廣義相對論中的量子效應
——從幾何的觀點出發——

吳志揚

在這篇短文中, 我們將試著從微分幾何的觀點出發來探討廣義相對論中的量子效應。量子力學 (Quantum Mechanics) 與相對論是公認二十世紀中最革命性及重要的物理理論。它們大約都在二十世紀初葉開始發達, 且至今都經得起各種實驗及觀測的考驗的。從二十世紀中葉開始, 嘗試將這兩個不同領域整合起來, 一直都是很多物理學家及數學家的夢想。在本文中, 我們將介紹筆者利用幾何的觀點所得到的一點研究心得, 以供大家作個參考。

不容易的事, 做起來特別有意思也深具挑戰性。要統合量子力學及相對論即是件不容易的事。歸納其原因在於他們的效應相較於古典力學並不顯著, 而在一些重要的情況, 他們的效應, 才扮演主要的角色。在量子力學方面, 蒲郎克 (Planck) 常數 $\hbar$ 的值很小, 在 cgs 的單位系統中, 大約是 10^{-27} 的級數。就某種意義來說, 這個量是描述量子效應顯著與否的一個參考指標。也就是說, 量子力學與古典力學在較大的尺度下是差別不太大的。不過, 雖是如此, 在哲學觀上, 它們卻是迥然不同的。這是因爲機率的概念在量子力學中, 扮演重要的角色。這觀念也導致了電子顯微鏡的發明。隨機的概念可說是量子力學中最迷人, 也最難掌握的一個特徵。

在廣義相對論中, 愛因斯坦 (Einstein) 利用時空 (spacetime) 一體的概念, 成功而有效地統合了時間、空間及重力。簡單地說, 它包涵了兩個主要的效應: 相對論效應 (Special relativity effect) 及重力效應 (gravitational effect)。只考慮相對論效應是屬於狹義相對論的範疇, 而重力效應即是導自於時光彎曲的效應, 亦即重力效應就是彎曲空間效應。

因此, 要統合量子力學及廣義相對論, 就必須有效地結合這三種不同效應: 量子效應、相對論效應及重力效應, 物理學家嘗試走的路線是先整合量子效應及相對論效應, 再進一步統合重力效應。到目前爲止, 第一步在三、四十年代即已獲得不錯的成果。例如:

Dirac Equation 及 Klein-Gordon Equation, 即是在狹義相對論中, 描述具有自旋或無自旋粒子的波動方程式。然而第二步的工作, 卻未有令人滿意的結果, 物理學家走的路線可以下圖概要地表示出來。

物理路線(Physical approach):

量子力學	$\longrightarrow$	狹義相對論	$\longrightarrow$	廣義相對論
(量子效應)		(相對論效應)		(重力效應)

STEP ONE

STEP TWO

接下來, 我們想利用幾何的觀點, 提出一個新的路線, 我們稱之爲幾何路線。

幾何路線(Geometric Approach):

量子力學	$\longrightarrow$	黎曼幾何	$\longrightarrow$	廣義相對論
(量子效應)		(彎曲空間效應)		(相對論效應)

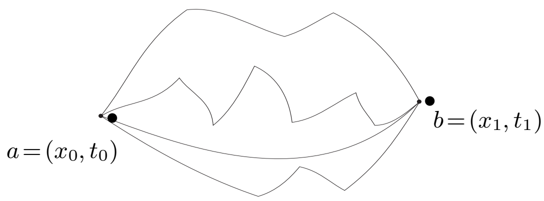
STEP ONE

STEP TWO

特別值得一提的是, 幾何路線與物理路線, 最大的不同處在於我們先嘗試統合量子效應及彎曲空間效應 (重力效應), 再進一步整合相對論效應。爲什麼, 我們可以相信用幾何的觀點來嘗試統合量子力學與廣義相對論是可行而有效的呢? 以下, 我們先試著點出其實這兩個理論就某種面向來看, 都是非常具有幾何特性的。

首先, 廣義相對論, 就某種意義來說, 就是一種幾何學, 因爲愛因斯坦即是利用彎曲的時空 (spacetime) 將重力效應引進到相對論的理論中。也就是上面已經提起的, 重力效應是導自於時空的彎曲空間效應 (curved-space effect)。這個認識也提供了我們足夠的線索及勇氣, 讓我們能大膽地提出幾何路線的新觀點。

