星空燦爛的數學(I)
——托勒密如何編製弦表?

蔡聰明

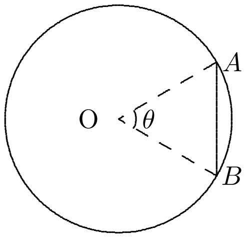
摘要: 古希臘的偉大天文學家托勒密說:「平凡若我者, 本應如蜉蝣一般朝生暮死。但是, 每當我看到滿天的繁星, 在不朽的天空, 按照自己的軌道井然有序地運行時, 我就情不自禁地有身在天上人間的感動, 好像是天帝宙斯 (Zeus) 親自饗我以神饌。」這種激情 (passion) 就是支持托勒密不息工作的動力泉源, 他用數學來捕捉星空的規律、對稱、恆常與美。然而, 星空的規律 (如周轉圓、天動說) 短暫, 會過時, 留下的數學卻萬古長青。

天文現象離人類最遙遠, 但是星空卻最容易令人產生秩序感、敬畏、驚奇與美感 (sense of order、awe、wondering and beauty), 加上制訂曆法和農耕的需要, 這些就導致天文學變成是最早發展的一門學問, 同時也促動了 (平面與球面) 幾何學和三角學的誕生。

圖一. 托勒密 (與天文女神)。"我們只報告曾被古人嚴格證明的事實。"

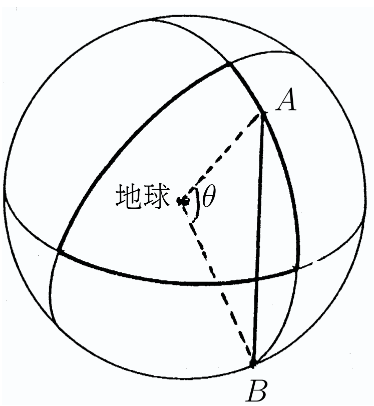
天文學與幾何學、算術、音樂形成古希臘的四藝 (quadrivium); 到了中世紀再加上三藝 (trivium): 文法 (grammar)、修辭 (rhetoric)、辯證 (dialectic), 合成七藝 (seven liberal arts and sciences)。

需要爲發明 (或發現、創造) 之母。在接受地球中心說 (geocentric theory) 之下, 天文學家托勒密 (Claudius Ptolemy, 約西元 100-178年, 請不要跟古埃及托勒密王朝的托勒密一世、二世$\cdots$混淆), 參見圖一, 爲了天文學的「測星」與幾何學「測地」之需要, 必須知道各種圓心角θ所對應的弦$\overline{AB}$之長, 參見圖二。我們不妨假設圓的半徑$R=1$, 因爲一切都是比例問題。

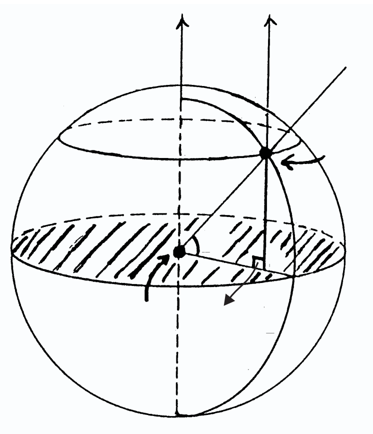


圖二

詳言之, 在同一個球面上兩個星球的距離就是一根全弦的長, 即圖三的$\overline{AB}$。另外, 星球與地平面的距離是半弦之長, 即圖四的$\overline{AC}$, 它是圓心角之半$\frac{1}{2}\theta$的正弦, 即$\sin\frac{1}{2}\theta$, 半徑R已取爲1。在使用上, 全弦與半弦只差個2的因子, 所以並沒有區別。



圖三



圖四

托勒密在西元150年出版13冊的數學文集, 蒐集當時已知的數學與天文學知識, 加上自己的獨創, 並且利用離心圓 (eccentric circles) 與周轉圓 (epicycles, 即一個轉動圓, 其圓心又在另一個轉動圓的圓周上), 成功地描述了行星運動的軌道, 保住了行星運動的現象, 並且鞏固了地球中心說。這使得在他之前的三角學與天文學著作都黯然失色, 甚至失傳, 眞正發揮了「良幣驅逐劣幣」的功能。

