 還沒長在焦點上。

焦點是在很後面出現的, Apollonius 只處理了有心錐線的焦點, 他在軸上取兩個點 F、F', 滿足 $AF \cdot A'F = AF' \cdot A'F' = (d \cdot 2a)/4$ (用現在的話來說, 就是半長軸長與半正焦弦乘積, 也就是半短軸長平方), 並做出光學性質 (在前) 與軌跡 (在後), 焦點這個名字是 Kepler 開始稱呼的, 拋物線的焦點以及準線, 則不在其著作中。拋物線的焦點由 Diocles 定出, 位在軸上距頂點 $d/4$ 處, 他並且證明其光學性質, 同時提出拋物線的準線與其軌跡。雖然 Pappus 稱 Euclid 早知道準線與離心率這件事, 但是第一個白紙黑字寫下來的卻是 Diocles, 或許拋物線那個 PF parabole d 的軌跡特質 (圖九), 引發是否有 ellipsis / hyperbole 的探討也說不定。

另一個不一樣的, 是雙曲線的漸近線。如圖十四, Apollonius 的特徵描述, 是利用一個長爲 d 的線段來比較等面積變換後的邊長。現在取頂點切線上一點 L, 使 AL 爲 a 與 $d/2$ 的比例中項 ($AL^2 = ad/2$, 也就是 b^2), 連接中心, 那就是漸近線, 有近而不交的特性, 不是自然產生的。

所以說我們在課堂裡強調再三的 a、b、c、d、e 原本都不是直接長在那裡的, 軌跡也不是最先出現的。當然, 課本裡那個圓、拋物線、橢圓、雙曲線的順序, 大概也是本世紀的某個人自以爲最適當的安排, 問題是對誰、以什麼爲目的的最適當。

如果圓錐截痕被看成是知識, 一種既定的數學事實, 那麼爲什麼要學這些事實? 有意義嗎? 如果被看成與素養有關, 一種數學的思維, 那麼爲什麼要重組這些事實? 還重組成與源起完全不同的樣子?

這麼說來, 價值, 恐怕是每個數學老師都得深入思考的議題, 有用是一種價值, 但是對誰有用、在哪裡用恐怕需要再深入思考, 而如果非學不可, 該賦予圓錐截痕什麼價值?

六. 幕落之問

一個人總有創造什麼的時候, 數學老師在命題的時候就是如此, 雖然常常只是抄襲和模仿, 或者說是參考和修飾, 但也常會有創造試題的時候。創造必然是以已知爲基礎的, 包括自覺的和不自覺的已知, 不自覺的那部份是很有趣的。

在尋找圓錐截痕的發展史中, 我想起了幾個問題, 主要圍繞爲什麼圓錐?

這個形狀很少見, 應該說在自然界中不常見, 那麼古希臘人爲什麼那麼熱中此道的探討? 他們那麼無聊? 抄枝紅蘿蔔就玩起來? 許多人認爲那是爲了解決問題而引起的抽象思維發展, 那麼是什麼問題呢? 爲什麼除了希臘人以外, 其他文明幾乎都不理圓錐的問題? 只是爲了倍立方問題? 那麼多的性質與詮釋並沒有解決這個問題, 思維的導向在那裡?

什麼時候人可以不顧具體地作抽象思考? 在什麼領域?

我相信古希臘人有一個不自覺的民族特性在支撐他們做這些事, 就像他們很堅持尺規作圖一樣。

在那個年代, 會不會有一種隱性的動力是加諸在所有希臘人的思維裡的? 而這個動力推使他們朝向這個目標前進, 只是後人很難理解?

想想 Pythagoras 那種神秘的數學主張, 幾乎是一種爲上帝解碼的神學思維, 想想 Plato 對幾何的推崇, 幾乎視爲是人與上帝溝通的入門工作。

古希臘人對與上帝溝通的追求是不是推動數學發展的隱性動力? 如果是, 圓錐在哪裡? 又爲什麼要在圓錐裡追尋以平面切截的樣子?

