談地球上兩點間的球面距離

徐正梅

地球是人類的老故鄉, 它具備了「陽光、空氣、水」三寶, 孕育了無數的生命。人類的文明在這塊大地上萌芽、滋長、開花 $\cdots$ 一代又一代永續不斷地傳承、創新。但是, 您是否明白: 地球的「長相」? 從台北飛往倫敦, 經過那些地區航線較短?

一. 地球是圓形球體?

古代一些有智慧的人, 累積了許多生活上的經驗:

- 太陽從地平線冒出來, 日正當中後又 逐漸在海面上沈落。
- 船隻進港、先見桅燈、後見船身。
- 海、天爲何連成一線?
- 月蝕時月球上的圓形陰影何處來?

他們必也想過: 大地由於「地大」廣無邊際, 難道不是平的, 而是彎曲的?

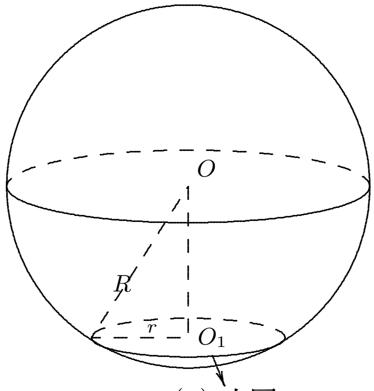
十六世紀初, 波蘭的科學家哥白尼 (N. Copernicus 1473-1543) 提出了「地圓說」, 1492年哥倫布 (Columbus) 航海西行發現了美洲新大陸, 1522年麥哲倫 (Magellan) 的環球一周的壯舉更證實了地球是圓的。事實上, 地球在赤道附近的半徑約爲6378公里, 在南、北兩極的半徑約爲6358公里, 二者相差僅20公里, 大約佔6378公里的 0.313%, 這個「差距」微不足道。我們把地球縮小成半徑10公分的地球儀, 南、北兩極的半徑約爲9.968公分。所以「地球儀」幾乎是圓形球體, 肉眼實難分辨它是微扁的球體。

二. 經度與緯度

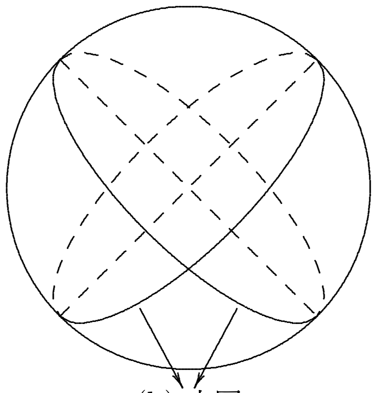
把地球看成一個渾圓球體 (如果不太計較的話), 地球上每一個點的位置是用經度、緯度來確定的。例如台北約位於「東經 $121°$, 北緯 $25°$」上。

球面上以通過球心的平面所截出的圓最大, 此種圓叫做 大圓 (大圓的半徑等於球的半徑)。不通過球心的平面所截出的圓都叫 小圓 。如果球的半徑記作 R, 小圓的半徑記作 r, 球心與小圓圓心的距離記作 d (參照圖1) 那麼 R 與 r 滿下列關係:

$$R^2 = r^2 + d^2. \quad (d = \overline{OO_1})$$



(a) 小圓



(b) 大圓

圖 1

地球的運動分公轉和自轉。所謂公轉就是地球循橢圓形的軌跡繞太陽運行, 繞行一周約需一年。地球除了公轉外, 它本身也以勻速自轉, 自轉的軸是一條貫穿南、北兩極的直線, 這條直徑叫做 地軸 。

以地軸爲直徑的大圓叫做 經線 (分東經線與西經線), 又稱 子午線 。所有的經線必通過南極和北極。除了南、北極外, 地球上每一個點都恰有一條經線通過, 這條經線是由南、北兩極與該點所決定的平面所截出的大圓。通過英國倫敦市郊 格林威治 天文台的經線 (是一個半圓) 叫做 0° 經線又叫 本初子午線 。其餘各經線的度數就是該經線所在的半平面與 0° 經線的半平面所夾的二面角的角度 (如圖 2)。0° 經線以西的經線稱做西經線 (是一個半圓), 其度數取値的範圍是 0° ～ 180°, 0° 經線以東的經線稱做東經線 (是一個半圓), 它的度數也是 0° ～ 180°。圖 2 的 P 點位在東經 120° 的經線上。東經 180° 和西經 180° 是同一條經線 (半圓) 的度數, 東經 120° 和 西經 60° 則是同一個大圓的東、西兩條經線。