後來, 托勒密這套書傳到阿拉伯世界, 約在西元800年被翻譯成阿拉伯文, 阿拉伯人尊稱爲「Almagest」, 意指「最偉大的書」。後世的數學史家也稱讚它具有完備性 (completeness)、緊緻性 (compactness) 以及典雅性 (elegance)。歐幾里得 (Euclid)13冊的「幾何原本」之於幾何學, 就相當於托勒密13冊的「Almagest」之於天文學。

「Almagest」在西方失傳, 到了十三世紀末, 由阿拉伯傳回西方, 譯成拉丁文, 使得歐洲人重新認識古希臘文化的精神, 開始了文藝復藝運動。托勒密的天文體系, 一直沿用到十六、七世紀, 才逐漸被哥白尼 (Copernicus, 1473-1543) 與刻卜勒 (Kepler, 1571-1630) 的太陽中心說 (heliocentric theory) 所取代, 這就是著名的哥白尼革命, 接著啓動十七世紀的科學革命, 十八世紀的啓蒙運動、政治革命, 十九世紀的工業革命, 以至於二十世紀今日的資訊與分子生物學之革命。

托勒密在 「Almagest」 的第一冊中編製了一個數值表, 對於圓心角θ從$0°$開始, 以$0.5°$的間隔變到$180°$, 列出全弦$\overline{AB}$ $=$

$\mathrm{Crd}(\theta)$之長, 叫做弦表 (a table of chords), 參見圖二。因為

$$\mathrm{Crd}(\theta) = 2\sin\frac{\theta}{2}$$

所以弦表就相當於從$0°$開始, 以$0.25°$為間隔變到$90°$之正弦函數表。事實上, 托勒密選取圓的半徑$R = 60$, 即採用巴比倫的六十分制。托勒密的弦表在天文學界使用了大約一千年之久, 直到三角函數表出現為止。

天文學是數學 (也是物理學) 的故鄉。托勒密對於「一根弦的秘密」與「行星的運行」之追尋, 除了產生幾何學與三角學之外, 進一步變成往後一些數學發展的泉源。例如, 周轉圓的概念是十九世紀傅立葉分析 (Fourier Analysis) 的胚芽之一。因此, 托勒密的工作堪稱為「有源頭活水」。宋朝的朱熹, 在「觀書有感」中說得好:

半畝方塘一鑒開,
天光雲彩共徘徊,
問渠哪得清如許?
為有源頭活水來。

本文我們要用一系列的文章, 介紹托勒密的偉大工作, 背後所牽涉的數學, 以及一些後續的數學發展。現在我們就先從「托勒密如何編製弦表」談起。

一. 特別角所對應的弦長

托勒密要編製的弦表, 就是完成下面的表格:

圓心角θ	$0°, 0.5°, 1°, 1.5°, \cdots, 180°$
相應的弦長 $\overline{AB} = \mathrm{Crd}(\theta)$	$0, \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots, 2$

按常理, 當然是從簡易處著手。

大家都知道, 正多邊形有無窮多種; 但是正多面體不多也不少, 恰有五種, 叫做柏拉圖 (Plato) 五種正多面體。在正多邊形中, 以正三、四、五、六、十邊形之邊長, 較容易求得, 只需用一點兒平面幾何的知識。

(i) 圓內接正三角形, 參見圖五。

$\theta = 120°$, 由畢氏定理知

$$\begin{aligned}\mathrm{Crd}(120°) = \overline{AB} &= \sqrt{2^2 - 1^2}\\ &= \sqrt{3} \doteqdot 1.732\end{aligned}$$

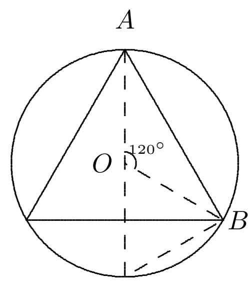
(ii) 圓內接正方形, 參見圖六。

$\theta = 90°$, 由畢氏定理知

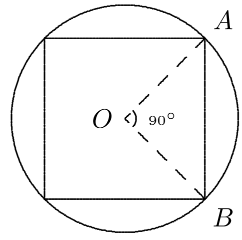
$$\mathrm{Crd}(90°) = \overline{AB} = \sqrt{1^2 - 1^2} = \sqrt{2} \doteqdot 1.414$$

