牛頓計算 π

林聰源

牛頓的二項式定理

在牛頓 (Newton) 偉大的作品中, 我們只探討其中一小部分, 這是二項式定理, 它是牛頓在數學中第一個偉大的發現。依照歐幾里得或阿基米德的說法, 這不能稱之爲“定理”, 因爲牛頓沒有提供完整的證明。但他獨到的眼光與直覺, 使他寫出整個公式並且以美妙的方式應用了它。

二項式定理討論了式子 $(a+b)^n$ 的展開式。只要簡單的代數便可得出

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

等等。當然了, 如果能直接寫 $(a+b)^{12}$ 中 a^7b^5 的係數, 而無需將 $a+b$ 自己相乘12次那就太好了。二項式展開的問題早在牛頓出生以前就已經被提出來了, 而且也被解決了。中國數學家楊輝在十三世紀就知道其中的秘密, 可惜他的工作歐洲沒有人知道, 直到近代。維也特 (Vieta) 在他的工作中, 也遭遇了二項的乘冪。但巴斯卡 (Pascal) 由於發現了它的係數而成名。巴斯卡注意到係數可從下列“巴斯卡三角形”的各列輕易得出:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
&&&&&&&1&&&&&&&\\
&&&&&&1&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&2&&1&&&&&\\
&&&&1&&3&&3&&1&&&&\\
&&&1&&4&&6&&4&&1&&&\\
&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&\\
&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&\\
1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1
\end{array}$$

等等

三角形中的每一項由其上列左邊與右邊兩個元素相加而得。因此, 根據巴斯卡的說法, 下一列是

$$1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1$$

其中, 譬如說, 56是由前項的左、右兩數21與35相加而得。

巴斯卡三角形與 $(a+b)^8$ 的展式之間的連繫是立即的。因爲三角形最後一行給了我們所需的係數。即

$$(a+b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3$$
$$+70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6$$

$$+8ab^7+b^8$$

將三角形再擴展幾行, 我們便得792是 $(a+b)^{12}$ 展式中 a^7b^5 的係數。三角形的用途是顯而易見的。

年輕的牛頓當他想到二項展式時, 能夠設計出一個公式來直接生成二項係數, 無需繁煩地畫出三角形, 畫到足夠的列數。而且, 他深信, 像 $(a+b)^2$ 或 $(a+b)^3$ 這些二項乘冪的係數其生成公式的模式對 $(a+b)^{\frac{1}{2}}$ 或 $(a+b)^{-3}$ 同樣也成立。

這裡我們需要說一下分數與負數冪次。在基礎代數課程中, 我們學到 $a^{1/n}=\sqrt[n]{a}$ 而 $a^{-n}=1/a^n$。牛頓可能不是第一位體認到這些關係的人, 但他經常用到式子 $\sqrt{1+x}$ 或 $1/(1-x^2)$。

這裡記載的是1676年牛頓寫給與他同時代的萊比尼茲 (Leibnitz) 的一封重要的信。牛頓對他的二項展式是這麼說的:

$$\begin{aligned}&(P+PQ)^{m/n}\\&=P^{m/n}+\frac{m}{n}AQ+\frac{m-n}{2n}BQ\\&\quad+\frac{m-2n}{3n}CQ+\frac{m-3n}{4n}DQ+\cdots\end{aligned}$$

其中 $P+PQ$ 是考慮中的二項式, m/n 是二項式的冪次, 可能是正或負, 整數或分數, 而 A, B, C 等等表示展式中前面那一項。

對那些已經看過現代版的二項展式的人來說, 牛頓的陳述看起來很生疏, 怪怪的。但仔細看一下什麼問題都沒有了。首先我們注意

$$\begin{aligned}A&=P^{m/n}\\B&=\frac{m}{n}AQ=\frac{m}{n}P^{m/n}Q\\C&=\frac{m-n}{2n}BQ=\frac{(m-n)m}{(2n)n}P^{m/n}Q^2\\&=\frac{(\frac{m}{n})(\frac{m}{n}-1)}{2}P^{m/n}Q^2\\D&=\frac{m-2n}{3n}CQ\\&=\frac{(\frac{m}{n})(\frac{m}{n}-1)(\frac{m}{n}-2)}{3\times 2}P^{m/n}Q^3\\&\text{等等}\end{aligned}$$