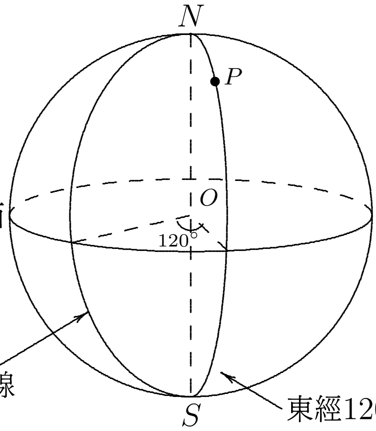


圖 2

與地軸垂直的圓叫做 緯線 , 其中的大圓叫做 赤道 , 又叫 0° 緯線。赤道以北的緯線 (都是小圓) 叫做 北緯線 , 赤道以南的緯線 (都是小圓) 叫做 南緯線 (如圖 3), 地球上每一點都恰有一條緯線通過 (因爲通過該點且垂直地軸的平面恰有一個), 緯線的度數就是經過緯線上任一點的「球半徑」與「赤道面」所夾的角度, 它們的度數是 0° ～ 90°, 如圖 4, A點在北緯 40° 的緯線上, 又在東經 120° 的經線上, 所以我們稱 A點的位置是「東經 120°, 北緯40°」。

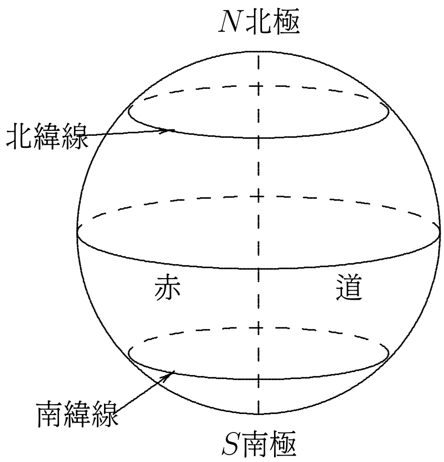


圖3

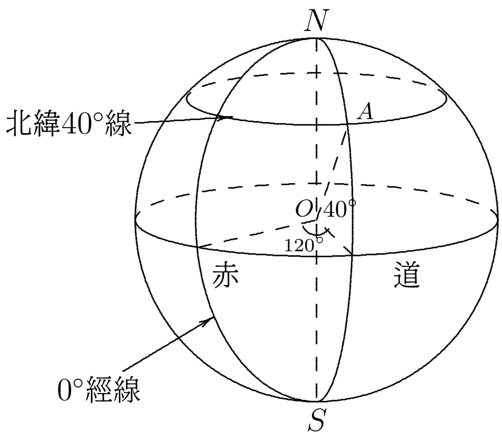


圖4

三. 時差

地球以南、北極的連線爲軸心, 自轉一周所需時間廿四小時, 面向太陽照射的半球爲白天, 背向太陽的半球爲黑夜。天文學家以東經線、西經線劃分時區, 地球的經線每小時轉動 15°, 由於

$$15^\circ \times 24 = 360^\circ$$

所以由 0° 經線起, 每隔 15° 的經線形成一個時區。天文學家將某地的子午線 (經線) 正對著太陽時定義爲該地的「格林威治時間中午12時」。地球由西向東自轉, 所以經線每往東增加 15°, 該地的時間與格林威治時間的「時差」就增加一小時。以台灣位於東經 121° 爲例, 因

$$121^\circ \div 15^\circ \approx 8 \text{ 小時 (約)}$$

故台灣的時間與倫敦市外的格林威治, 有八小時的時差, 當格林威治中午十二時, 同一時間在台灣是晚上八點。

東經 180° 與西經 180° 是一條重疊的經線, 名叫 國際換日線 。這條想像中的經線, 從北極劃過白令海、太平洋、斐濟的 Taveuni 島, 直達南極。從地球儀上審視, 此條換日線的左側 (含亞洲的那一側) 比它的右側 (含美洲的那一側) 提早了一天, 比如說, 當國際換日線正對太陽時, 其左側是一月二日的中午十二點, 右側就整整晚了一天, 正是一月一日的中午。

