積分發展的一頁滄桑

蔡志強

> 如果 Newton 和 Leibniz 想到過連續函數不一定有導數— 而這卻是一般情形— 那麼微分學就不會被創造出來。
>
> —Henri Poincaré

一. 問題的起源

> 如果我看得更遠些, 那是因爲我站在巨人們的肩膀上。
>
> —Isaac Newton

自從 Newton 與 Leibniz 發明微積分後, 就爲人類開啓了一條通往科學數學化 (mathematization of science) 的大道, 但是, 由於微積分的基礎太薄弱了, 因此, 引來許多數學界及非數學界的人的非難。在本文中, 我們想要回溯一些積分的發展過程, 倒不是從偉大的阿基米德開始, 而是想著重於 Lebesgue 積分理論的發展, 因爲它的發展史其實就是數學分析嚴密化的最好例證。從這裡, 我們將可以看到許多的數學家如何從一些我們 (至少對我而言) 經常學習實分析過程中所遭遇的困難出發, 然後得到完整的理論。不過, 如果要對這段發展有貢獻的數學家列出一張表來, 恐怕十張 A_4 紙都不夠, 同時, 這項事實反映出每一種完整的理論都是許多人一點一滴累積起來的, 並非一個人就可以完成的。由於積分理論的發展歷程是如此之大與複雜, 因此, 本文必須有所限定, 我們打算就三部份來論述, 第一部份主要是從十七世紀至十九世紀函數、連續函數、以及定積分等概念的轉變談起; 第二部份是敍述集合論與容積 (content) 觀念的發展; 最後一部份則是談論 Borel 測度與 Lebesgue 積分的形成。首先, 我們將從十八世紀末的一場關於波動方程的論戰開始。

二. 函數觀念的改變以及 d'Alembert、Euler 與 Bernoulli 家族間的論戰

1. 十七、八世紀函數的觀念

我想每個人都會認同: “函數”與“點集”是積分最重要的兩個角色, 所以, 從函數觀念的發展來談積分發展是相當恰當的, 而函數觀念的歷史發展, 就恰如我們從中學、大學一直到研究所所經歷的函數觀念改變一樣。如果要說誰最早引進函數的概念, 那似乎是很

困難的問題; 但是, 可以確定的是, 函數一詞最早是由微積分的發明者之一 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646−1716) 於 1673 年引進, 用以表示任何與曲線有關的幾何量 (比如: 曲線上的點坐標、斜率、曲率半徑等等)。但是, 這個定義僅表示一些幾何量間的關係, 卻沒有給出函數的解析意義。

Bernoulli 家族的 Johann Bernoulli (1667 − 1748) 首先從解析的角度定義函數, 他於 1718 年將函數定義爲變數 x 與常數所構成的任何表示式, 並將它記做 x 或 ξ, 稍後, 他又用 Φx 表示 x 的函數。

第一位眞正將函數放在分析學中心地位的數學家, 應該是 Euler (Leonard Euler, 1707 − 1783)。Euler 於 1748 年所出版的「無窮小分析引論」(Introductio in Analysin infinitorum) 中的第一章就談論函數, 他將函數定義爲“變量的函數是變量, 常量和數用某種方式聯合在一起的解析表達式。只含一個變量 z, 餘者爲常量, 這樣的解析表達式叫做 z 的函數,. . ., 函數分爲代數函數和超越函數, 前者只含一般代數運算, 後者含有超越運算”。在這本大作中, Euler 也討論了隱函數與顯函數的差別。

總結的說來, 函數在那時期的長相, 就只是對變量作加、減、乘、除、開方等代數運算, 以及指數、對數以及三角函數等等超越運算所得到的表達式 (比如說: $x^3 + 2x^2 - 7x, \sin x$)。當然這些函數在我們看來是相當好的函數 (至少是可微, 甚至解析), 而且都是我們中學時所經常接觸到的。值得注意的是這些函數在其定義域上, 都有著相同的解析表示式, 而這正是十八世紀的數學家對函數所持的看法。

2. d'Alembert 的弦

> 在一個荒涼的島上, 詩人少有能不空虛, 而數學家則仍然能以其發現而自豪。
>
> —Jean le Rond d'Alembert

函數概念因爲 Euler, d'Alembert (Jean le Rond d'Alembert, 1717 − 1783) 以及 Daniel Bernoulli (1700 − 1782) 一場歷經 1760 年代至 1770 年代、關於弦振動問題的論戰, 而有了進一步的發展。

論戰的發起人是 d'Alembert。他的身世很可憐, 剛出生時, 就被遺棄在 Sanit Jean-le-Rond 教堂附近, 恰巧被一位士兵發現, 因此, 就以教堂的名字爲名。在 d'Alembert 之前, 雖然已經有人探討了弦振動 (拉緊的弦) 的問題, 但是, 只有 d'Alembert 在1747年所發表的論文「張緊的弦振動時形成的曲線的研究」(Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration, Histoire de l'Acad'emie Royale, Berlin, 3.1747. pp.214-219), 明確地將偏導數的概念引進, 以作爲弦振動的數學描述, 因此, d'Alembert 也被稱做偏微分方程的先驅。

d'Alembert 主要探討的弦振動問題如下: 設有一條長爲 ℓ 的弦懸掛並固定於 $0 \leq x \leq \ell$ 之間, 並設 $y(x,t)$ 爲弦於時刻 t 時, 在 x 位置處的橫向位移, 於是, 可假設

$y(t,0)=y(t,\ell)=0$; 若進一步假定在時刻 $t=0$ 時, 弦的形狀爲 $y=f(x)$, 而其初始速度爲 0 (相當於開始時將弦拉緊, 不使其有位移, 然後再放鬆), 則其所滿足的偏微分方程式爲

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) &= a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) \\ y(0,t) &= y(\ell,t)=0 \quad (\text{邊界條件}) \\ y(x,0) &= f(x) \quad (\text{初始條件}) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x,t)|_{t=0} &= 0 \quad (\text{初始條件}) \end{cases} \tag{1}$$

其中 a 爲一比例常數, d'Alembert 證明了式(1)的解爲

$$y(x,t)=\frac{1}{2}\phi(at+x)+\frac{1}{2}\phi(at-x) \tag{2}$$

其中 $\phi(x)$ 爲滿足以下條件的任一函數

$$\begin{cases} \phi(x) &= -\phi(-x) \quad \forall \quad x\in R \\ \phi(x+2\ell) &= \phi(x) \quad \forall \quad x\in R \\ \phi(x) &= f(x) \quad 0\le x\le \ell \end{cases} \tag{3}$$

然而, 在 d'Alembert 心中所謂 任一函數 就現代意義而言, 並非眞的是任意的, 而是有 (3) 式以外的附加條件! 事實上, d'Alembert 要求初始函數 $f(x)$ 至少要二次可微, 因此,$\phi(x)$ 至少也二次可微。然而, 問題不僅於此, d'Alembert 主張: “爲了正當地運用微積分運算, 每一個函數必須處處由同一個代數的或超越的方程來表示, 也就是函數應服從形式化的連續性法則”。d'Alembert 這種函數的觀點正是十八世紀的數學家所普遍持有的觀點, 而這種觀點正是 Leibniz 以來對函數的觀念: 函數必須是在整個定義的區間上能用同一個解析式表示的, 否則所處理的問題是無解的! 因此, d'Alembert 的函數其實已經是比我們現代的可微函數還要好的函數, 於是, $\phi(x)$ 不僅在 $0\le x\le \ell$ 與 $f(x)$ 相等, 而且應該是在整個實數線上相等, 亦即

$$\begin{aligned} &\phi(x)=f(x) \quad \text{for} \quad 0\le x\le \ell \\ \Longrightarrow\ &\phi(x)=f(x) \quad \forall\, x\in R \end{aligned} \tag{4}$$

