對黃俊雄教授的一些追思

楊重駿

筆者最早和黃教授結識是 1970 年代前往數學所訪問的期間。倆人主要研究領域同屬複分析; 而黃教授的研究興趣涉及數學多方面的領域, 如調和分析、數論、統計、機率、組合等等, 他先後已有上百篇的論文, 不少刊載於有相當聲譽的國際性數學雜誌如美國數學會的 Transcations, 及 Procedings, 德國的 Math. Zeit, 英國的 Bulletin of London Math. Soc.

其它在台灣、日本及東南亞的一些主要數學刊物上也都有他的論文刊載。黃教授是台灣複分析界公認的佼佼者, 也因他的成就, 曾獲得台灣教育部學術獎。另外, 黃教授在中國大陸的複分析界也享有一定的聲譽。

黃教授的主要研究問題— 黎曼臆測及成果

從上面的成果簡介看來, 不難使人同意, 他的去世是台灣數學界的一大損失, 更可惜的是他英年早逝且壯志未酬就離開了我們。在台灣以至世界的數學界不少人都知道黃教授在他最後十年的生涯中, 正致力在克服世界公認三大難題僅剩的二大難題之一: 黎曼臆測 (Riemann Hypothesis)*。為了方便一些讀者的閱讀及興趣, 我們先對該問題的產生作一簡介。

在研究數論有關質數 (prime number) 的種種分布理論中, 不可避免的是所謂的 Riemann-Zeta 函數:

$$\zeta(z)=\prod_{p=1}^{\infty}\frac{1}{1-p_n^{-z}} \tag{1}$$

其中, p_n 是指在按大小漸增排列的無窮質數列 $(2,3,5,\ldots,)$ 中第 n 個質數, z 表一實數部 (Re z) 大於 1 的複變數。因任何一自然數 n 可表成若干個質數的冪次乘積, 又若定

$$\begin{aligned}F_n(z)&=\prod_{n=1}^{N}(1-\frac{1}{p_n^{-z}})\\&=\prod_{n=1}^{N}(1+p_n^{-z}+p_n^{-2z}+\cdots)\end{aligned} \tag{2}$$

不難看出當 z 為實數且 >1 時, 可得

$$\sum_{n=1}^{N}n^{-z}<F_N(z)<\sum_{n=1}^{\infty}n^{-z}$$

* 另一難題是所謂費馬最後定理, 該難題為數論方面的。在 1993 年為英人 G. Wiles 所證明。對該問題黃俊雄教授也曾試給予簡明的反證。

因而可推得級數

$$\zeta(z)=1+\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}+\cdots+\frac{1}{n^z}+\cdots \quad (3)$$

在 $\mathrm{Re}z>1$ 時爲絕對收斂, 因而爲在 $\mathrm{Re}z>1$ 的半複平面上的解析函數。另一面爲衆所較熟悉的 Gamma-函數 $\Gamma(z)$ 其積分表示爲對 $\mathrm{Re}z>0$ 時

$$\Gamma(z)=\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{z-1}du. \quad (4)$$

註: Gamma函數爲滿足方程

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z), \quad \mathrm{Re}z>0$$

的解析函數, 特別當 z 爲正整數 n 時, $\Gamma(n+1)=n,(n-1)\cdots 2\cdot 1$ 即 n 階乘 (或 $n!$)。

現若在式 (4) 中以 $u=nv$ 代入則可得

$$\frac{1}{n^z}=\frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^{-\infty} c^{-nv}v^{z-1}dv, \quad Rez>0. \quad (5)$$

由此可得

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^z}=\frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^{+\infty}\frac{v^{z-1}}{e^v-1}dv -\frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^{+\infty}\frac{v^{z-1}e^{-Nv}}{e^v-1}dv \quad (6)$$

上式中, 兩個積分式子在 $\mathrm{Re}z>1$ 時皆存在, 且不難驗證式 (6) 中第二個積分, 在 N 趨向 ∞ 時趨向於0, 於是我們可得 $\zeta(z)$ 的一個積分表示式如下:

$$\zeta(z)=\frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^{-\infty}\frac{u^{z-1}}{e^u-1}du, \quad Rez>1. \quad (7)$$

由此式可證得:

由式 (3) 所定的函數 $\zeta(z)$ 可解析地延拓到整個複平面, 以 $z=1$ 爲極點具留數 (residue) 爲1的亞純函數; 在整個複平面除了極點外, 其它處到處解析的函數或其可表爲兩個整函數 (entire functions) 的商式者。於是在整個複平面上函數

$$\zeta(z)-\frac{1}{z-1}$$

爲一整函數且明顯具點 $\zeta=-2,-4,-6,\ldots$ 爲其零點者。

由進一步的分析可證得當 $z<0$ 時, $\zeta(z)$ 滿足

$$\zeta(z)=2(2\pi)^{z-1}\sin\frac{\pi z}{2}\Gamma(1-z)\zeta(1-z)。 \quad (8)$$

由此, 立即可推得上式在整個複平面上成立。若在式 (8) 中以 $1-z$ 代 z, 便得最初由 Riemann(黎曼氏) 所導出的表式:

$$\zeta(1-z)=2^{1-z}\pi^{-z}\cos\frac{\pi z}{2}\Gamma(z)\zeta(z) \quad (9)$$

此式將函數 ζ 在點 z 與 $1-z$ 的値連系起來, 特別可見由 $\zeta(z)$ 在半平面 $\mathrm{Re}z>\frac{1}{2}$ 的情況可推出其在半平面 $\mathrm{Re}z<\frac{1}{2}$ 的情況。因對函數 $\zeta(z)$ 而言直線

$$\mathrm{Re}z=\frac{1}{2} \quad (10)$$

就是所謂的臨界線。

綜結以上, 我們可得有關 $\zeta(z)$ 的零點訊息如下:

(1) 函數 ζ 在半平面 $\mathrm{Re}z>1$ 上無零點。
(2) 在半平面 $\mathrm{Re}z<0$ 上, $\zeta(z)$ 的零點爲且僅爲 $z=-2,-4,-6,\ldots$ 。

從而可得結論除了點 $-2,-4,-6,\ldots$ 外, 其他 $\zeta(z)$ 的零點只可能在下面的帶狀式中:

$$0 \leq \mathrm{Re} z \leq 1。 \tag{11}$$

點 $z=-2,-4,-6,\ldots$ 稱之爲 $\zeta(z)$ 的平凡零點, 進一步的分析可推得 $\zeta(z)$ 在帶狀域 (11) 中有無窮多個零點。

黎曼臆測 (Riemann hypothesis) 就是猜測說: 所在條狀域 (11) 中的零點, 必位於臨界線 (10) 之上。

黃俊雄的證明

記得多年前, 黃教授曾跟筆者談及覺得他已不需要爲了升等、研究獎或資助, 而花時間精力做些小的問題, 以便多積些論文。他要專心攻克像黎曼猜測這種具有重大歷史意義的高難度問題, 也可以爲中國的數學家爭取到最大的榮譽。

現想當時他一定受到1985年轟動數學界一個重大新聞的影響, 而作出的誓言。該新聞報導近70年一直被頂尖複分析家所努力想證明的, 當時世界三大難題之一的比伯巴哈 (Bieberbach) 臆測, 卻被美國普渡大學 (Prudue) 不負什麼盛名的迪布朗基教授 (de Brange) 所證明。數學界是如何來肯定這樣一個重大而艱難的證明呢?

原來迪氏曾專研該臆測多年, 在1984年時曾將他的證明論文投寄給該方面的一權威, 卻遭到束之高閣的冷落。後來迪氏有了個機會參與了美俄兩方科學院的學術交流計劃, 就在1985年四月前往俄國列寧格勒大學訪問三個月。他就把他的臆測的證明在一堆俄國專家學者面前, 作了一系列的報導。在這些優秀權威學者的耐心聽講及挑剔下, 迪氏的證明終於通過了檢驗, 而得到著名的俄國史提克勒夫 (Steklev) 數學所所長 L. D. Faddeev 的正式肯定, 及把迪氏的一篇約12頁的簡單化的證明稿件通告了全世界的數學家。很快地迪氏也得到了美國此方面權威人士的喝采, 從此迪氏大名永垂數學史。

若這樣一成就發生在中國 (或華裔) 的數學家身上, 那他不知要風光幾輩子, 恐怕從此他就可以在中國的數學界呼風喚雨, 想要安靜下來都不可能了。然而迪氏不幸身在歐美的社會, 他只能享到一時的盛譽, 過此之後, 他仍像其他一些大師們一樣靜靜地繼續做他們的研究, 更不會有人來膜拜他或請他去當官, 來治校、治國或釐定國家的科技發展方針或方向。也只有在這樣一種無學術權威的自由空氣中, 學術才有不斷的新星, 出現創造性的理論得到彰顯及突破。