四. 球面上兩點間的最短路徑

從台北飛往倫敦那一條路徑最短? 用細線去量地球儀, 您將發現下列路徑比較短

台北 → 鄭州 → 包頭 → 阿爾泰山 → 烏拉山脈 → 列寧格勒 → 哥本哈根 → 倫敦。

因爲它是通過台北、倫敦兩地的大圓路徑 (近似)。

球面上通過 A、B 兩點之許多路徑中, 顯然以 共平面 的路徑較近, 而共平面的路徑就是通過 A、B 兩點之各種不同半徑的圓弧, 這些圓弧又以

通過A、B 兩點之大圓的劣弧爲最短。

我們應用三角函數的基礎知識來證明這一重要事實, 先給出兩個引理。

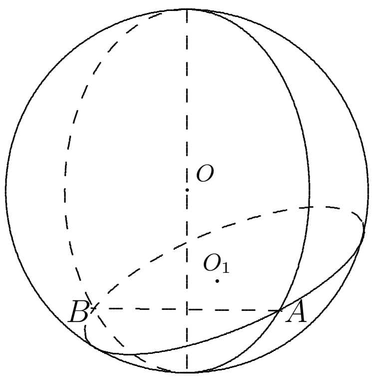


圖5

引理1. 設 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, 則 $\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$。

證明: 如圖6, 單位圓與 x 軸正向交於 $A(1,0)$ 點。點 B 在第一象的單位圓上且 $\angle AOB=\alpha$。點 C 是過 A 點的切線與直線 OB 的交點。

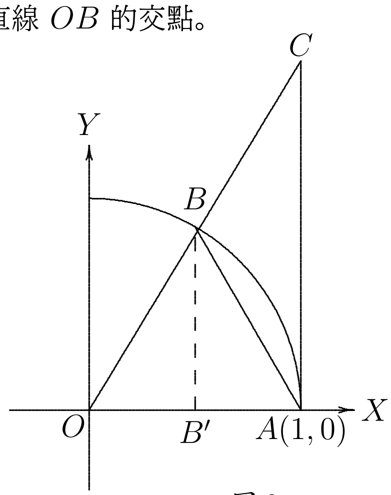


圖6

由 $\triangle OAB$面積 $<$ 扇形$\widehat{OAB}$面積 $<$ $\triangle OAC$面積, 得到

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sin\alpha<\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\alpha<\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan\alpha$$
(半徑$\overline{OA}=1$)

$\therefore\quad \sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$。

註: 由圖6 $\sin\alpha=\overline{BB'}$, $\alpha=\widehat{AB}$(弧長), $\tan\alpha=\overline{AC}$, 即$\overline{BB'}<\widehat{AB}<\overline{AC}$

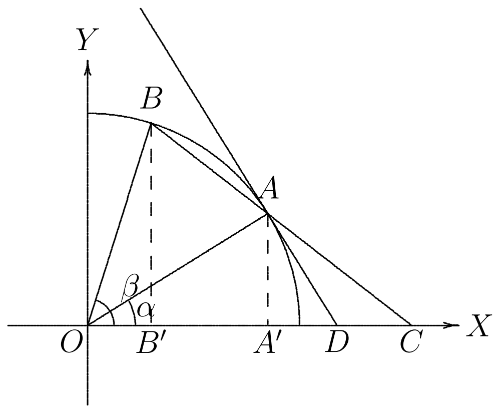


圖7

引理2. 設 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$, 則 $\frac{\sin\beta}{\beta}<\frac{\sin\alpha}{\alpha}$。

證明一: 如圖7, 設 A、B 是單位圓上的兩個點且 $\angle XOA=\alpha$, $\angle XOB=\beta$, 直線 AB 與 x 軸交於 C點, 過 A 點的切線與 x 軸交於 D 點, A'、B' 分別是 A、B 在 x 軸上的正射影, 則

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{\overline{BB'}}{\overline{AA'}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=1+\frac{\overline{BA}}{\overline{AC}}\quad(1)$$

另一方面

$$\overline{BA}<\widehat{BA}(\text{弧長})=\beta-\alpha,$$
$$\overline{AC}>\overline{AD}=\tan\alpha>\alpha\qquad(2)$$

由 (1) (2) 得

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=1+\frac{\overline{BA}}{\overline{AC}}<1+\frac{\widehat{BA}}{\overline{AD}} < 1+\frac{\beta-\alpha}{\alpha}=\frac{\beta}{\alpha}$$