3. Euler 的改變

把別的數學家置於 Euler 之上都是一種侮辱。

—Jean le Rond d'Alembert

Euler 於讀完 d'Alembert 的論文之後, 也於 1748 年發表他關於弦振動問題的探討的論文— “On the Vibration of Strings”, 文中的探討方法大致與 d'Alembert 相同, 但是, Euler 的結論不同於 d'Alembert。Euler 認爲 d'Alembert 對於函數的要求在物理上是不實際的, 弦可以拉動, 使得其起始形狀在不同的區間上可以由不同的解析表示式所描述。也就是說, Euler 認爲他的初始函數 $f(x)$ 在不同的區間上可以有著不同的解析表示式, 而 Euler 稱此種函數爲不連續函數 (就現代意義而言是連續函數, 但在相接的地方爲不可微的)。Euler 這種函數的認知與他在「無窮小分析引論」中所提的函數的觀念完全不同, 因此, 他在 1755 年給函數下了一個新的定義: “如果某些量這樣依賴於另一些量, 當後者變化時, 它也隨著變化, 那麼稱前者是後者的函數”。此一新的函數定義, 似乎很接近現代的函數觀念, 但是, Euler 的函數觀念, 就現代意義

而言, 還是停留在導數有間斷點的函數上。無論如何, Euler 對於他的新發現, 還是覺得很高興, 他甚至於 1763 年 12 月 20 日寫信給 d'Alembert 說道: “考慮這類不服從連續性法則的函數, 爲我們開闢了一個全新的分析領域”。

4. D. Bernoulli 的物理觀點

> 用一條單獨的曲線, 像表示棉花價格而畫的曲線那樣, 來描述在最複雜的音樂演出時效果 $\cdots$。在我看來是數學能力的極好證明。
>
> —Lord Kelvin

介入這場論戰的另外一位重要人物是 Bernoulli 家族中最有才氣的 Daniel Bernoulli (1700 − 1782)。Daniel 是 Johann Bernoulli (1867 − 1748) 的第二個兒子, Johann 雖然是在數學上很出名, 而且是一個出色的數學教師, 曾教育出像 Euler 這樣偉大的數學家。但是, 他卻要 Daniel 去從商, 或許是遺傳的關係, Daniel 並沒有如 Johann 所願, 而是繼續從事學術研究, 並在他的有生之年獲得了十次巴黎科學院的大獎 (一個人若是得過一次, 就算是非常優秀了), 諷刺的是, 他還在 1734 年, 與他的父親以“行星軌道與太陽赤道不同交角的原因”論文一同獲得巴黎科學院的大獎, 當然, 他也以其豐碩的功績獲得其他榮譽以及外國院士的名聲。Daniel 於 1721 年獲得了醫學博士; 1725 年, 與他的大哥 Nikolaus Bernoulli III (1695 − 1726) 受邀到俄國的聖彼得堡科學院工作, 在那裡, Daniel 一共工作了八年 (1725 − 1733), 其間, 大數學家 Euler 還曾擔任過他的助手。到了 1733 年, Daniel 的大哥過逝以及一些原因, 使得他離開聖彼得堡, 但是, 也是從那時候起, Daniel 與 Euler 開始了維持 40 年的通信。

早在 1733 年, Daniel 就曾明確指出振動的弦可以有較高頻率的振動, 在 1741 − 1743 年所發表的關於振動桿的橫向振動論文中, 又以物理的觀點說明基音和高次的諧音可以同時存在。直到讀完 d'Alembert 1747 年與 Euler 1748 年的論文之後, 或許受到父親老約翰好勝的遺傳, Daniel 也趕緊於 1753 年發表他以前獲致的結果: 振動弦的許多振動模式可以同時存在於弦上, 也就是說, 假定弦長爲 ℓ 的弦, 則我們可以從第一基音、第二諧音、第三諧音 $\cdots$ 等一切可能的簡諧振動

$$y=\sin\frac{n\pi x}{\ell}\quad n=1,2,3,\ldots$$

出發, 而將其疊合以獲致所有可能的振動

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\cos\frac{n\pi ct}{\ell}\tag{5}$$

d'Alembert 知道 Daniel 的結論後, 提出了強烈的反駁, 他甚至不客氣地說: 他根本不相信一切奇的週期函數能表示成“Da- niel 級數”。Euler 知道 Daniel 的結論後, 雖然提出了反駁, 但是, 基於他與 Bernoulli 家族的情感 (Euler 起碼是老約翰的學生, Daniel 又曾推荐他在聖彼得堡科學院的工作), 因此, 他是以含蓄地方式提出反駁, 首先他讚揚 Daniel 發現許多簡單的振動模式可以同時存在, 也就是同一條弦可以同時發出許多諧音的物理觀點, 但是, Euler 並不認

爲每一條起始曲線 $f(x) = y(x,0)$, 都可以用一個無窮三角級數表示, 也就是說, 他無法接受

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{\ell} \tag{6}$$

Euler 不肯認同的原因是很簡單的, 他認爲他自己的振動弦的解包括了所有可能的函數, 特別是他所謂的不連續函數, 因此, 連續的正弦函數怎麼可能疊加產生不連續函數 (這在現代意義下, 當然是有問題的!), 另外一方面, 正弦函數是奇函數, 因此, 顯然無法產生所有的任意函數, 特別是如果起始曲線 $f(x)$ 有一部份是靜止的; 但是, Euler 倒是願意承認 Daniel 的解是他的解的一部份。

Daniel 對 Euler 提出的反駁的回答是: 既然有無窮多個 a_n 可供選擇, 因此, 每一個函數當然均可用一三角級數表出, 甚至於正如同他在 1773 年表示的看法: 三角級數可能在不同的區間表示不同的代數函數, 於是, 他的解所涵蓋的範圍比 Euler 廣。Daniel 這種非數學方式的論證, 當然是無法使人信服, 大家或許可以看出, 爭議的焦點其實是在於何種函數可以展成三角級數的問題上。無論如何, Daniel 是第一位堅持任意函數可以表示成一三角級數和的人, 這種觀點至少爲往後的 Fourier 級數奠定物理的基礎。

三. Fourier 譜寫的“數學的詩篇”

