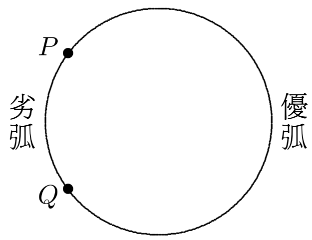
球面上的測地線和一個平面幾何的問題

張海潮

一八五四年, 年僅二十八歲的黎曼, 在七十七歲的高斯面前就職演講「論幾何學之基礎假說」。在這篇演講中, 他解釋了在流形上為什麼要定出測距的微量元素 ds^2, 並且要「建立一個自一原點出發的測地線或最短曲線系統。」(註一) 用現在的術語來說, 就是利用測量在局部畫出測地線, 並且利用這些測地線所形成的座標來 (至少) 了解局部的幾何。

更具體的說, 以地球表面為例, 從北極出發, 沿各條經線往南方走, 這些經線就是測地線, 它們走了多長可以緯度 ϕ 表, 走的方向可以經度θ表, 因此 ds^2 可以 $d\phi$ 和 $d\theta$ 表成 $d\phi^2+\sin^2\phi\ d\theta^2$。(註二) 如果我們觀察一個緯圓, 亦即等緯度的一個圓, 它等於是由 ϕ 等於常數所定義的, 因此 $d\phi$為 0, 此時 ds^2 就變成 $\sin^2\phi d\theta^2$, 這說明了緯圓的周長會因緯度而變; 當 ϕ 是九十度的時候, 它代表赤道, 此時 $\sin\phi$ 等於1, 說明了赤道緯圓的圓周最長。(同註二)。

許多微分幾何的教本都會花點篇幅說明測地線這個名詞並不等價於連結兩點之間的最短曲線, 原因是測地線起源於局部的測量, 如果只管局部, 那測地線確代表兩點之間的最短距離。一旦走遠了就不一定是最短的。比方說, 大家都知道經線是球面上的測地線, 在同一條經線上的兩點, 有兩個方式連結 (圖一)



圖一

左邊的那一段較短稱為劣弧, 右邊的那一段較長稱為優弧, 劣弧是最短距離, 但兩個弧都是測地線。

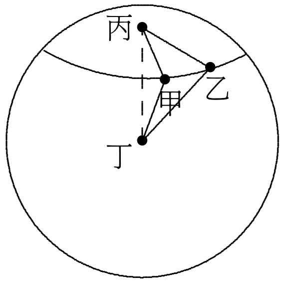
因此曲面上測地線的意義在數學上就乾脆定成是滿足測地線方程式的曲線。我以為這個定義方程式是伯努利在一六九八年給萊布尼茲的信裡首先提出的。(註三)

這個定義原來是針對在三度空間中的曲面所提出的, 它把測地線定義為「若將單位切向量微分則不會有曲面上的分量」。直觀來看, 我們可以把一條曲線想像成是質點以單位速度 (即速率為一) 所走的路徑, 如果它的加速

度向量與曲面垂直, 那麼此時質點速度上的改變只是爲了適應地形而爬上爬下,
對距離來說始終是走最經濟的路線; 換句話說, 因爲加速度的方向即受力的方向, 這個方向和曲面垂直的時候表示質點唯一的受力來自曲面對質點的束縛 (Constraint) 這樣的力不會對質點做功, 質點是處在自由運動的狀態, 自然應該經歷最短的距離。(所以愛因斯坦在廣義相對論裡認爲光走的路徑就是測地線)。

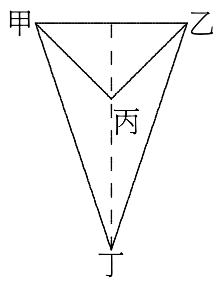
對一些簡單的曲面, 利用這個定義很容易發現測地線。拿球面來說, 我們看看經線, 沿經線畫單位長的切向量, 這些切向量微分以後當然指向經圓的圓心, 也就是球心, 所以和球面垂直, 因此不僅是經線, 只要是大圓 (圓心和球心重合的圓) 都是測地線。可是要看出大圓上的劣弧是連結兩端點的最短曲線其實並不是那麼明顯。雖然我在前段談到伯努利一六九八年的定義方程式時從物理的角度出發說明了這個數學定義的合理性, 但是實際上如果我們硬要在球面上連結甲乙兩點的大圓之劣弧是甲乙兩點間的最短距離並不那麼容易證明。

讓我們看一看這個問題的一個比較簡單的形式: 假設甲乙兩點在一個緯圓上, 而同時它們也在一個大圓上, 爲什麼緯圓上之劣弧會比大圓上之劣弧長呢? 請看下圖 (圖二, 大圓並未畫出)



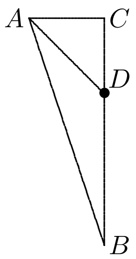
圖二

甲, 乙在緯圓 (圓心爲丙) 上, 又在以丁同時爲球心和圓心的大圓上, 丙圓小半徑短, 因此以甲乙連線段爲軸把丙轉到甲乙丁這個平面上則丙會落在三角形甲乙丁中, 如圖 (圖三)



圖三

圖中有兩個等腰三角形, 一大一小, 現在要證明 $\overline{甲丙}\cdot$(角丙) 大於 $\overline{甲丁}\cdot$角丁, 也就是相應的兩個劣弧之間應有的大小關係。這個證明不難, 可是一定要用微積分, 雖然表面上看來不牽涉到。再變形一下, 看看下圖(圖四, 可以說是圖三的左半邊),



圖四

直角三角形 ABC, BC 上取一點 D 連 AD, 求證: AB 乘以角 B 小於 AD 乘以角 ADC。親愛的讀者, 這是一個平面幾何的問題嗎? 如果是, 爲什麼不能用平面幾何的方法來做呢? 有興趣的同行不妨試試。(註四)

註釋:

註一: 黎曼就職演講的英文版見 Spivak 著「微分幾何」第二册。中文翻譯見中研院出版之「數學傳播」, 民國79年十四卷三期。

註二: 此處在北極時 ϕ 定爲 0 度, 在赤道時 ϕ 定爲九十度。

註三: Morris Kline 所著「數學史」第二十三章第七節。

註四: 有位學生考試的時候想用平面幾何或立體幾何的方法來證明大圓之劣弧與緯圓之劣弧之間的不等式, 未能成功, 我閱卷的時候仔細的想了一下這個「平面幾何」的問題, 是寫本文的主要動機。(編註: 此問題已有徐正梅老師更進一步的討論, 請見本期「地球上兩點間的球面距離」)。

—本文作者任教於台灣大學數學系—