故

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}<\frac{\beta}{\alpha}\quad (\text{ 或寫成 }\frac{\sin\beta}{\beta}<\frac{\sin\alpha}{\alpha})$$

證明二: 不等式 $\frac{\sin\beta}{\beta}<\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ 成立之充要條件爲 $\beta\sin\alpha-\alpha\sin\beta>0$。

當 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ 時, 令 $\beta=\alpha+\delta\quad(0<\delta<\frac{\pi}{2})$, 則

$$\begin{aligned}
&\beta\sin\alpha-\alpha\sin\beta\\
&=(\alpha+\delta)\sin\alpha-\alpha\sin(\alpha+\delta)\\
&=(\alpha+\delta)\sin\alpha\\
&\quad-\alpha(\sin\alpha\cos\delta+\cos\alpha\sin\delta)\\
&>(\alpha+\delta)\sin\alpha-\alpha(\sin\alpha+\delta\cos\alpha)\\
&\quad(\because 0<\sin\delta<\delta, 0<\cos\delta<1)\\
&=\delta(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)\\
&=(\delta\cos\alpha)(\tan\alpha-\alpha)>0
\end{aligned}$$

$\therefore \beta\sin\alpha-\alpha\sin\beta>0$ 即 $\frac{\sin\beta}{\beta}<\frac{\sin\alpha}{\alpha}$。

證明三: 考慮函數

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}\quad(0<x<\frac{\pi}{2})$$

之遞增、遞減。

$f'(x)=\frac{x\cos x-1\cdot\sin x}{x^2}=\frac{(\cos x)(x-\tan x)}{x^2}<0$ (因 $0<x<\tan x$), 故函數 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在開區間 $(0,\frac{\pi}{2})$ 內是嚴格遞減。當 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ 時, 恆有 $f(\alpha)>f(\beta)$ 即 $\frac{\sin\beta}{\beta}<\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ (或寫成 $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}<\frac{\beta}{\alpha}$)。

現在我們在引理1、引理2的基礎上來證明下面定理:

定理: 通過球面上兩點間的許多圓弧中, 以「大圓的劣弧」爲最短。

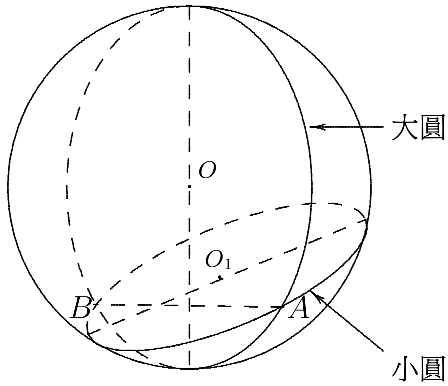


圖8

證明: 如圖8, 通過球面上 A、B 兩點之大圓 O 的劣弧長記作 S, 過 A、B 兩點之小圓 O_1 的劣弧長記作 S_1, 並且令 $R=\overline{OA}=\overline{OB}$ (球的半徑), $r=\overline{O_1A}=\overline{O_1B}$ (小圓的半徑), $\angle AOB=2\alpha$, $\angle AO_1B=2\beta$, 則由圖9得

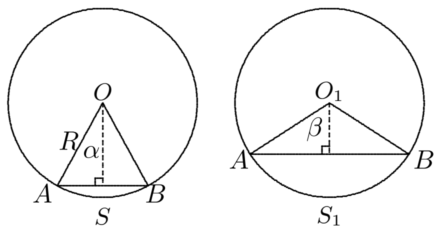


圖9

$$R\sin\alpha=\frac{1}{2}(\overline{AB})=r\sin\beta$$

故

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{R}{r}\tag{1}$$

由 $R > r$ 及 (1) 式知 $\sin\alpha < \sin\beta$ 即 $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ ($\widehat{AB}$ 爲劣弧 ,$\angle AO_1B = 2\alpha < \pi$)。另一方面, 由引理2知

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} < \frac{\beta}{\alpha} \tag{2}$$

由 (1), (2) 得

$$\frac{R}{r} < \frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow R(2\alpha) < r(2\beta) \Rightarrow S < S_1。$$

上面這個定理指出了:

地球上兩點間的最短路徑就是經過此兩點的大圓路徑 (劣弧)。

定義: 通過球面上兩點之大圓 (此大圓唯一存在), 在此兩點間的一段劣弧長叫做這兩點的 球面距離 。

五. 一些具體例子

給定地球上兩點之經、緯度, 我們想求此兩點的球面距離, 假設地球的半徑 $R = 6400$ 公里。

例1: 設地球上 A、B 兩點之位置爲 A 位於「東經 121°、北緯 25°」, B 位於「東經 121°、北緯 55°」, 估計 A、B 間的球面距離 (A、B 之球面距離記作 $S(A,B)$)。

解: 因 $\angle AOB = 55^\circ - 25^\circ = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$ (弧度) (圖10), 故 A、B 間的球面距離 $S(A,B) = R\cdot\frac{\pi}{6} \doteqdot 3351$ (公里)。

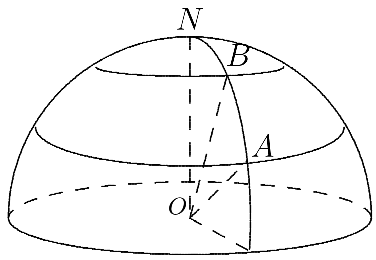


圖10

例2: 假設 A、B 都在北緯 45° 圈上, 且 A 在西經 145°, B 在東經 125°, 求 $S(A,B)$。

解: 設地心爲 O, 北緯 45° 圈的圓心爲 O_1, 我們祇要算出 $\angle AOB$ 之弧度, 那麼 $S(A,B) = R\cdot(\angle AOB$ 的弧度) (圖11) $\triangle AO_1B$ 中有:

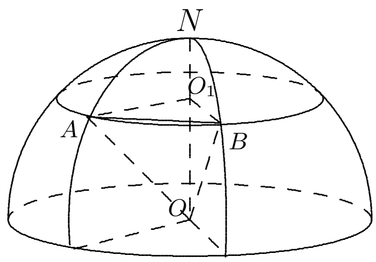


圖11

$$\angle AO_1B = 360^\circ - (145^\circ + 125^\circ) = 90^\circ,$$
$$\angle O_1AB = 45^\circ = \angle O_1BA$$
$$\overline{O_1A} = \overline{O_1B} = R\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}R$$
$$\overline{AB}^2 = \overline{O_1A}^2 + \overline{O_1B}^2 = R^2$$
$$\therefore \overline{AB} = R = \overline{OA} = \overline{OB}。$$

故 $\triangle AOB$ 是正三角形, $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$,
$\therefore S(A,B) = R\cdot\frac{\pi}{3} \doteqdot 6702$ (公里)

從例1、例2中可以看出: 求 $S(A,B)$ 之步驟。

(i) 先依題設條件, 算出弦長 $\overline{AB}$。

(ii) 在 $\triangle AOB$ 中, $\overline{OA}=\overline{OB}=R$ (球半徑), 再由餘弦定理可求出地心 O 對弦 AB 的張角 $\angle AOB$。

(iii) $S(A,B)=R\cdot(\angle AOB$ 弧度)。

例3: 設 A 位於「東經 125°, 北緯 60°」, B 位於「西經 145°, 南緯 30°」試求 $S(A,B)$

解: 如圖12, 設地心爲 O, 北緯 60° 圈, 南緯 30° 圈的圓心分別爲 O_1、O_2, 作直線 AC 垂直於南緯 30° 之截面圓於 C 點, 則四面體 $A-BO_2C$ 的高是 $\overline{AC}=\overline{O_1O_2}$。