> 對自然的深入研究是數學發現最重要的源泉。
>
> —Jean Baptiste Joseph Fourier

本節標題的這段話是 Fourier (1768 – 1830) 最常被引用的一段話, 它同時也暗示著 Fourier 是一位數學物理學家。Fourier 於 1768 年出生於一個貧窮的裁縫師的家裡, 九歲時, 雙親就相繼去逝, 由教會送去軍校就讀, 畢業後, 由於出身是裁縫師兒子的緣故, 因此, Fourier 無法獲得軍銜。Fourier 於是想到巴黎繼續他的數學研究, 可是由於法國大革命爆發, 因此, Fourier 回老家教幾年書。法國大革命爆發後, 由於 Fourier 對因恐怖活動而遭受害的人的辯護, 而被捕入獄。出獄後, 進入巴黎師範學院念書, 雖然爲期不久, 但是, 也顯現出他在數學方面的才能, 或許是這樣的原因, 當 1795 年, 巴黎綜合工科學校成立時, 他立即被選爲 J. L. Lagrange (1736 – 1813) 以及 G. Monge (1746 – 1818) 這兩位當代法國的數學大師的助教, 但是, 不久 (1798 年) 即與 Monge 跟隨拿破崙至埃及遠征。在埃及期間, Fourier 就對熱傳導問題產生極大的興趣, 據說, 他在埃及的熱學實驗以及研究工作顯示: 沙漠地區的熱對於人體的健康有很大的幫助, 因此, 他經常穿著溼的衣服, 並將自己包裹的像木乃尹一樣, 住在溫度高到令人難以忍受的房間裡, 或許是他對熱太酷愛了, 以致於當他去逝時, 身上仍熱得像剛煮過一樣。但是, Fourier 的主要研究成果卻是在 1801 年這一年有了轉變, 在這一年, 法國於特拉法加戰役中敗給英國,Monge 隨拿破崙倉促地回到法國, 稍後, Fourier 也回到法國。回國之後, 起先, Fourier 是希望能獲取教職, 但是, 由於拿破崙賞識他的行政能力, 於是, 他被任命爲伊澤爾地區的首府格勒諾布爾的官員, 就在這裡,

Fourier 開始了熱傳導問題的主要研究及實驗。

Fourier 的主要研究成果發表於他向巴黎科學院所提交的兩篇論文。第一篇是於 1807 年向巴黎科學院提交的, 標題為“熱的傳播” (Mèmoire sur la propagation de la chaleur), 主要是處理一些諸如矩形、環狀、球形、柱形等特殊形狀連續體的熱傳導問題, 論文的審查人為法國著名的三 L 數學家: Laplace、Legendre 以及 Lagrange, 其中, Lagrange 持著相當反對的態度, 原因是 Fourier 於論述過程中, 表示出下列令人訝異的論斷: Fourier 認為不論定義在 $(-\pi,\pi)$ 上的函數 $f(x)$ 是如何任意, 它一定可以用一個無窮三角級數表示出來, 也就是說, 存在適當的實數 a_n, b_n, 使得下式成立

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

這個論證恰與 Lagrange 在十八世紀末關於弦振動問題的研究結果相矛盾, 話雖如此, 但是, 由於 Fourier 的研究內容是如此的富有創意, 這些數學家們還是於回信時, 鼓勵他繼續將其內容嚴密化, 科學院並在 1810 年懸賞徵求關於熱傳導的問題。

Fourier 經過四年的努力, 於1812年再度向巴黎科學院提交一篇論文, 標題為“熱在固體中的運動理論” (Theorie du mouvement de chaleur clansles corps solides), 內文不僅修正了 1807 年論文的部份內容, 也增加了關於無窮大物體的熱傳導分析。再一次地, 由三 L 負責評審, 他們給于的評審意見是: “Fourier 的論文思想新穎, 給出了解決熱傳導等問題的重要方法, 有很高的實用價值。同意發給高額獎金”。因此, Fourier 在這次的徵文中, 獲得了懸賞的巨額獎金, 但是, 也因為 Lagrange 相當堅持該篇論文的嚴密性緣故, 而無法在科學院的「研究報告」(Memoires) 上發表。

Fourier 對於巴黎科學院無法接受他的論文感到很生氣, 不過, 他還是繼續他的工作, 並於 1822 年發表他關於熱傳導的重要數學著作「熱的解析理論」(*Théorie analytique de la chaleur*), 並於發表該書的兩年後, 當上曾令他生厭的巴黎科學院的祕書, 並一直到終老。然而也由於職務之便, 才使他得以將他的論文一字不改地發表於「研究報告」(Memoires) 上。

接下來, 我們要了解一下 Fourier 在 1807 年的論文所考慮的一個問題: 求區域 $x\ge 0, -\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$ 中, 當物體呈現穩定狀態時, 其溫度函數 $T(x,y)$ 為何? 也就是底下的偏微分方程式

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}(x,y)=0\\ T(x,\pm\frac{\pi}{2})=0 \quad \forall\, x\ge 0\\ T(0,y)=1 \quad -\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}\end{cases}\tag{7}$$

其中 區域底邊上的溫度恆為 1。Fourier 首先利用所謂的分離係數法得到(7)式的一族基本解

$$T_m(x,y)=e^{-mx}\cos my \quad m=1,2,3,\ldots\tag{8}$$

由於溫度函數 $T(x,y)$ 在 $y=\pm\frac{\pi}{2}$ 時均等於 0, 於是 m 只能取值 $m=1,3,5\ldots,$

再由溫度函數 $T(x,y)$ 在底邊 $x=0$ 時, 恆爲 1, 就可得到下列的方程式

$$1=b_1\cos y+b_3\cos 3y+b_5\cos 5y+\cdots \quad (9)$$

Fourier 認爲(9)式的右邊爲 y 的函數, 稍後, 他注意到 $b_{2n-1}=\frac{1}{2n-1}$, $n=1,2,3,\ldots$, 於是,(7)式的一般解爲

$$\frac{\pi}{4}T(x,y)=e^{-x}\cos y-\frac{1}{3}e^{-3x}\cos 3y+\frac{1}{5}e^{-5x}\cos 5y+\cdots$$

Fourier 接下來考慮: 若底邊 $\{(x,y)|x=0,-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}\}$ 的溫度不是 1, 而是一般的函數 $\phi(y)$, 則溫度分佈函數 $T(x,y)$ 又如何? 也就是說, 如何找出參數 $b_1,b_2,b_3,\ldots$。爲此, Fourier 首先考慮 $\phi(x)$ 是奇函數的情形, 也就是如何求解下列無窮級數的係數 b_n:

$$\phi(x)=b_1\sin x+b_2\sin 2x+b_3\sin 3x+\cdots \quad (10)$$

這個問題相當於是 Fourier 前人所遭遇的問題, 也就是對於任意函數 $\phi(x)$ 是否可以展開成爲一無窮三角級數和。Fourier 起先是分別將 $\phi(x),\sin nx$ 展開成在 $x=0$ 附近的 MacLaurin 級數, 然後代入(10)式比較係數, 再經過一些複雜、且帶有古怪的作法, 可以得到

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\phi(x)\sin nx\,dx \quad n=1,2,3,\ldots \quad (11)$$

Fourier 作完這項計算複雜的大工程之後, Fourier 指出: b_n 也可以依如下的程序而得到。首先將(10)兩邊同乘以 $\sin mx$, 並將兩邊同時從 0 到 π 作積分, 得到

$$\int_0^\pi\phi(x)\sin mx\,dx=\int_0^\pi\sum_{n=1}^\infty b_n\sin nx\sin mx\,dx \quad (12)$$

將(12)式的右邊積分運算與求和運算交換。亦即作逐項積分就可得到 b_n。接下來當然是考慮 $\phi(x)$ 是偶函數的情形, 再其次是一般函數的情形。總結地說, 若函數是以 2π 爲週期的函數, 則 $f(x)$ 可以展開爲如下的三角級數:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^\infty(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \quad (13)$$

其中

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)\cos nx\,dx,$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)\sin nx\,dx, n=1,2,3,\ldots \quad (14)$$

這項結論其實 Fourier 的前輩們早已取得, 那麼, Fourier 的特點在哪裡呢? Fourier 將定積分 $\int_a^b\phi(x)dx$ 解釋爲 $\phi(x)$ 與 $x=a$, $x=b$; 以及 x 軸所圍成區域的面積, 於是 πa_n 的意義就是 $y=\phi(x)\sin nx$ 曲線下的面積。這對於我們而言, 似乎是再明顯也不過了, 但是回想中學時代所教授的積分概念, 雖然老師也指出求定積分就相當於求某區域面積的事實, 但是, 大部分的時間, 都將求定積分轉爲求原函數, 也就是相當於求一函數 $g(x)$, 使得 $g'(x)=\phi(x)$ 成立, 而非利用求和的觀念來求定積分。令人驚訝的