而這些截痕又爲什麼剛剛好就是自然界中規律動體的運行軌跡? 它們描述了上帝所創世界的基本律動, 是瞎貓碰上死耗子的不小心湊巧剛剛好嗎? 還是 · · ·

到 Apollonius 爲止, 圓錐其實只是很簡單的東西, 它就是尺 (線) 規 (圓) 的立體運動所形成的, 這種與古典希臘幾何學完全相吻合的線圓元素觀, 是倍立方問題所能引想出來的嗎?

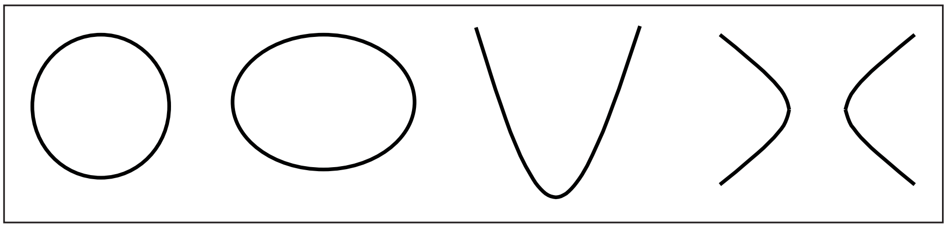
再想想古希臘人對數學物件的命名方式, 目的幾乎都在描述這個抽象結構中的規律, 對具體外型與直觀似乎並不重視, 與中國人具形的語言思維 (方程、錐、台、面、田、分數、代數) 大不相同, 爲什麼它們對上帝的規律那麼重視, 重視到寧可放棄眼所見的具形而描述隱藏的規律?

思考是一種讓人感覺到自己無知的方法, 而成長, 則是讓自己知道離白癡越來越近的歷程。

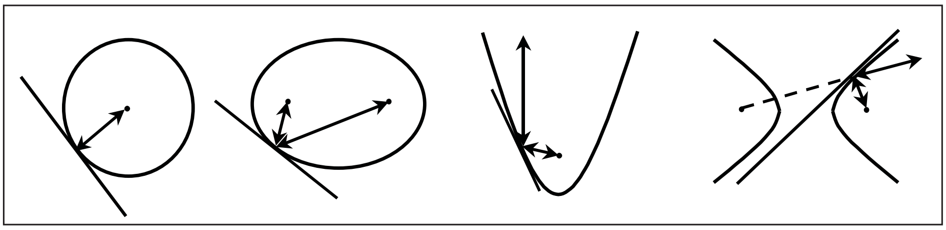
註: 本文中將圓、拋物線、橢圓、雙曲線統稱爲圓錐截痕。

七. 參考文獻

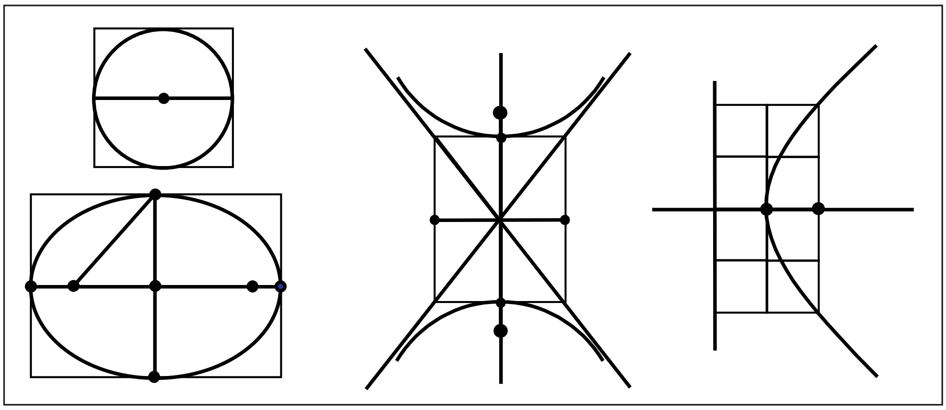
1. Morris Kline (1972): *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* Oxford University Press.
2. 國立編譯館 (民77年): 高級中學基礎數學教師手册 (第三册)。
3. Morris Kline 著, 張祖貴譯 (民84年): 西方文化中的數學。九章出版社。
4. Victor J. Katz (1993): A History of Mathematics: An Introduction. Harper Collins College Publishers.