(iii) 圓內接正六邊形, 參見圖七。

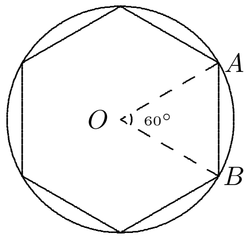
$\theta = 60°$, $\mathrm{Crd}(60°) = \overline{AB} = 1$。



圖五



圖六



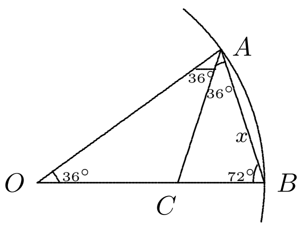
圖七

二. 正五邊形與正十邊形

正五邊形與正十邊形的關係密切, 我們由後者切入較容易。

在圖八中, 令 $\overline{AB}=x$ 表示正十邊形一邊之長, 它所對應的圓心角爲36°。由三角形三內角和爲180°之定理知

$$\angle OAB=\angle OBA=72^\circ$$



圖八

以 A 點爲圓心, $\overline{AB}$ 爲半徑作一圓弧交 $\overline{OB}$ 於 C 點, 則 $\overline{AC}=x$, 從而 $\triangle ABC$ 與 $\triangle ACO$ 皆爲等腰三角形。因此,

$$\overline{OC}=\overline{AC}=x,\overline{CB}=1-x$$

因爲$\triangle OAB$ 與$\triangle ABC$相似, 所以

$$\frac{1}{x}=\frac{x}{1-x}$$
$$x^2+x-1=0$$

解得

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

負根不合, 棄之, 故得

$$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

這就是正十邊形一邊之長。

(iv) 圓內接正十邊形

$$\theta=36^\circ,$$
$$\mathrm{Crd}(36^\circ)=\overline{AB}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$
$$\fallingdotseq 0.618$$

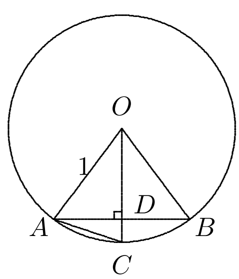
注意:$\triangle OAB$叫做黃金三角形, $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$叫做黃金數。

接著, 我們考慮正五邊形。如圖九, 假設$\overline{AB}$與$\overline{AC}$分別爲正五邊形與正十邊形之一邊。令$\overline{OD}=x$, 則$\overline{CD}=1-x$。因爲$\overline{AB}\perp\overline{OC}$, 故由畢氏定理知

$$\overline{AO}^2=\overline{OD}^2+\overline{AD}^2$$
$$\overline{AC}^2=\overline{CD}^2=\overline{AD}^2$$

兩式相減得

$$\overline{AO}^2-\overline{AC}^2=\overline{OD}^2-\overline{CD}^2$$



圖九

又因爲$\overline{AC}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 故

$$1-(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^2=x^2-(1-x)^2$$

解得

$$x=\overline{OD}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

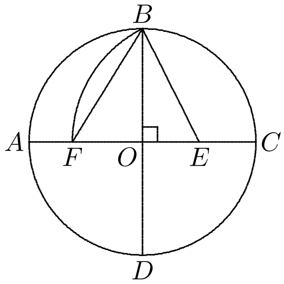
又$\overline{AD}^2=\overline{OA}^2-\overline{OD}^2$, 故

$$\overline{AD}^2=1-(\frac{\sqrt{5}+1}{4})^2=\frac{10-2\sqrt{5}}{16}$$
$$\overline{AB}=2\overline{AD}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$$

(v) 正五邊形

$$\theta=72°,$$
$$\mathrm{Crd}(72°)=\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$
$$\doteqdot 1.176$$

由上述結果, 我們順便可得到正五邊形與正十邊形的尺規作圖方法: 如圖十, 作一單位圓, 圓心爲O, 再作互相垂直的兩直徑 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$。取半徑 $\overline{OC}$ 的中點 E, 以 E 爲圓心, $\overline{EB}$ 爲半徑, 作圓弧交 $\overline{OA}$ 於 F 點, 則易驗知 $\overline{OF}$ 與 $\overline{BF}$ 分別爲圓內接正十邊形與正五邊形的一邊, 從而可作出正五邊形與正十邊形。由此更容易求得 Crd(36°) 與 Crd(72°)