是十八世紀以及十九世紀初的數學家都有著相同的態度, 即使有人認爲求積分就是相當於求面積, 但也不是主流。因此, 若堅持求函數 $\phi(x)$ 定積分是求其所對應的原函數, 那麼 $\int_a^b \phi(x)dx$ 的存在性就得基於 $\phi(x)$ 必須滿足十八世紀數學家意義下的連續 (也就是有解析表示式), 而且可由"反微分"計算出來。這麼多的要求, 當然也就使得 $\int_a^b \phi(x)dx$ 的存在性極爲可議了! 由於 Fourier 這種對積分的觀點, 因此, 他認爲對於任意函數 (不論是 d'Alembert, Euler, 或是任何意義下的函數) $\phi(x)$ 而言, $\int_{-\pi}^{\pi} \phi(x)\sin nxdx$ 均是有意義的, 所以, $\phi(x)$ 均可透過計算 $\int_{-\pi}^{\pi} \phi(x)\sin nxdx, \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x)\cos nxdx$, 從而得到任意函數 $\phi(x)$ 的三角級數表示法。

正因爲如此, 當 Lagrange 發現 Fourier 又無法提出有力的數學證明時, 當然遭到 Lagrange 的反駁, 至少 Lagrange 在十八世紀末那場弦振動的論戰中, 是站在 Euler 的立場並反對 Daniel 三角級數的觀點。然而, Fourier 並不因此而退縮了, 他採取"實驗"的手段, 選取了大量的函數, 計算每個函數的前面幾個 a_n, b_n, 並將所得的三角級數前幾項所構成的函數圖形與原來函數圖形作比較, 因而, 更肯定自己的結論, 並且作了以下的結論: "不管函數 $f(x)$ 在區間 $-\pi \le x \le \pi$ 外如何, 由(14)式的 a_n, b_n 所形成的三角級數(13) 恆可以表示 $f(x)$, 這就是爲什麼早期的數學家不能接受任何一個函數可展開爲三角級數的原因, 正是他們沒有能夠看到兩個函數可以在一給定的區間上相合, 但不一定在此區間外相合, 在給定的條件下, 級數眞正確定的是函數在 $-\pi$ 到 π 區間上的值, 在區間外則週期地重覆著"。在這裡, 我們多少可以看到純數學家與數學物理學家的不同, Lagrange 以其作品的嚴密性著稱, 而 Fourier 卻寧可相信他的物理直觀。

Fourier 的"錯誤"結論使人聯想到: 如果任意函數都可以用三角級數表示出來, 那麼連續與不連續函數 (在十八世紀的意義下) 又有什麼差別呢? 這個問題就導引著往後的數學家對分析的基礎前進。Fourier 所引發的另外的一個問題是三角級數是否收斂, 以及可否逐項積分? 這些問題在當時看來是理所當然成立, 因爲甚至收斂性的問題, 當時的數學家都未曾認眞考慮過, 更不必說逐項積分。但是, 在往後的幾節裡, 我們將看到這些問題卻是激起集合論誕生的重要問題。

四. Cauchy 分析的嚴密化

> 現在人們可以說, 絕對的嚴格已經達到了。
>
> —Henri Poincaré

Fourier 認爲任意函數均可表爲三角級數的和, 使得大家開始思考什麼是函數、連續函數與不連續函數的區別、定積分的意義爲何? 也就是牽涉到分析基礎的嚴密化, 這方面的工作應該首先歸功於 Augustin-Louis Cauchy (1789−1857)。Cauchy 早在 1814 年時, 就已經理解到連續函數與將定積分視爲某種"求和的極限"觀念的重要性, 但是, 直到他知道了 Fourier 的工作之後, 特別是 Fourier 對於 Fourier 級數中 Fourier 係數

a_n, b_n 的面積解釋之後, 他更加肯定這種態度。而 Cauchy 在這方面的工作顯現在他一生中最風光的時候所作三本關於分析基礎嚴密化的大作:「分析教程」(*Cours d'analyse de l'Ecole royale polytechnique*, 1821)、「無限小計算教程概論」(*Résumé des lecons sur le calcul infinitésimal,* 1823) 以及「微分學教程」(*Lecons sur le calcul differential,* 1829)。

Cauchy 一生中最得意的時期應該是在波旁王朝復辟時期, 在這時期, Cauchy 於 1815 年, 以 26 歲這樣年輕的年紀就接替 L. Poinsot 的位置, 而成爲培養出許多法國大數學家的巴黎綜合工科學校的教授, 並在這裡成就了許多偉大的研究, 特別是, 受到了 Laplace 的鼓勵, 於 1821 年出版了他在巴黎綜合工科學校授課的數學分析講義, 也就是「分析教程」(*Cours d'analyse de l'Ecole royale Polytechnique*,1821)。Cauchy 寫作這本書的目的是想要將分析建築在像幾何一樣堅固的基礎之上, 而不是像過去的數學家一樣, 只是利用一些似是而非的歸納方法而得出的分析眞理, 正如底下他在這本書的序言所說:

> 我企圖按照關於代數一般原理的推理中從來沒有過的一種方法, 給分析方法以幾何中所要求的嚴密性。$\cdots$ 而歸納法只是偶爾發現眞理, 但與數學所自恃的精確性毫無共同之處 $\cdots$ 我的主要目標是使嚴謹性 (這是我在「分析教程」中爲自己規定的準繩) 與基於無窮小的直接考慮所得到的簡單性和諧一致

Cauchy 在這本書的第一章裡, 就明確地定出極限的觀念, 並將無窮小定義爲以 0 爲極限的變數, 從而, 確定了無窮小不是數的觀念。

Cauchy 極限的定義

當一個變數所取的值無窮接近一固定值而使兩者之差要多小有多小時, 此一最終的值稱爲所有其他值的極限。比如說: 一無理數是許多不同的分數的極限, 它們愈來愈接近它。在幾何中, 一個圓周是其邊數不斷增加的內接多邊形所收斂的極限, 等等。

當同一變量逐次所取的絕對值無限減小, 以致比任意給定的數還要小, 這個變量就是所謂的無限小或無限小量, 這樣的變量將以 0 爲極限。

雖然, Cauchy 對於極限的看法, 它的前人 (比如說: d'Alembert) 也曾提出過, 不過, 在論證一些極限式子時, Cauchy 確是第一個將上述定義轉化成類似於今日以 $\epsilon-\delta$ 論證極限的人, 或許, 可以說 Cauchy 是將分析邁向算術化的第一人, 後來的柏林學派大師 Karl Weierstrass ($1815-1897$) 是將 Cauahy 的想法以 $\epsilon-\delta$ 的方式表現出來。

Cauchy 連續的定義

在屬於無限小範疇的研究對象中, 我們必須提出與函數的連續性和不連續性有關的概念。讓我們首先從這一角度來考察一個單變量函數。

設 $f(x)$ 是變量 x 的函數, 並設對介於兩給定限之間的每一個 x 值, 該函數總有一個唯一的有限值。如果在這兩給定限之間的有一個 x 值, 當變量 x 獲得一個無限小增量 α, 函數本身將增加一個差量

$$f(x+\alpha)-f(x)$$

這個差同時依賴於新變量 α 和原變量 x 的值。然後, 如果對變量 x 在兩給定限之間的每一個中間值, 差 $f(x+\alpha)-f(x)$ 的絕對值都隨 α 的無限減小而無限減小, 那麼就說函數 $f(x)$ 是變量 x 在這兩給定限之間的一個連續函數。