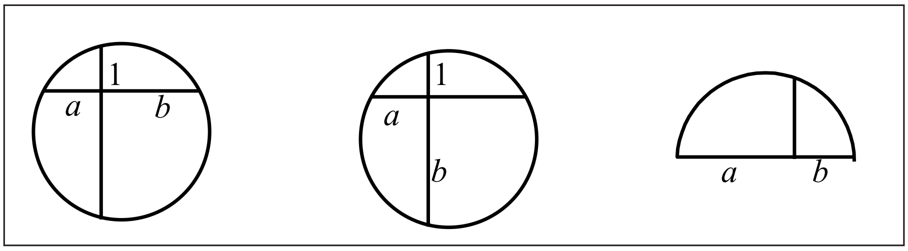
圖一



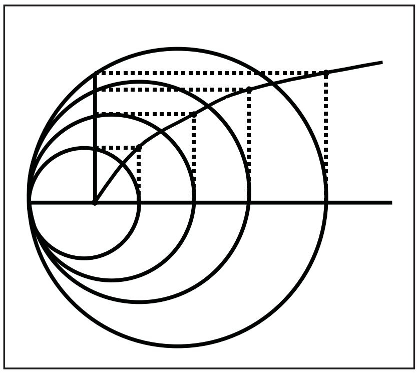
圖二



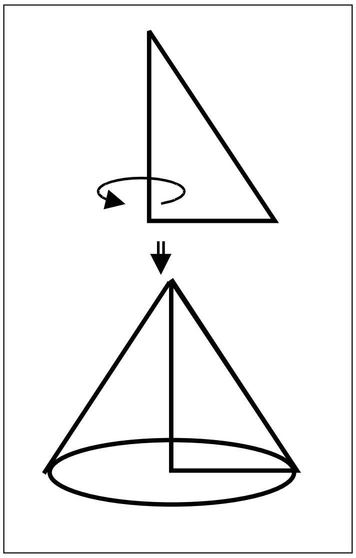
圖三



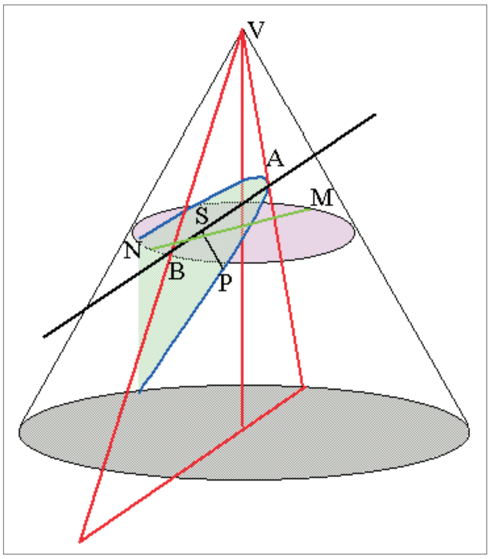