圖十

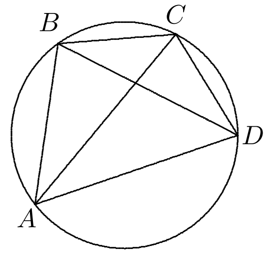
三. 托勒密定理及其應用

爲了探求更多圓心角所相應的弦長, 我們要先準備一個基本的建構工具: 從已知兩個角的弦長, 求出和角與差角的弦長。這必須用到下面著名的幾何定理:

定理 1 (托勒密定理, 西元150年): 設 $ABCD$ 爲圓的內接四邊形, 則

$$\overline{AC}\cdot\overline{BD}=\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{BC}\cdot\overline{AD}$$

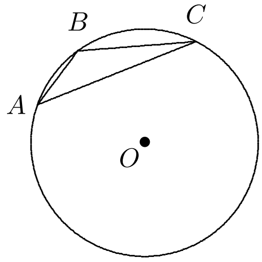
亦即兩條對角線之乘積等於兩雙對邊乘積之和, 參見圖十一。



圖十一

對於這個定理的發現、證明以及相關的發展, 我們留待以後另文解說。現在我們就利用這個定理來幫忙編製弦表。

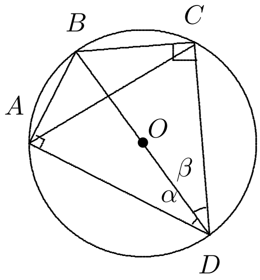
問題 1: 如圖十二, 在單位圓中, 已知兩弦$\overline{AB}$與$\overline{BC}$, 試求弦$\overline{AC}$。



圖十二

過 B 點作直徑$\overline{BD}$, 連結$\overline{CD}$與$\overline{AD}$, 那麼上述問題就相當於: 已知兩圓周角α與β所

對應的弦$\overline{AB}$ 與$\overline{BC}$, 欲求和角$\alpha+\beta$所對應的弦$\overline{AC}$, 參見圖十三。



圖十三

由托勒密定理知

$$\overline{AC}\cdot\overline{BD}=\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{BC}\cdot\overline{AD} \quad (1)$$

又由$\overline{BD}=2$及畢氏定理知

$$\overline{CD}=\sqrt{4-\overline{BC}^2}$$
$$\overline{AD}=\sqrt{4-\overline{AB}^2}$$

代入 (1) 式得到:

推論1: 在單位圓內, 已知兩弦 $\overline{AB}$ 與 $\overline{BC}$, 則

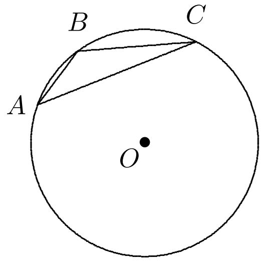
$$\overline{AC}=\frac{\overline{AB}}{2}\sqrt{4-\overline{BC}^2}+\frac{\overline{BC}}{2}\sqrt{4-\overline{AB}^2} \quad (2)$$

進一步, 利用正弦定律 (Law of sine) 可知, (1) 式等價於正弦函數的和角公式 (或複角公式)

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad (3)$$

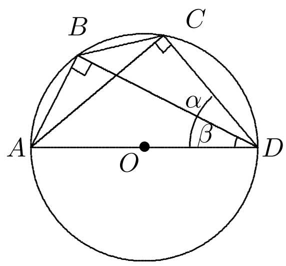
請讀者補上證明。

問題2: 如圖十四, 在單位圓中, 已知兩弦$\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$, 試求弦$\overline{BC}$。



圖十四

過 A 點作直徑$\overline{AD}$, 連結$\overline{BD}$ 與$\overline{CD}$, 那麼上述問題就相當於: 已知兩圓周角的α與β 所對應的弦$\overline{AC}$ 與$\overline{AB}$, 欲求差角$\alpha-\beta$所對應的弦$\overline{BC}$, 參見圖十五。



圖十五

由托勒密定理與畢氏定理可以推得:

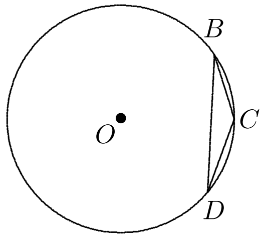
推論2: 在單位圓內, 已知兩弦$\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$, 則

$$\overline{BC}=\frac{\overline{AC}}{2}\sqrt{4-\overline{AB}^2}-\frac{\overline{AB}}{2}\sqrt{4-\overline{AC}^2} \quad (4)$$

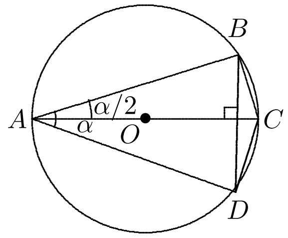
習題1: 在圖十五中, 試證托勒密定理等價於正弦函數的差角公式

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \quad (5)$$

問題3: 如圖十六, 在單位圓中, 已知一弦$\overline{BD}$, 並且C 爲弧$\overset{\frown}{BD}$ 的中點, 試求弦$\overline{BC}$ (或$\overline{CD}$)。



圖十六



圖十七

過 C 點作直徑$\overline{AC}$, 連結$\overline{AB}$, $\overline{AD}$與$\overline{BD}$, 則上述問題就相當於: 已知圓周角α 所對應的弦$\overline{BD}$, 欲求半角$\frac{\alpha}{2}$ 所對應的弦$\overline{BC}$, 參見圖十七。

由托勒密定理得知

$$\overline{AC}\cdot\overline{BD}=\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC} \quad (6)$$

又$\overline{AC}=2$, $\overline{BC}=\overline{CD}$, 再由畢氏定理知

$$\overline{AB}=\overline{AD}=\sqrt{4-\overline{BC}^2}$$

代入 (6) 式得到

$$2\cdot\overline{BD}=2\overline{BC}\sqrt{4-\overline{BC}^2} \quad (7)$$

於是

$$\overline{BC}^4-4\overline{BC}^2+\overline{BD}^2=0$$

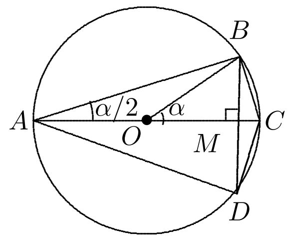
解出 $\overline{BC}^2$ 得到

$$\overline{BC}^2=2\pm\sqrt{4-\overline{BD}^2} \quad (8)$$

正號不合。因此, 我們得到:

推論3: 在單位圓, 已知弦$\overline{BD}$ 並且C爲弧$\overparen{BD}$之中點, 則

$$\overline{BC}=\overline{CD}=\sqrt{2-\sqrt{4-\overline{BD}^2}} \quad (9)$$



圖十八

復次, (9) 式等價於半角公式, 我們證明如下: 在圖十七中, 連結$\overline{BO}$, 令$\overline{BD}$與$\overline{AC}$之交點爲M, 得到圖十八。

(9) 式等價於

$$\begin{aligned}(\frac{\overline{BC}}{2})^2&=\frac{2-\sqrt{4-\overline{BD}^2}}{4}\\&=\frac{1-\sqrt{1-(\frac{\overline{BD}}{2})^2}}{2}\\&=\frac{1-\sqrt{1-\overline{BM}^2}}{2}\\&=\frac{1-\overline{OM}}{2}\end{aligned} \quad (10)$$

又因爲

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BC}}{2}$$

並且

$$\cos\alpha=\frac{\overline{OM}}{\overline{BO}}=\overline{OM}$$

所以 (10) 式又等價於半角公式

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2} \tag{11}$$

總結上述, 托勒密定理的一些特例: 圓內接四邊形爲鳶形, 或有一對角線爲直徑, 或有一邊爲直徑, 就分別等價於半角公式, 正弦的和角公式與差角公式。因此, 托勒密定理可以說是三角學的結晶。