另一方面, 假如 $f(x)$ 在包含 x_0 的任一個區間都不是連續的, 則稱 $f(x)$ 在 x_0 不是連續的。

在這裡, Cauchy 突出了連續與不連續函數之間的差別, 而且他的定義並沒有像十八世紀時, 須要求函數有額外的性質 (比如: 可微), 所以已經幾乎是現代的版本。但是, 另外一方面, 我們可以看到一個與現代版本有點差異但又有趣的現象: 連續是函數在一點的行爲表現, 而不是在整個區間上的行爲, 然而, Cauchy 將連續觀念建立在整個區間上, 另外一方面, Cauchy 對不連續的定義, 就顯出他認爲不連續是函數在一點的行爲, 而這與現代版本是相同的。關於這一點, 我們還會在後面討論。

在兩年後, Cauchy 在「無限小計算教程概論」的第二十一講裡, 利用“和的概念”定義連續函數定積分:

Cauchy 定積分的定義

假設函數 $y=f(x)$ 關於變量 x 在兩個有限界限 $x=x_0$ 和 $x=X$ 之間連續, 我們用 $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ 來表示 x 的位於這兩個限之間的一些新值, 並假定它們在第一個限與第二個限之間或者總是遞增, 或者總是遞減。我們可以用這些值將差 $X-x_0$ 劃分成元素

$$x_1-x_0, x_2-x_1, x_3-x_2, \cdots, X-x_{n-1}$$

這些元素都有相同的符號。作了這樣的劃分後, 我們將每個元素與該元素左端點所對應的 $f(x)$ 值相乘, 即: 元素 x_1-x_0 乘以 $f(x_0)$, 元素 x_2-x_1 乘以 $f(x_1)$,$\cdots$, 最後, 元素 $X-x_{n-1}$ 乘以 $f(x_{n-1})$, 同時設

$$\begin{aligned}S=(x_1-x_0)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1)\\ +\cdots+(X-x_{n-1})f(x_{n-1})\end{aligned}$$

是這樣一些乘積之和。顯然量 S 將依賴於: 第一、差 $X-x_0$ 被分成的元素個數 n; 第二、這些元素的數值, 從而也就依賴於所採用的劃分方法。

於是當差 $X-x_0$ 的元素變爲無限小時, 劃分方法對 S 的值的影響無足輕重; 這樣, 如果我們讓這些元素的數值隨著它們個數的無限增加而無限減小, 那麼就一切實用的目的而言, S 的值最終將變爲常數。或者說, 它最終將達到一個確定的極限, 而這極限僅依賴於函數 $f(x)$ 的形式和變量 x 的邊界值 x_0 和 X, 這個極限就叫做定積分。

爲了說明定積分是不依賴於“分割點”的選取, Cauchy 隱約地利用了“閉區間上的連續函數是均勻連續” 以及“實數完備性”這兩個性質, 從而確定了連續函數定積分的存

在性。然而, Cauchy 並沒有驗證這兩個性質是否眞的成立, 而只是把它們當成必然是成立的, 這多少阻礙了 Cauchy 繼續探討不連續函數的定積分存在性。無論如何, Cauchy 對於連續函數定積分的定義已經擺脫了從 Newton 發明微積分以來的一個觀念: 將積分視爲微分的逆運算。比較學究一點的術語, 就是微積分基本定理是成立的。我個人的看法是: 如果微積分基本定理沒有很早被發現的話, 或許大家會提早考慮定積分的存在性, 從而, 較早考慮微積分的基礎, 而不用受到許多人的攻擊, 但是, 如果微積分基本定理沒有一開始就被發現, 那麼或許十八世紀的數學就不會有如此多的進展了。因此, 從今天看來, Cauchy 對連續函數定積分的探討, 尤其他的連續函數定義已經擺脫了十八世紀連續函數的看法, 使得他證明了定積分對於範圍很大一類函數是存在的。而事實上, Cahchy 也是第一個認爲必須給于積分的一個一般性的定義 (而非僅是求導數的逆運算), 並證明其存在性, 然後, 才有資格談論積分的性質。最重要的是: 如果不是 Cauchy 對於連續、定積分給于不同於十八世紀數學家所想像的意義, 那麼 Riemann 積分可能就很難出現, 更別提往後的 Lebesgue 積分了。

Cauchy 在給了積分的一個算術的定義之後, 於「無限小計算教程概論」的第二十六講裡, 探討了連續函數的微積分基本定理, 於是完成了連續函數在閉區間上的積分理論。由於 Cauchy 對於函數的連續與定積分的概念, 使得積分不用訴諸於是求微分的逆運算, 所以積分的概念就可以推廣到對在定義的區間上有有限個不連續點的函數。簡單地說, 如果函數 $f(x)$ 僅在 $[a,b]$ 區間上一點 c 不連續 (任意有限多點也是成立), 則函數 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 上的定積分爲

$$\int_a^b f = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{c+\varepsilon}^b f \qquad (15)$$

Cauchy 對於函數連續以及定積分概念的定義, 雖然沒有利用到函數須是可用方程式表示出來的性質, 但是, Cauchy 對於函數的概念並沒有比他的前人前進多少。比如: Lebesgue 就曾指出 Cauchy 對於顯函數與隱函數的差別在於: 隱函數中關於 x, y 關係式的方程式, 無法將 y 用 x 及代數運算將其解出來。但是, 如果說 Cauchy 對於函數的概念沒有比他的前人進步, 那也是不公平的, 就如同我們前面所說的, 十八世紀的數學家對於函數的一般形式可以總結爲如下的形式:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \chi_{I_k}(x) g_k(x) \qquad (16)$$

其中 $I_k (k = 1, 2, 3, \ldots, n)$ 爲 $[a,b]$ 上的分割, χ_{I_k} 爲 I_k 上的特徵函數 (characteristic function), $g_k(x)$ 則爲可用解析式表示的函數。然而, 在 Cauchy 的一篇討論微分方程的論文中 (*Mémoire sur les fonctions discontinues,* 1849), 就將 $g_k(x)$ 放寬爲 Cauchy 意義下的連續函數, 但是, Cauchy 對於不連續函數卻僅限於允許有限個不連續點而已的函數。

Dirichlet 的函數觀念

這是函數嗎?