圖四



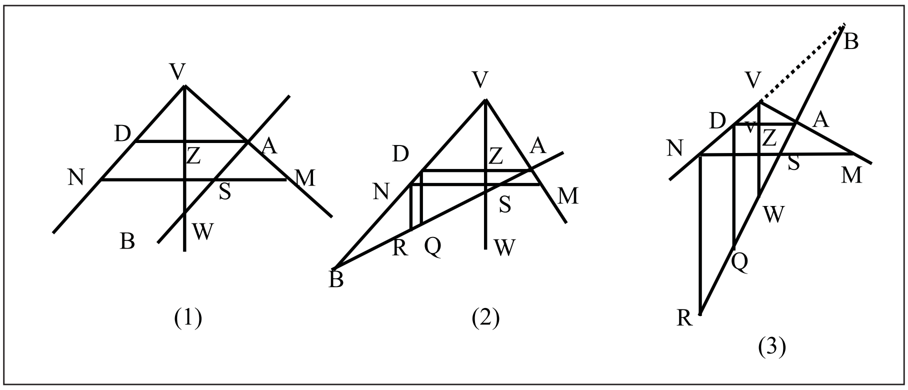
圖五



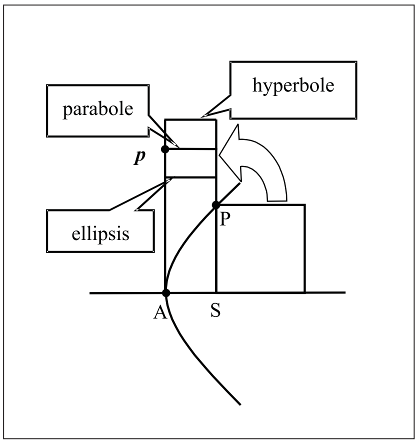
圖六



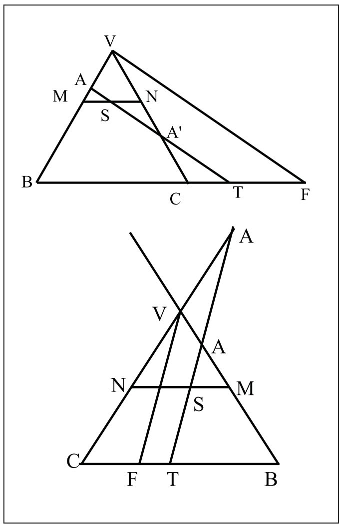
圖七



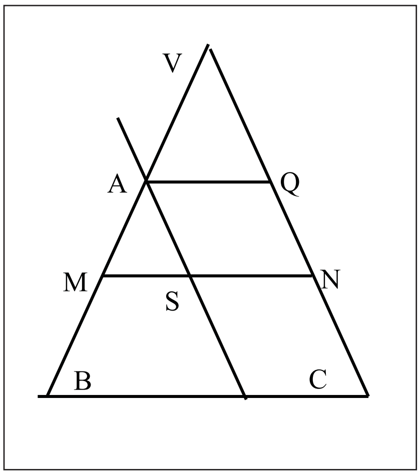