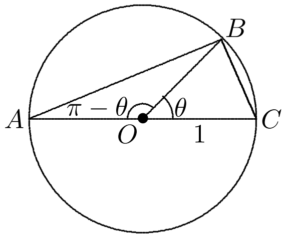
四. 初步編製弦表

利用推論1、推論2與推論3, 托勒密求出更多圓心角θ所對應的弦長$\mathrm{Crd}(\theta)$。他由$\theta=72^\circ$(正五邊形) 與$\theta=36^\circ$(正十邊形) 出發, 逐步算出其它角的弦長。

(i) 補角相應的弦長

如圖十九, 已知$\mathrm{Crd}(\theta)=\overline{BC}$, 利用畢氏定理可求得補角$180^\circ-\theta$之弦長爲

$$\begin{aligned}\mathrm{Crd}(\pi-\theta)&=\overline{AB}=\sqrt{2^2-\overline{BC}^2}\\&=\sqrt{4-\mathrm{Crd}^2(\theta)}\end{aligned} \tag{12}$$



圖十九

例1: 已知 $\mathrm{Crd}(36^\circ)=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\doteqdot 0.618$, $\mathrm{Crd}(72^\circ)=\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\doteqdot 1.176$, 於是

$$\begin{aligned}\mathrm{Crd}(144^\circ)&=\mathrm{Crd}(180^\circ-36^\circ)\\&=\sqrt{2^2-\mathrm{Crd}^2(36^\circ)}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\doteqdot 1.902\\\mathrm{Crd}(108^\circ)&=\mathrm{Crd}(180^\circ-72^\circ)\\&=\sqrt{2^2-\mathrm{Crd}^2(72^\circ)}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{6+2\sqrt{5}}\doteqdot 1.618\end{aligned}$$

(ii) 差角相應的弦長

例2: 已知 $\mathrm{Crd}(72^\circ)=\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\doteqdot 1.176$ 與 $\mathrm{Crd}(60^\circ)=1$, 由推論2知,

$$\begin{aligned}\mathrm{Crd}(12^\circ)&=\mathrm{Crd}(72^\circ-60^\circ)\\&=\frac{1}{2}\mathrm{Crd}(72^\circ)\sqrt{4-\mathrm{Crd}^2(60^\circ)}\\&\quad-\frac{1}{2}\mathrm{Crd}(60^\circ)\sqrt{4-\mathrm{Crd}^2(72^\circ)}\\&=\frac{1}{4}(\sqrt{30-6\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}})\\&\doteqdot 0.209\end{aligned}$$

習題2: 求$\mathrm{Crd}(24^\circ)$ 之值。

(iii) 半角相應的弦長

利用推論3, 我們就可以求得半角相應的弦長。

例3:

$$\begin{aligned}\mathrm{Crd}(6^\circ)&=\sqrt{2-\sqrt{4-\mathrm{Crd}^2(12^\circ)}}\\&\doteqdot 0.105\\\mathrm{Crd}(3^\circ)&=\sqrt{2-\sqrt{4-\mathrm{Crd}^2(6^\circ)}}\\&\doteqdot 0.052\\\mathrm{Crd}(1.5^\circ)&=\sqrt{2-\sqrt{4-\mathrm{Crd}^2(3^\circ)}}\\&\doteqdot 0.0262\\\mathrm{Crd}(0.75^\circ)&=\sqrt{2-\sqrt{4-\mathrm{Crd}^2(1.5^\circ)}}\\&\doteqdot 0.0131\end{aligned}$$

習題3: 試求 Crd(4.5°), Crd(7.5°) 及 Crd(9°) 之值。

五. Crd(1°)之計算

爲了要編造間隔爲0.5°之弦表, 我們必須求出Crd(1°)以及Crd(0.5°)之值。

到目前爲止, 我們已求得Crd(1.5°), 如何求出Crd(0.5°)?