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x \in Q \\ 0 & \text{if} \quad x \notin Q \end{cases}$$

—Peter Gustav Lejeune-Dirichlet

雖然 Cauchy 早在 1823 年就開始考慮 Fourier 級數收斂等相關問題, 並給于分析嚴密化之一些基礎, 但是, 其所考慮的過程既不嚴格, 也無法涵蓋已知是收斂的級數。眞正第一位對 Fourier 工作作出嚴密性貢獻的應該是德國的大數學家 Peter Gustav Lejeune-Dirichlet $(1805-1859)$。

Dirichlet 的父親是一位郵政局長, 與一般的數學家一樣, Dirichlet 從小就表現出對數學很大的興趣, 據說, Dirichlet 曾將自己的零用錢存下來, 以購買數學書籍。當 Dirichlet 於十六歲要上大學時, Dirichlet 面臨了兩個問題, 首先是 Dirichlet 的父母希望他以後能成爲一名律師, 但是, Dirihlet 早就心有所屬, 毅然要從事數學的研究工作; 第二個問題是要到那裡學習? 當時德國的數學水平並不高, 能與法國數學家並列的只有 Guass 一人, 雖然, Guass 稱得上是當時世界上最偉大的數學家, 然而,Guass 正如大家所知的, 除了在晚年之外, 並不是一位熱愛教學工作的人, 這一點可以從 Guass 寫給他的朋友天文學家 W. Olbers 的信中看出。Guass 寫道: "我眞的不喜歡教課 $\cdots$ 對眞正有天賦的學生, 他們絕不會依賴於課堂上的傳授, 而必是自修得來的 $\cdots$ 作這種不值得感謝的工作, 唯一的代價是教授浪費了寶貴的時間"。由於 Guass 不喜歡教學工作, 以及當時德國數學的落後, 因此, Dirichlet 選擇了當時的世界數學中心— 巴黎, 當作學習數學的地方, 並在那裡逗留了三年 $(1822-1825)$。Dirichlet 的選擇或許是對的, 因爲他在巴黎認識了 Fourier, 而 Fourier 在數學物理這方面稱得上是權威。

Dirichlet 在 Fourier 工作影響之下, 於 1829 年在 *Crele* 雜誌上發表了關於 Foruier 級數最著名的文章 "關於三角級數的收斂性" (*Sur la convergence des séries trigonométriques*) 而同時這一篇文章也標示著 Dirichlet 是第一位給出一個有關 Fourier 級數收斂的充份條件的嚴格證明的數學家。Dirichlet 於文中首先對 Cauchy 關於 Fourier 級數收斂的推理不嚴格、以及廣度上提出批評, 然後給出了他自己的結果, Dirichlet 的結論是: 如果 $f(x)$ 是週期爲 2π, 且滿足以下條件的函數

(a) $f(x)$ 是分段連續 (Cauchy 意義下的連續)。

(b) 在區間 $[-\pi,\pi]$ 中,$f(x)$ 只有有限多個極大與極小點。

那麼 $f(x)$ 的 Fourier 級數會收斂到函數 $f(x)$ 左右極限値的算術平均數, 也就是

$$\frac{1}{2}[f(x+)+f(x-)]$$

於是, 在函數 $f(x)$ 的所有連續點處, $f(x)$ 的 Fourier 級數均會收斂到函數値 $f(x)$。檢查 Dirichlet 證明過程, 可以發現: 僅須要求 $f(x)$ 在點 x 附近是單調就可保證函數 $f(x)$ 的 Fourier 級數會收斂到 $f(x)$, 但是, 爲何 Dirichlet 須要加上"函數 $f(x)$ 是分段連續"這項連續性的假設, 原因很簡單, 就是要使得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \tag{17}$$

這些相關的積分式是存在的 (Cauchy 意義下的積分)。

因此, Dirichlet 認爲具有無窮多個極大 (小) 點、不連續點的函數, 他的結論也會成立, 而 Dirichlet 認爲所須額外的條件就是(17) 式中相關的積分均會存在, 因此, Dirichlet 面臨“怎樣的函數會具有定積分”這個問題, 而 Dirichlet 所給的答案是:

> “如果 a, b 是介於 $-\pi, \pi$ 之間的任意兩個數, 則在 a, b 之間, 總是存在 $a < r < s < b$, 使得 $f(x)$ 在 (r, s) 上是連續的。”

以現代的術語來說, Dirichlet 的可積條件等於是說: 函數 $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上的不連續點構成所謂的疏朗集 (nowhere dense set) (雖然, 這個結論是錯的)。然而, Dirichlet 在他的有生之年, 從未證明過這一點, 因爲 Dirichlet 認爲這個問題會牽涉到無窮小分析的基本問題, 而 Dirichlet 允諾在將來會發表在另一篇文章裡, 不過, 他從未完成。無論如何, Dirichlet 對於可積分函數的這一項要求是很令人玩味的, 或許可以這樣說, Dirichlet 以後的數學家對於這句話的理解多少左右了一些數學的發展。Dirichlet 這句話的意思至少有兩種涵意, 第一種是他心中有著另一種與 Cauchy 積分完全不同的新的積分, 而這一種積分只須要求積分函數的不連續點構成疏朗集即可, 比較不嚴格的講法是不連續點集是可以省略的, 但是, 一但如此, 那麼構築在 Cauchy 積分的背景下的最好積分定義應該是 Riemann 積分了。然而, 在這種情形之下, 就無須談論函數的連續性, 不過, Dirichlet 無論是在 1829 年的這篇文章, 還是在 1837 年的另一篇關於三角級數的文章 (「用正弦和餘弦級數表示完全任意的函數」(*Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen*)) 裡, 都在其所陳述的定理中強調“連續性”這項假設。然而, 如果說在 Cauchy 積分的背景下的最好積分定義應該是 Riemann 積分, 那可能也不是很客觀, Weierstrass 就曾對此提出反駁, 關於這一點, 我們後文還會在回到這一點上。

對於 Dirichlet 可積條件的另外一種解釋是: Dirichlet 可能認爲疏朗集的結構不是我們現代人所想像地那樣複雜, 一個疏朗集 D 構成的元素可能只有有限個點、或是其導集 D' (更一般爲 $D^{(n)} = (D^{(n-1)})'$ 是有限點集) 爲有限點集而已。因此, 如果函數 $f(x)$ 的不連續點所構成的集合 D 的導集 D' 爲有限點集, 特別地, 讓我們先考慮 D 僅由一個單點 c 所組成的這種特別簡單的情形, 則在以 c 爲中心的某一個區間 $(c-\delta, c+\delta)$ 以外, 應該只有有限個不連續點, 這時候, Cauchy 的積分定義

$$\int_a^b f = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{c+\varepsilon}^b f$$

就可以適用到這種情況了。循著這個方向作出工作的有 R. Lipschitz (1831 − 1904), Lipschitz 就曾將無限點集歸納爲三種, 第一種是稠密集 (dense set)、第二種是疏朗集, 最後一類則爲稠密集與疏朗集的混和體, 而其中 Lipschitz 對於疏朗集的解釋就是如同

我們上面所講。數學家們對於疏朗集的這種曲解造成了新的積分理論發展的阻礙, 大部分原因是由於集合論在當時還未被系統地發展起來, 關於這方面的討論, 後文會做適當的交代。

從以上討論可知: Dirichlet 希望能用三角級數表示出的函數類能愈廣愈好, 因此, 促使 Dirichlet 對於當時認爲函數必須是可以用解析式表示的這種觀念作出改革, 因此, Dirichlet 於 1837 年所發表的「用正弦和餘弦級數表示完全任意的函數」(*Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus-und Cosinusreihen*) 的文章裡, 引進了現代函數的觀念, 也就是:

> "若變量 y 以如下的方式與變量 x 相關聯, 只要給 x 指定一個值, 按一個規則可確定唯一的 y 值, 則稱 y 是獨立變量 x 的函數。"

Dirichlet 還特別引進以他爲名的 Dirichlet 函數來說明這一點

$$f(x)=\begin{cases} c & \text{若 } x \text{ 爲有理數} \\ d(\neq c) & \text{若 } x \text{ 不是有理數} \end{cases}$$