那麼, 應用牛頓的公式, 從式子兩邊提出共同的 $P^{m/n}$, 我們得

$$\begin{aligned}&P^{m/n}(1+Q)^{m/n}\\&=(P+PQ)^{m/n}\\&=P^{m/n}[1+\frac{m}{n}Q+\frac{(\frac{m}{n})(\frac{m}{n}-1)}{2}Q^2\\&\quad+\frac{(\frac{m}{n})(\frac{m}{n}-1)(\frac{m}{n}-2)}{3\times 2}Q^3+\cdots]\end{aligned}$$

消去 $P^{m/n}$, 便得

$$\begin{aligned}(1+Q)^{m/n}&=1+\frac{m}{n}Q+\frac{(\frac{m}{n})(\frac{m}{n}-1)}{2}Q^2\\&\quad+\frac{(\frac{m}{n})(\frac{m}{n}-1)(\frac{m}{n}-2)}{3\times 2}Q^3\\&\quad+\cdots\end{aligned}$$

這是大家都熟悉的式子。

現在我們跟隨牛頓的脚步, 將這公式應用到幾個特別的例子。譬如, 展開 $(1+x)^3$ 時, 我們以 x 代 Q, 以3代 m/n, 便得

$$\begin{aligned}&(1+x)^3\\&=1+3x+\frac{3\times 2}{2}x^2+\frac{3\times 2\times 1}{3\times 2}x^3\\&\quad+\frac{3\times 2\times 1\times 0}{4\times 3\times 2}x^4+\cdots\end{aligned}$$

$$= 1 + 3x + \frac{6}{2}x^2 + \frac{6}{6}x^3 + \frac{0}{24}x^4 + \frac{0}{120}x^5 + \cdots$$
$$= 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$

這正是巴斯卡三角形生成的橫式; 由於我們的冪次是正整數3, 展式在四項以後停止了。

當冪次爲負時一個相當不一樣的現象正等待著牛頓。作爲一個例子, 展開 $(1+x)^{-3}$, 他的公式給出

$$1 + (-3)x + \frac{(-3)(-4)}{2}x^2 + \frac{(-3)(-4)(-5)}{6}x^3 + \cdots$$

或

$$(1+x)^{-3} = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + 15x^4 + \cdots$$

其中右邊的級數絕不終止。由負冪次的定義這方程變成

$$\frac{1}{(1+x)^3} = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + 15x^4 + \cdots$$

或等價於

$$\frac{1}{1+3x+3x^2+x^3} = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + 15x^4 + \cdots$$

牛頓用交叉相乘及消去證實了這個結果, 確實有

$$(1+3x+3x^2+x^3) \times (1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + 15x^4 + \cdots) = 1$$

當他展開式子 $\sqrt{1-x} = (1-x)^{1/2}$ 時, 事情變得更加奇怪。現在 $Q = -x$, 而 $m/n = 1/2$, 所以

$$\sqrt{1-x} = 1 + \frac{1}{2}(-x) + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})}{2}(-x)^2 + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{6}(-x)^3 + \cdots$$
$$= 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 - \frac{7}{256}x^5 - \cdots \qquad (*)$$

爲了核驗這一奇特的公式, 牛頓拿右邊的無窮級數和自己相乘, 也就是說, 他將它平方:

$$(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 - \cdots) \times (1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 \cdots)$$
$$= 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + \frac{1}{16}x^3 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{1}{16}x^3 + \cdots$$
$$= 1 - x + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 + \cdots$$
$$= 1 - x$$

因此

$$(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 - \cdots)^2 = 1 - x$$

這就驗證了牛頓所說的

$$1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 - \cdots = \sqrt{1-x}$$

“因爲這個定理, 取平方根變得大爲省力”牛頓這麼說。假定我們要找 $\sqrt{7}$ 的一個十進位

近似值。先注意到

$$7=9(\frac{7}{9})=9(1-\frac{2}{9})$$

所以$\sqrt{7}=\sqrt{9(1-\frac{2}{9})}=3\sqrt{1-\frac{2}{9}}$ 現在把平方根用 $(*)$ 所示二項展式中的頭6項來代替, 以$2/9$取代 x。我們得

$$\begin{aligned}\sqrt{7}\approx 3(1-\frac{2}{9}-\frac{1}{162}-\frac{1}{1458}-\frac{5}{52488}\\ -\frac{7}{472392})\\ =2.64576\end{aligned}$$