因爲1.5°是0.5°的三倍, 所以欲解決這個問題, 我們必須知道Crd(θ)與Crd(3θ)的關係, 這就涉及三倍角公式

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \tag{13}$$

利用$\mathrm{Crd}(\theta) = 2\sin\frac{\theta}{2}$, 將上式改成托勒密的弦公式

$$\mathrm{Crd}(3\theta) = 3\mathrm{Crd}(\theta) - \mathrm{Crd}^3(\theta) \tag{14}$$

因此, 若已知Crd(3θ), 欲求Crd(θ), 我們必須求解一個三次方程式。但是, 三次方程式的求解, 直到1545年, 卡丹 (Cardan) 公式出現才獲得解答, 在托勒密時代還是無能爲力。

爲了克服這個困難, 我們可以採用線性插值法 (linear interpolation)。

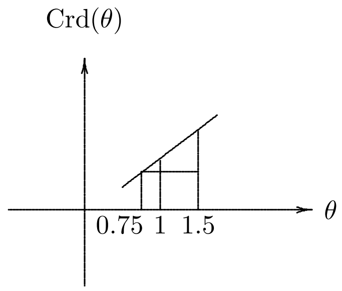
首先觀察

$$\mathrm{Crd}(1.5^\circ) = 0.0262,$$
$$\mathrm{Crd}(0.75^\circ) = 0.0131$$

我們發現 Crd(1.5°) 大約是 Crd(0.75°) 的兩倍, 而 1.5° 恰好是 0.75° 的兩倍。因爲 1° 是 1.5° 的 $\frac{2}{3}$, 所以

$$\mathrm{Crd}(1^\circ) = \mathrm{Crd}(1.5^\circ)\times\frac{2}{3} = 0.0175 \tag{15}$$

所謂線性插值法就是將Crd(θ)看成是θ的一次函數, 以探求函數值的方法, 參見圖二十。

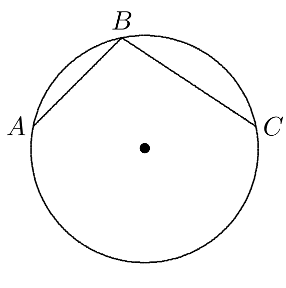


圖二十

事實上, 托勒密並不是採用線性插值法, 而是利用下面直觀的一個幾何定理來求得Crd(1°)。

定理2: 在一圓中, 見圖二十一, 如果弦 $\overline{BC}$ 大於弦 $\overline{AB}$ 並且 $\overparen{BC}$ 與 $\overparen{AB}$ 是相應的劣弧, 則

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} < \frac{\overparen{BC}}{\overparen{AB}} \tag{16}$$



圖二十一

這個定理的證明與各種等價敍述, 包括更直觀的結果, 我們留待另文介紹。

托勒密利用定理2探求Crd(1°) 如下: 因爲

$$\frac{\mathrm{Crd}(1^\circ)}{\mathrm{Crd}(0.75^\circ)} < \frac{1}{0.75}$$

且

$$\mathrm{Crd}(0.75^\circ) = 0.0131$$

所以

$$\mathrm{Crd}(1^\circ) < 0.0175 \tag{17}$$

又因爲

$$\frac{\mathrm{Crd}(1.5^\circ)}{\mathrm{Crd}(1^\circ)} < \frac{1.5}{1} \text{且} \mathrm{Crd}(1.5^\circ) = 0.0262$$