這個函數不但無法以一般的代數、超越運算表示, 甚至, 連圖形都畫不出來。

五. Riemann 的就職論文

> 無窮小分析最重要的原理。
>
> —J. W. R. Dedekind

不可否認 Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 − 1866) 是現代數學的大師, 雖然他的生命只有短暫的 41 年, 但是, 他所涉及的每一個領域, 都掀起了革命性的突破。Riemann 的工作也涉及到 Fourier 級數, 不過, Reimann 當初考慮這個問題的部份原因卻是因爲經濟因素。當 Riemann 於 1851 年通過他的博士論文「單複變函數一般理論基礎」答辯後, Riemann 因錯失了爭取擔任 Gottingen 觀測台助手的機會, 於是, 他得轉而求取擔任沒有薪水的大學講師資格, 也就是說, 他的薪水是從向那些來聽他講課的學生收取學費得來的。爲此, Riemann 得準備一篇所謂的就職論文, 而他的就職論文正是有關於 Fourier 級數的。恰巧在這一年 (1852) 的秋天, 柏林大學的 Dirichlet 到 Gottingen 度假, 而 Dirichlet 正是這方面的專家, 因此, 很自然地, Riemann 就向 Dirichlet 請教。後來, Riemann 在給他的父親信中寫道這一段經歷: " 宴會之後, 第二天早上, Dirichlet 和我在一起談了兩個小時, 他把他的筆記給了我, 而這正是我準備就職論文所需要的, 否則我就要在圖書館花費大量時間進行艱苦的研究才能得到這些。他還和我一起誦讀我的論文, 對我非常友好。考慮到我們之間地位的巨大差異, 這是我根本不敢想像的。我希望他以後還能記得我"。然而, Riemann 並沒有因此而馬上完成他的論文, 因爲此時的他正熱衷於數學物理的問題, 一直拖到 1853 年底, 才完成了這篇論文。或許, 有人對 Riemann 這樣的純數學家會熱衷於數學物理感到疑惑, 其實, Riemann 花在物理上的時間與純數學一樣多, 甚至, 在 Gottingen 大學的最後三個學期, 他都是物理學

家 Wilhelm Weber 的實驗室助手, 而這樣的素養, 使得 Riemann 在物理上絲毫不遜色於 Newton, Einstein 等大物理學家, 最重要的是, 這些素養使得 Riemann 得以作出他最出名的就職演講—「論作爲幾何基礎的假設」(Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen), 該講演爲物理學的幾何化作了最好的準備, 以迎接 Einstein 的到來。

Riemann 在這篇 "論函數通過三角級數的可表示性" (Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch einer trigonometrische Reihe) 的就職論文前三節中, 首先對 Fourier 級數的歷史做了一些回顧, 而這些資訊都是 Dirichlet 提供給 Riemann 的, 在討論完 Dirichlet 的論文後, Riemann 做了一個評註: "我們可以很合理的說: Dirichlet 未曾分析的函數其實是不存在自然界中的"。但是, 基於底下的兩個原因, 促使 Riemann 考慮更廣泛的函數類, 他寫道:

(1) 由於這項課題與無窮小分析的原理有著密切的關係, 並且可以使得這些原理更加清楚與正確。

(2) Fourier 級數的應用不僅侷限於物理的應用而已; 它同時已經成功地應用於許多純數學的領域之中, 比如: 數論, 而在這些領域之中, Dirichlet 未曾考慮過的函數是否可以用三角級數表示出來的問題, 似乎日趨重要。

因此, Riemann 爲了將 Dirichlet 關於函數用三角級數表達的結果推廣到儘可能多的不連續函數, 因此, Riemann 不僅接受了 Dirichlet 關於函數的現代觀念, 更進一步, Riemann 必須找尋比 Cauchy 積分更廣的積分定義, 以適用於更廣泛的函數類。因此, Riemann 在論文第四節的一開頭, 就說"我們如何了解 $\int_a^b f(x)dx$ 呢?" 他給出了類似於 Cauchy, 但比 Cauchy 更廣義的積分定義:

Riemann 的積分定義

爲建立此事, 我們取一串介於 a 與 b 之間且按大小排列的值 $x_1, x_2, \ldots, x_n$。爲方便起見, 以 δ_1 表示 $x_1 - a$, 以 δ_2 表示 $x_2 - x_1, \ldots$, 以 δ_n 表示 $b - x_{n-1}$, 以 ϵ_i 表示正的小數, 則下列和的值

$$\begin{aligned} S = {} & \delta_1 f(a+\epsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1+\epsilon_2\delta_2) \\ & +\delta_3 f(x_3+\epsilon_3\delta_3) + \cdots \\ & +\delta_n f(x_{n-1}+\epsilon_n\delta_n) \end{aligned}$$

與區間 δ_i 及數量 ϵ_i 的選取有關。如果它具有如下的性質。無論 δ_i 與 ϵ_i 如何選取, 當所有的 δ_i 變成無窮小時, 它趨近於一個固定的極限值 A, 則這個值稱爲 $\int_a^b f(x)dx$。如果它沒有這個性質, 則 $\int_a^b f(x)dx$ 是無意義的。

與 Cauchy 的積分定義作比較, Riemann 的積分定義不僅僅是用區間 $[x_{i-1}, x_i]$ 中的任一點 $\overline{x}_i$ 的函數值 $f(\overline{x}_i)$ 來取代 $f(x_{i-1})$ 的技術性考量而已, 更重要的一點是: Riemann 並不強調函數 $f(x)$ 須要在區間 $[a, b]$ 上連續, 於是, 不連續函數 (現代意義下) 眞正地進入了數學領域。接著, Riemann 提出了一個問題:

> 讓我們決定這個概念正確的程度,
> 在什麼情況下, 函數是可積, 在什
> 麼情況下又不然。

也就是說, Riemann 考慮他的可積函數可以涵蓋多少種函數? 爲此, Riemann 從有界函數 $f(x)$ 開始, 並像 Cauchy 一樣忽略了實數系的完備性, 而直接寫下了下列函數可積的充要條件

$$R(1) \quad \lim_{||P||\to 0}(D_1\delta_1+D_2\delta_2+\cdots+D_n\delta_n)=0$$

其中 $\delta_i = x_i - x_{i-1}$ 是由區間 $[a,b]$ 的分割 P 所形成的第 i 個子區間的長度; $||P||$ 就是所謂分割 P 的範數, 也就是所有 δ_i 的最大值; 而 D_i 爲 $f(x)$ 在第 i 個子區間 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的最大值與最小值的差。

Riemann 接著給出可積函數的另一個判斷條件。給定 $\sigma > 0$, 及區間 $[a,b]$ 的分割 P, 若 $S(\sigma,P)$ 表示振幅 $D_i > \sigma$ 的子區間的總長度。則定積分存在的充要條件爲

$$R(2) \quad \lim_{||P||\to 0} S(\sigma,P) = 0$$

Riemann 關於函數可積的兩個充要條件多少影響了往後積分理論的發展。首先, 第一個條件多少有點像 Camille Jordan 以容積 (content) 的觀點寫下函數可積的充要條件

$$\inf\sum_{i=1}^{n} M_i c(E_i) = \sup\sum_{i=1}^{n} m_i c(E_i)$$

其中 $[a,b] = E_1\bigcup E_2\bigcup\cdots\bigcup E_n$, $E_i\cap E_j=\emptyset$, m_i, M_i 表示函數 $f(x)$ 在點集 E_i 的最大下界與最小上界。而式中的 $\inf, \sup$ 取盡所有可能區間 $[a,b]$ 的分割 $\{E_i\}$。從這裡才有可能把積分定義推廣到最大的範圍, 然而, Riemann 並沒有認識到這一點, 最重要的是集合論還未發展起來, 這只有待後人以另外一種方式改寫這些條件後, 才能得到 Riemann 積分的擴展。但是, Riemann 的積分定義已經是用 Cauchy 和的方式所能定義的積分的最廣形式了, 這似乎是不能否認的。至於 Riemann 給出的第二個積分存在的充要條件, 反映出積分的存在性僅與函數 $f(x)$ 不連續點所構成的集合的結構有關, 至於, 函數 $f(x)$ 在這些點的值是多少倒是沒有關係, 這其實就相當於函數在零測集上改變函數值並不影響其積分值, 而零測集的概念也是在 Lebesgue 積分發展中佔有重要的角色。我們還會在後文中回到這兩個 Riemann 積分存在的充要條件。