這個結果與 $\sqrt{7}$ 之眞值只差0.00001, 只用了六項, 實在了不起。如果我們多用幾個項, 保證可以估計得更準。同樣地, 相同的技巧也可提供三次方根、四次方根的近似值, 因爲我們可應用二項式定理展開 $\sqrt[3]{1-x}=(1-x)^{1/3}$, 如前一樣進行。

牛頓反流術—積分

這件事發生在1669年, 不過, 牛頓直到1711年才發表。牛頓說:

令任意曲線 AD 的底爲 AB, 而 BD 平行於縱軸。$AB=x$, $BD=y, a, b, c$ 等等爲已知數量, 而 m 及 n 爲整數。則

規則 1: 若 $ax^{m/n}=y$, 則 $\frac{an}{m+n}x^{(m+n)/m}=$面積$ABD$。

在圖1中, 牛頓要求水平軸之上, 曲線 $y=ax^{m/n}$ 之下, 向右直到 x 點之間的面積。根據牛頓, 這個面積是 $\frac{an}{m+n}x^{(m+n)/n}$。譬如說, 我們取直線 $y=x$ (圖2), 則 $a=m=n=1$,

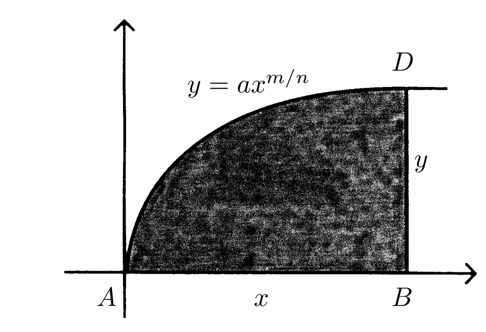


圖1

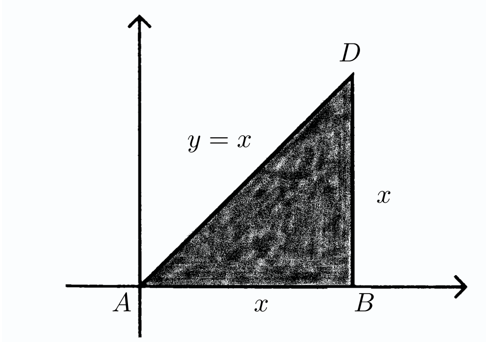


圖2

此公式給出面積 $(1/2)x^2$, 這可由三角形面積=1/2(底) × (高) 簡單地驗證。同樣地, 在 $y=x^2$ 之下介於原點與 x 點的面積是

$$x^{2+1}/(2+1)=x^3/3$$

牛頓還有一個規則2, “如果 y 的值是由許多項所組成, 則面積也是用每一項所得出的面積再求和而得。”舉個例, 他說在曲線 $y=x^2+x^{3/2}$ 之下的面積是

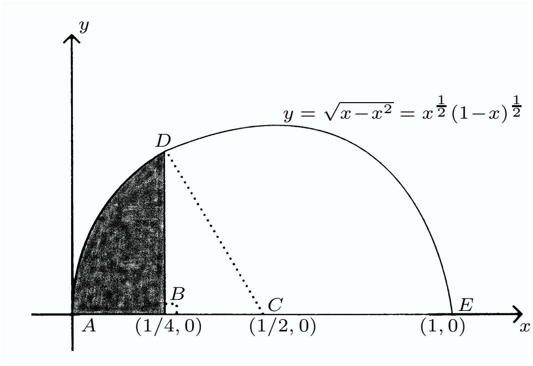
$$\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$$

這就是牛頓的工具: 二項式定理及曲線下求面積。這些工具在他遭遇數學及物理問題時無往而不利。下面我們要來看牛頓如何應用這些工具帶給古老的問題: π

的值的估計, 一個全新的面貌。阿基米德 (Archimede) 和維也特等人愈來愈精確地決定了 π, 在1670年左右, 牛頓挾帶著他美妙的新工具, 對這古老的死敵下達了攻擊令。

牛頓計算的 π 的近似值

牛頓顯然精通解析幾何的概念, 這由下面的工作即可看出。他取一個半圓, 圓心在 $C(1/2,0)$, 半徑爲 $r=1/2$, 如下圖。



他知道圓的方程是

$$(x-1/2)^2+(y-0)^2=(\frac{1}{2})^2,$$

$$\text{即}\quad x^2-x+y^2=0$$

解出 y 得

$$\begin{aligned}y&=\sqrt{x-x^2}=\sqrt{x}\sqrt{1-x}\\&=x^{1/2}(1-x)^{1/2}\end{aligned}$$

爲什麼他選這個特別的半圓呢? 你也許覺得奇怪, 但請你看到最後就明白了!