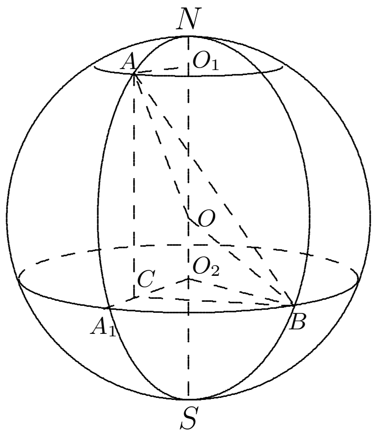


圖12

(i)
$$\begin{aligned}
\overline{AB}^2&=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2\\
\overline{AC}^2&=(\overline{O_1O}+\overline{OO_2})^2\\
&=\overline{O_1O}^2+\overline{OO_2}^2\\
&\quad+2\overline{O_1O}\cdot\overline{OO_2}\\
&=(\overline{OA}\cos 30^\circ)^2\\
&\quad+(\overline{OB}\sin 30^\circ)^2\\
&\quad+2\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\cos 30^\circ\sin 30^\circ\\
&=R^2+R^2\sin 60^\circ\\
&=(1+\frac{\sqrt{3}}{2})R^2\\
\overline{BC}^2&=\overline{O_2C}^2+\overline{O_2B}^2\\
&=\overline{O_1A}^2+\overline{O_2B}^2\\
&=(\overline{OA}\sin 30^\circ)^2\\
&\quad+(\overline{OB}\cos 30^\circ)^2\\
&=R^2\\
\therefore \overline{AB}^2&=((1+\frac{\sqrt{3}}{2})+1)R^2\\
&=(2+\frac{\sqrt{3}}{2})R^2
\end{aligned}$$

(ii) 設 $\angle AOB=\alpha$, 則

$$\begin{aligned}
\cos\alpha&=\frac{\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-\overline{AB}^2}{2\cdot\overline{OA}\cdot\overline{OB}}\\
&=\frac{-\sqrt{3}}{4}\\
&=-0.433012 \qquad (5)
\end{aligned}$$

故 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, 令 $\alpha=\frac{\pi}{2}+\alpha'(0<\alpha'<\frac{\pi}{2})$ 代入 (1) 得 $\sin\alpha'=0.433012\ldots$

查三角函數值表: $\alpha'\doteqdot 25^\circ 30'=\frac{51\pi}{360}$ (弧度) $\therefore \alpha=\frac{\pi}{2}+\frac{51\pi}{360}=\frac{77\pi}{120}$。

(iii) $S(A,B)=R\cdot\alpha=6400\times\frac{77\pi}{120}\doteqdot 12901.5$ (公里)。

六. 結語

地球上通過兩點的最短路徑, 天文學家稱之爲 測地線 。多年來筆者任教的一些資優生都提問過:「測地線是最短路徑」的證明問

題。當然, 用積分求弧長的方法對高中生而言少了一份「親切感」卻多了三分迷惑。筆者通常先用平面圖形 (參見圖 13) 做直觀的解說:

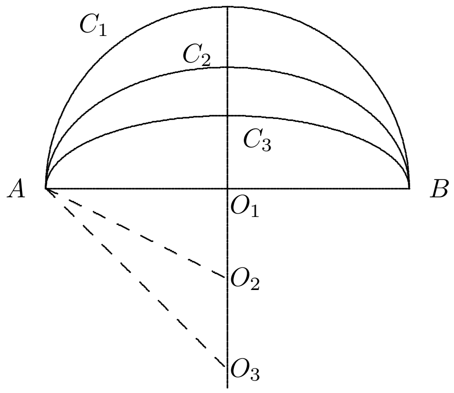


圖 13

以 $O_i(i=1,2,3)$ 爲圓心, 在同一平面上作通過 A、B 兩點的劣弧, 易見, 隨半徑 $\overline{O_1A}$, $\overline{O_2A}$, $\overline{O_3A}$ 逐漸增長, 它所對應的劣弧長 C_1, C_2, C_3 亦愈來愈短, 並逐漸趨近線段 AB 的長。所以

兩點間的各種劣弧中, 半徑愈大的, 其對應的弧長愈短。

而球面上所有通過 A、B 兩點的劣弧, 都可以繞弦 AB 旋轉到大圓所在的同一平面上 (此大圓由 A、B、球心三點所確定), 問題就變成圖 13 的情形了。這種說明對一般的高中生有一分「眞實感」, 但對數學資優生總覺得不夠嚴謹, 乃用初等幾何及三角知識 (高中生可以理解的) 寫了這篇短文, 雅俗共賞, 也許對擔任資優班的數學教師有一些助益。本文的關鍵在於「引理 2」, 因此筆者嘗試用三種方式去論證: (證一) 是較直觀的幾何法, (證二) 是用三角知識進行邏輯推理, (證三) 是從函數的高觀點證明 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 是遞減 (用到微分, 高三學生可以理解)。

三月廿日 (星期六) 上午, 中央研究院數學研究所葉永南教授, 邀請了湖北武漢市武鋼三中的數學教師錢展望先生到建國高中演講, 參與座談的除了本校部分師生外, 尙有北一女、師大附中的數學同仁。會後葉教授私下懇請中學老師對「數學傳播」多賜稿。筆者先拋磚, 並寄望中學數學教師將您的數學心得, 研究成果透過「數學傳播」, 與大家分享。

—本文作者任教於台北市建國中學—