值得一提的是 Riemann 不願像 Cauchy 一樣斷定: 連續函數都是可積的, 因爲, 連續函數在閉區間上是均勻連續的嚴格證明, 一直到 1870 年代才得到。在這一點上, 表現出 Riemann 的風格與 Cauchy 不同。雖然, Cauchy 寫作論文之快與多, 甚至多到讓巴黎科學院因爲無法應付快速增長的印刷費, 而通過了一項規定: “禁止發表超過四頁的文章”, 然而, Cauchy 也同樣遭到一些人對於 Cauchy 爲文草率的嚴厲批評。然而, Riemann 或許因爲受到 Guass 不輕易發表作品的影響, 或許也是 Riemann 生命短暫的緣故, Riemann 一生發表的作品很少, 但是, 每一件作品都在那個領域裡掀起了革命性的波濤。

雖然, Riemann 並沒有證明: 連續函數都是可積的, 但是, Riemann 在就職論文的

最後 給出了不連續點集包含一個稠密集, 但卻可積的函數。由於這個函數具有分析上的重要性, 所以, 我們接著介紹這個函數。設 x 爲任一個不爲 $\frac{1}{2}$ 奇數倍的實數, 則 $(x)=x-[x]$, 其中 $[x]$ 爲高斯函數; 當 x 爲 $\frac{1}{2}$ 的奇數倍時, 則函數 $(x)=0$, 由此, Riemann 的函數 $f(x)$ 定義爲下列無窮級數的和

$$f(x)=\frac{(x)}{1^2}+\frac{(2x)}{2^2}+\frac{(3x)}{3^2}+\cdots+\frac{(nx)}{n^2}+\cdots \tag{18}$$

可以證明, $f(x)$ 的不連續點爲型如 $\frac{m}{2n}$ 的數, 其中 m, n 爲互質的整數, 而當 x 爲 $f(x)$ 的不連續點時, 其跳躍度爲

$$f(x-0)-f(x+0)=\frac{1}{n^2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}=\frac{\pi^2}{8n^2} \tag{19}$$

利用 Riemann 的第二個可積充要條件, 很容易證明 Riemann 的函數 $f(x)$ 是可積的。這個函數最重要的應該是其不連續點集有無窮多個且在直線上是稠密的, 因爲這表示出 Riemann 允許具有無窮多個不連續點的函數進入其積分, 而在 Cauchy(或說 Fourier) 之前的積分函數則均是具有解析表示式的函數, Dirichlet 的積分函數雖然放鬆一些, 但是, Dirichlet 不允許他的積分函數有太多的不連續點 (從拓樸的角度而言)。這個例子同時也說明了十八世紀數學家對於連續與可微的誤解: 雖然, $f(x)$ 具有一個解析表示式, 但是, 它卻具有既多且密的不連續點; 另一方面, 它的連續點幾乎佈滿了整條直線, 但是, 它的不可微點也很多, 這與我們現在對於連續函數的直觀了解有很大的出入。

Riemann 有了更廣義的積分與函數的觀念之後, Riemann 提出他用以研究三角級數的重要函數, 設

$$(T)\quad \frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

爲一滿足當 $n\to\infty$ 時, $a_n, b_n\to 0$ 的三角級數, 把 (T) 形式上連續積分兩次, 得到了著名的 Riemann 函數

$$F(x)=\frac{1}{4}a_0x^2+\alpha x+\beta-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{20}$$

其中 α, β 爲積分常數。我們無法在此深入一些細節, 在這裡僅指出 Riemann 從這個函數出發, 得出一個函數是否可以表示爲 Fourier 級數的充要條件。更重要的是, Riemann 提出了一個深刻的問題: 給定一個函數, 它的三角級數表示式是否唯一? 由於這個問題, 使得 Georg Cantor (1845 – 1918) 開創了集合論這個劃時代的研究。

一段小結

首先, 函數的觀念從十七世紀的具有解析表示式的函數, 由於弦振動的論戰, 使得 Euler 考慮所謂具有間斷點的“不連續” 函數 (其實是連續但具有間斷導數的函數), 以及怎樣的函數具有三角級數表示式。進入十九世紀之後, 由於 Fourier 宣稱“任意函數, 包括不連續函數與無解析表示式而僅能用圖示的函數, 均可由三角級數表示”, 使得數學家不得不重新思考什麼是函數、連續與不連續函數? Cauchy 急於給于 Fourier 工

作嚴密性, 而為極限下了個算術化定義的雛型, 從而使得連續、可微建築在極限的基礎之上。更進一步, 將定積分的定義— 從 Newton 以來積分是微分逆運算的觀念, 轉變為某種求和的極限觀念, 這種改變是重要的, 因為將積分視為"微分逆運算"的觀念, 使得許多人以為函數積分的存在性是必然的 (部份原因是對函數認識不清), 只有將積分視成是求和的極限, 才使得大家更有可能區別連續與不連續函數的區別。接下來, Dirichlet 批評 Cauchy 對於三角級數收斂性證明不嚴格, 而使得 Dirichlet 第一次嚴格地證明了有關 Fourier 級數收斂的一個充份條件, Dirichlet 為了將這個結果擴展到更大範圍的函數類, 促使他引進所謂現代函數的觀念, 並考慮什麼樣的函數具有積分。Riemann 為了謀求分析基礎的嚴密與清晰, 在他的就職論文中, 討論了 Dirichlet 留下的問題, 也就是什麼樣的函數是值得探討的, 什麼樣的函數具有積分, 由此, 給出了到現在為止, 仍非常通用的 Riemann 積分, 同時給出了兩個積分存在的充要條件; 這兩個條件, 其中第一個暗示著另外一種積分的定義 (也就是以 Jordan 的容積觀點), 另外一種, 也就是$R(2)$ 則同時顯現出 Riemann 積分允許的函數其實是有限制。不論哪一種, 都須要對於點集的徹底研究, 才能找到更好的積分。

致謝: 本文承蒙洪萬生老師給于諸多指正與意見, 才能使得本文能以較佳的面貌與讀者見面, 在此, 表示最誠摯的謝意。

參考文獻

1. C. H. Edwards, *The historical development of the calculus.* Springer-Verlag, 1979.
2. H. Eves, *An Introduction to the history of mathematics.* Saunders College, 1990, 6nd. ed.
3. L. Garding, *Encounter with mathematics.* Springer-Verlag, 1977.
4. T. Hawkins, *Lebesgue's Theory of Integration: Its Origins and Development.* New York: Chelsea, 1975, 2nd. ed.
5. M. Kline, 數學史 — 數學思想的發展, 九章出版社, 1983。
6. E. T. Bell, 大數學家, 九章出版社, 1999。
7. 吳文俊主編, 世界著名科學家傳記 (III), (V), 科學出版社, 1992。
8. 李文林主編, 數學珍寶— 歷史文獻精選, 科學出版社, 1998。

—本文作者任教於省立板橋高中—