由二項式展開的公式

$$\begin{aligned}y&=x^{1/2}(1-x)^{1/2}\\&=x^{1/2}(1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4\\&\quad-\frac{7}{256}x^5-\cdots)\\&=x^{1/2}-\frac{1}{2}x^{3/2}-\frac{1}{8}x^{5/2}-\frac{1}{16}x^{7/2}\\&\quad-\frac{5}{128}x^{9/2}-\frac{7}{256}x^{2/11}-\cdots\end{aligned}$$

現在, 牛頓的天才顯現了出來。他令 B 代表點 (1/4,0), (請見上圖), 並畫出 BD 垂直於半圓的直徑 AE。然後他以兩種不同的方式計算陰影部分 ABD 的面積:

1. 用流數法

由流數法, 這裡曲線下由原點到 $x=1/4$ 點的面積是

$$\begin{aligned}&\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}})-\frac{1}{8}(\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}})\\&\quad-\frac{1}{16}(\frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}})-\cdots\\&=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}}-\frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}}\\&\quad-\frac{5}{704}x^{\frac{11}{2}}-\cdots\end{aligned}$$

在 $x=1/4$ 所取的值。由於

$$(\frac{1}{4})^{3/2}=(\sqrt{\frac{1}{4}})^3=\frac{1}{8},$$

$$(\frac{1}{4})^{5/2}=(\sqrt{\frac{1}{4}})^5=\frac{1}{32}\quad\text{等等}$$

因此計算後的數值大爲簡化, 取其前九項便得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{12}-\frac{1}{160}-\frac{1}{3584}-\frac{1}{36864}\\&-\frac{5}{1441792}-\cdots-\frac{429}{163208757248}\\&=0.07677310678\end{aligned}$$

2. 用幾何方法

另方面, 牛頓從純幾何的觀點看這問題。首先他決定直角三角形 $\triangle DBC$ 的面積。注意, BC 的長度是 1/4, 而 CD 爲半徑, 其長爲 $r = 1/2$。直接應用畢氏定理, 得出

$$\overline{BD} = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{4})^2} = \sqrt{\frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

因此

$$\begin{aligned} &\triangle DBC \quad \text{的面積} \\ &= \frac{1}{2}\overline{BC} \times \overline{BD} \\ &= \frac{1}{2}(\frac{1}{4})(\frac{\sqrt{3}}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{32} \end{aligned}$$

然後牛頓需要扇形 ACD 的面積。他注意到 $\triangle DBC$ 中 BC 的長度爲斜邊 CD 之半, 因此這是一個 30° -60° -90° 的直角三角形, $\angle BCD$ 是 60°。所以扇形的面積是整個半圓的三分之一。簡而言之,

$$\begin{aligned} \text{扇形面積} &= \frac{1}{3}\text{半圓面積} = \frac{1}{3}(\frac{1}{2}\pi r^2) \\ &= \frac{1}{3}[\frac{1}{2}\pi(\frac{1}{2})^2] = \frac{\pi}{24} \end{aligned}$$

上式中, π 這個數出現了。

由幾何方法, 陰影部分的面積等於

$$\begin{aligned} ABD\text{的面積} &= \text{扇形的面積} \\ &\quad -\triangle DBC\text{的面積} \\ &= \frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{32} \end{aligned}$$

這個結果跟前面由流數法得到的結果互相比較, 便得

$$0.07677310678 \approx \frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{32},$$

於是解出 π 的近似值爲

$$\begin{aligned} \pi &\approx 24(0.07677310678 + \frac{\sqrt{3}}{32}) \\ &= 3.141592668 \cdots \end{aligned}$$

這估計值令人驚奇的一點是, 只用了二項式展開的幾個項, 就求出 π 正確到七位小數, 而我們剛才所得的估計值跟 π 的眞值差別不到 0.00000014。比起維也特及魯道夫 (Rudolph) 可怕的計算這是一項很大的進展。這個技巧唯一眞正的困難是需要對 $\sqrt{3}$ 作一準確的估計。但是, 我們已經看過了, 牛頓的二項式定理可以輕易地計算平方根。簡而言之, 這個結果明白地展示了他的新穎的數學發現在處理古老問題時非常有效, 而且是成功的。(取材自: Dunham: Jounney throuth genius, Wiley, 1990)

—本文作者任教於清華大學數學系—