圖八



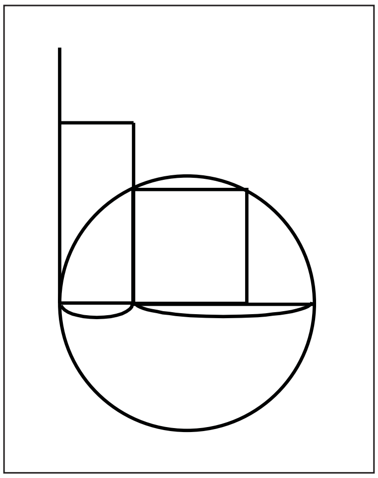
圖九



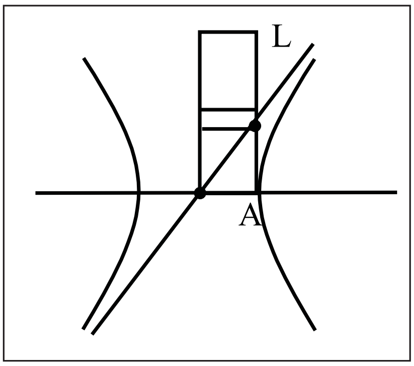
圖十



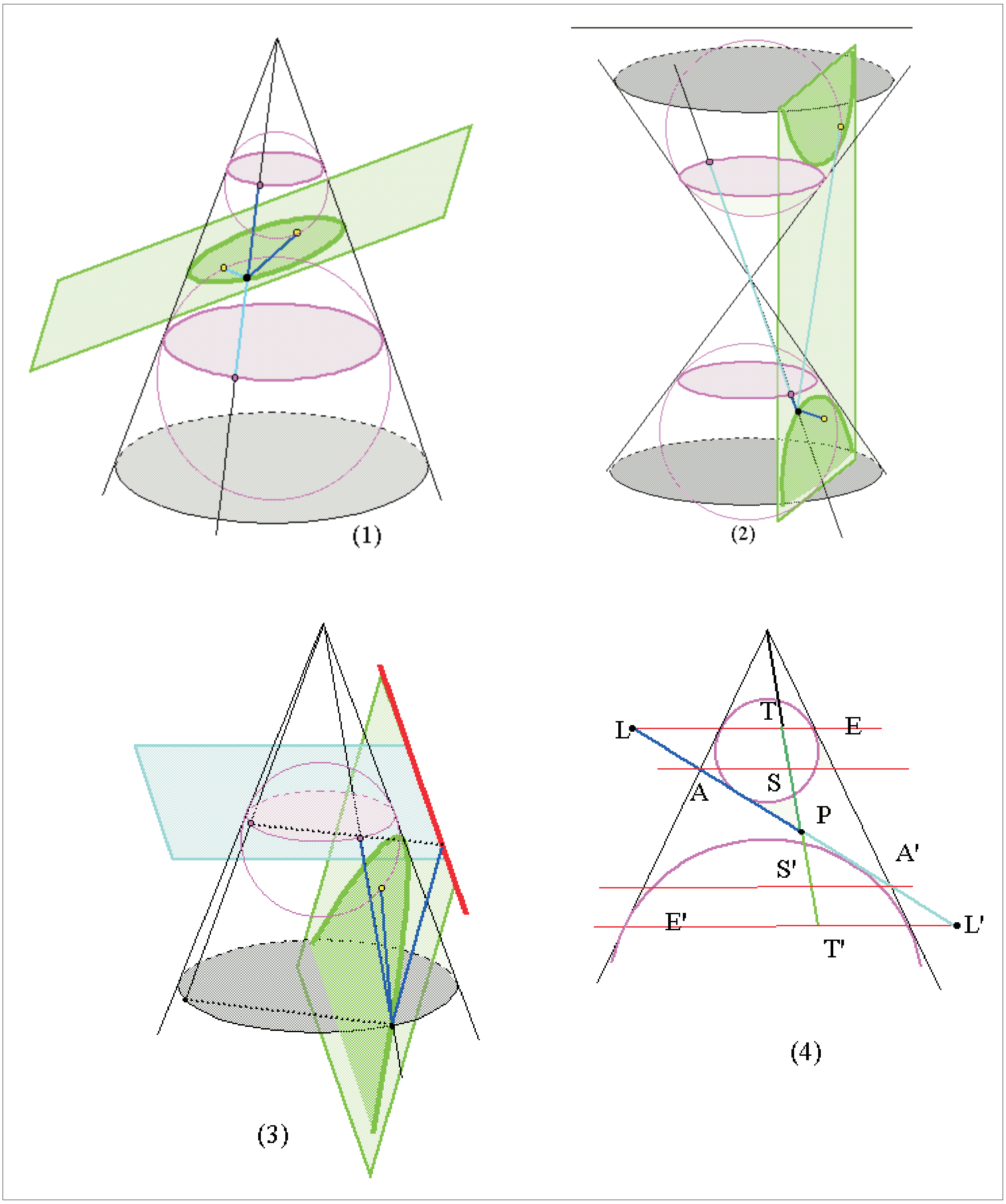
圖十一



圖十二



圖十四



圖十三

—本文作者任教於中國工商專科學校—