要想攻克世界公認的難題者除了智力外, 更需要時間及百折不撓的毅力。黃教授一向就是所裡公認爲最認眞最努力作研究的。1990年黃俊雄教授在日本京都召開的國際數學家大會 (I.C.M.) 作了一個報告聲稱他對黎曼臆測作出了否定的證明。不幸這是一次失敗對他不無打擊及一些負面的影響, 但他並不灰心反而更加努力。

他每天幾乎都埋頭苦幹於書桌及圖書館間。他也沒什麼運動及消遣, 也不抽煙喝酒或與朋友談天, 唱卡拉 O.K.。經過好一陣子的努力, 改進思考及不厭其繁的計算, 終於寫出了一篇兩百多頁的證明 (不是反證了!) 並先

後投到一些數論及分析方面的權威雜誌。據告有些很快的就將稿件退回, 表示無意處理 (因一般人總覺得眞能解決這一世界性難題的一篇論文, 其機率太低了。所以往往就不受理, 以免浪費評審員的時間及精力!), 有些甚至無回音。

筆者有次就建議黃教授何不妨學學迪氏的行徑, 找一個有聲譽及行家的研究所把證明作一系列的專題演講, 將他的證明取得肯定或對其錯有所指正, 以期確定證明的可靠性及完整性。

後來黃教授就與大陸上的一些專家們取得了連繫, 並前往北京數學所作了爲期兩週的報告。大陸數學所也的確聚集了一些權威專家及研究生, 認眞仔細地參與了他逐頁的報告。據說在進行到 100 頁左右時才有人指出他計算上的錯誤。

回台灣後他又努力地把問題作了精簡的證明及改正被指出的錯誤。筆者也就在 1995 年間邀請他到香港科大數學系作一系列的報告, 介紹他最新的證明。當時筆者也邀集了系裡一些年輕的教師及博士生好好地聽了他的幾個報告。在報告中我們也指出他證明中的一些疑點及欠嚴格性的地方。不過可以說他大致都能自圓其說。

但總結說來, 他證明的細節很難像他那樣, 經過長久及繁雜的計算或估計去核對。但最大的問題似乎在他證明的構思。他是打從假設對原 Riemann-Zeta 函數 $\zeta(z)$ 的零點平行投到臨界線上。這樣一個函數經過 $\zeta(z)$ 所滿足的關係式作解析延拓可得一個在整個複平面爲亞純的函數。而此一新得函數卻在臨界線右側的正實軸上的增長遠超過 $\zeta(z)$ 在該線段上的增長而得出矛盾, 因而證明原臆測的錯誤。但問題似乎是在這種重新建造的函數, 能否利用 $\zeta(z)$ 的恆等關係式作全面的延拓, 以及其中的一些增長估計似乎都不是很可理解及嚴格證明的。但至少說明了黃俊雄教授對此問題作出了反證的嘗試, 而且也不是很明顯的能指出他的錯誤點。所以, 筆者說這是他的壯志未酬。因爲很可能經由他的這種證明構想, 或許有人對此問題能作出突破性的進展也未定, 他及數學所也從此可揚名海內外。

對黃俊雄的追念及感言

據說平時黃俊雄教授沒有看醫生的念頭, 偶而也曾問人表示過他覺得胸中悶悶的。就在出事那天, 他不尋常地走出他的辦公室去走廊的客廳, 看讀報紙。那天回到家中, 他吃過飯洗澡時只對他家人說了一句話“我不行了”就倒了, 從此不起。

對於他的去世, 我們在這贊揚他, 追憶他已都是太晚的事了。因爲這些對一個長眠於地下的人, 已無法感受了。但他如果地下有知的話, 恐怕是希望他活著時的遭遇能從此不再降臨到其他的同仁上。希望這個社會能儘量少做文人相輕之事及錦上添花, 趨炎附勢。相信他希望, 當他有良好表現時及失敗時大家都能以平常心態來看待他。可能的話, 對他在攻克難關時, 同仁們能夠以熱誠來鼓舞他及支持他。

國人不要仍舊是一盤散沙, 或習慣於在封建的山頭及權威下討生活過日子。也即不

要再結黨營私, 排擠不是同行或同支派的。迪氏已經給了我們一個很明顯的例子, 一個看來默默無聞的人, 他有天可能是摘下數學史上光亮星星的人。而過去的歷史上也多是這種類型的人。希望黃俊雄教授的去世帶給國人的深思及團結, 在講求心靈重造的今天, 其實就是要回復大家那顆寧靜、安份及淡薄名利之心, 這樣社會才能充滿眞正的歡樂及每個人能享有其各自生命的意義及眞理的追求及光大學術研究。

—本文作者任教於香港科技大學—