所以

$$\mathrm{Crd}(1^\circ) > 0.0175 \tag{18}$$

由 (17) 與 (18) 兩不等式得到

$$\mathrm{Crd}(1^\circ) = 0.0175 \tag{19}$$

接著, 利用推論3,

$$\mathrm{Crd}(0.5^\circ) = \sqrt{2 - \sqrt{4 - \mathrm{Crd}^2(1^\circ)}}$$

求得

$$\mathrm{Crd}(0.5^\circ) = 0.00875 \tag{20}$$

六. 弦表之完成

利用上述基本數據, 透過和差角與半角公式, 就可以編製出以0.5°爲間隔的弦表。

托勒密選取圓的半徑$R = 60$, 並且採用60進位法, 按上述的方法, 求得如下之弦表。

Κανόνιον τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν			弦 表		
περιφε-ρειῶν	εὐθειῶν	ἑξηκοστῶν	弧	弦	六十分之一
∠′	ō λα κε	ō α β ν	½°	0;31,25	0;1,2,50
α	α β ν	ō α β ν	1°	1; 2,50	0;1,2,50
α∠′	α λδ ιε	ō α β ν	1½°	1;34,15	0;1,2,50
β	β ε μ	ō α β ν	2°	2; 5,40	0;1,2,50
β∠′	β λζ δ	ō α β μη	2½°	2;37,4	0;1,2,48
γ	γ η κη	ō α β μη	3°	3; 8,28	0;1,2,48
γ∠′	γ λθ νβ	ō α β μη	3½°	3;39,52	0;1,2,48
δ	δ ια ις	ō α β μζ	4°	4;11,16	0;1,2,47
δ∠′	δ μβ μ	ō α β μζ	4½°	4;42,40	0;1,2,47
ε	ε ιδ δ	ō α β μς	5°	5;14,4	0;1,2,46
ε∠′	ε με κζ	ō α β με	5½°	5;45,27	0;1,2,45
ς	ς ις μθ	ō α β μδ	6°	6;16,49	0;1,2,44
ς∠′	ς μη ια	ō α β μγ	6½°	6;48,11	0;1,2,43
ζ	ζ ιθ λγ	ō α β μβ	7°	7;19,33	0;1,2,42
ζ∠′	ζ ν νδ	ō α β μα	7½°	7;50,54	0;1,2,41
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
ροδ∠′	ριθ να μγ	ō ō β νγ	174½°	119;51,43	0;0,2,53
ροε	ριθ νγ ι	ō ō β λς	175°	119;53,10	0;0,2,36
ροε∠′	ριθ νδ κζ	ō ō β κ	175½°	119;54,27	0;0,2,20
ρος	ριθ νε λη	ō ō β γ	176°	119;55,38	0;0,2,3
ρος∠′	ριθ νς λθ	ō ō α μζ	176½°	119;56,39	0;0,1,47
ροζ	ριθ νζ λβ	ō ō α λ	177°	119;57,32	0;0,1,30
ροζ∠′	ριθ νη ιη	ō ō α ιδ	177½°	119;58,18	0;0,1,14
ροη	ριθ νη νε	ō ō ō νζ	178°	119;58,55	0;0,0,57
ροη∠′	ριθ νθ κδ	ō ō ō μα	178½°	119;59,24	0;0,0,41
ροθ	ριθ νθ μδ	ō ō ō κε	179°	119;59,44	0;0,0,25
ροθ∠′	ριθ νθ νς	ō ō ō θ	179½°	119;59,56	0;0,0,9
ρπ	ρκ ō ō	ō ō ō ō	180°	120;0,0	0;0,0,0

這個表結晶著古希臘時代的數學文明, 反應了歐幾里得 (Euclid) 之後數學的再一次登峰造極, 尤其是幾何學、代數學與三角學。

以托勒密定理爲核心所編製的弦表 (相當於正弦函數表), 好比是精巧的手工藝產品; 十七世紀微積分出現後, 利用泰勒展開公式 (Taylor expansion) 所編製的三角函數表, 有如機器文明的產品。後法雖更具威力, 但我們不要忘了欣賞前法的簡潔漂亮。

七. 結語: 教室外與教室內

對於「教室外」的天文、大自然與日常生活等現象, 經過長期的觀察和體驗, 形成「教室內」的數學問題, 然後提出概念與方法, 加以解決, 再組織成有系統的數學, 將教室外與教室內連結在一起, 打成一片。這樣才是科知識發展的常理。托勒密的工作正體現著這種視野與過程, 所以更令人激賞。

大自然是數學問題的泉源。

托勒密的工作可以用來統合目前的高中數學, 進一步提供豐富的歷史、人文與數學之美。

參考資料

1. Eves, H., *Great moments in Mathematics (Before 1650)*, The Mathematical Association of America, 1983.
2. Crowe, M. J., *Theories of the World from Antiquity to the Copernican Revolution*, Dover, 1990.

3. Lloyd, G. E. R., *Greek Science After Aristotle*, W. W. Norton & Company, 1973.
4. Heath, T. L., *History of Greek Mathematics*, 2 Vols., Dover, 1981.
5. Aaboe, A., *Epsiodes from the Early History of Mathematics*, Random House, New York, 1964.
6. Neugebauer, O., *The Exact Sciences in Antiquity*, Dover, 1969。
7. Bunt, L. N. H., Jones, P. S., Bedient, J. D., *The Historical Roots of Elementary Mathematics*, Dover, 1988.
8. 片野善一郎, 數學史の利用, 共立出版株式會社, 1995。

—本文作者任教於台灣大學數學系—