至於說量子力學也是具有幾何面向的, 可能對一些物理學家來說, 可能略顯唐突。因爲, 現今一般的物理教科書中, 用來描述量子力學的方式, 是採用海森堡 (Heisenberg) 的算子力學 (matrix mechanics) 或者是薛丁格 (Schrödinger) 的波動力學 (wave mechanics)。然而在二十世紀中葉, 費因曼 (Feynman) 延續了狄拉克 (Dirac) 的概念而提出了路徑積分 (path integrals) 的理論來說明量子力學, 這種觀點的重要性到七、八十年代以後, 已漸爲物理學家所肯定及重視。利用路徑積分的觀點來解釋量子現象, 就深具幾何直觀了。這是因爲它描述一個粒子從某處到達它處是需要考慮所有可能的軌跡的:



同樣地, 我們也可以利用物理–幾何的兩面性, 來給出相對論的一種描述 (Formulation):

(GRI): 幾何面向 (Geometric Component):

時空是由愛因斯坦方程 (Einstein's Field Equation) 決定:

$$R_{ij}-\frac{R}{2}g_{ij}=-\frac{8\pi G}{c^4}T_{ij} \tag{1}$$

其中 R_{ij} 是度量張量 g_{ij} 的 Ricci 曲率, R是純量曲率, c 是光速, G是 重力常數而 T_{ij} 是能量–動量張量。

(GRII): 物理面向 (Physical Component):

粒子在時空中的運動, 由測地方程式 (geodesic equation) 決定:

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma=0 \tag{2}$$

如果我們將 (1) 取平均 (Trace) 的話, 我們得到

$$R=\sum_i \frac{8\pi G}{C^4}T_i^i \tag{3}$$

所以純量曲率是由能量–動量在時空的分配所決定的。

廣義相對論 (GRI) 與 (GRII) 是一種半馬赫 (semi-Machian) 的理論, 因爲 (GRI) 融入了 T_{ij} 而 GR(II)–(2) 就不受 T_{ij} 的影響了。

我們認爲從馬赫的哲學觀出發, 從量子力量來看, 若廣義相對論要加入量子效應的話, 我們就必須將非馬赫部份的 GR(II)–(2) 做以下的修正:

(GR-II') 量子效應的物理面向 (Physical Component with Quantum effect):

對沒有質量 (massless) 粒子, 如光子等, 其運動遵守測地方程式:

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma=0 \tag{4}$$

但對具有靜止質量 m_0 的物質, 其運動遵守量子–測地方程式 (quantum-geodesic equation):

$$m_0\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma=\frac{\hbar^2}{12m_0}\nabla R \tag{5}$$

其中 ∇R 表示純量曲率的梯度向量 (gradient)。

相信各位一定好奇爲什麼我們相信量子–測地方程式應該出現在相對論裡呢, 以及我們是如何得到它, 特別是 $\frac{\hbar^2}{12m_0}\nabla R$ 這一項呢?

要清楚說明這一些疑問, 我們必須回到費因曼的路徑積分觀點。

考慮彎曲流形 (Curved spaces) 的薛丁格方程式:

$$i\hbar\frac{\partial\Phi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta\Phi \tag{6}$$

若 $K(a,b)$ 表示此方程式 (6) 的基本解。我們可以利用微分幾何的方法及理論, 證明 $K(a,b)$ 可表成如下的路徑積分:

$$K(a,b)=\int_a^b e^{\frac{i}{\hbar}S_Q[\gamma]}D\gamma \tag{7}$$

其中對應於一條從 a 到 b 的路徑 γ 的量子作用是

$$S_Q[\gamma]=\int_{t_0}^{t_1}\frac{m_0}{2}<\gamma'(s),\gamma'(s)> +\frac{\hbar^2}{12m_0}R(\gamma(s))ds \tag{8}$$

狄拉克及費因曼注意到一件相當重要的事實是: 古典的作用 $S[\gamma]$ 在路徑積分中, 扮演了極重要的角色, 即在 [Wu1] 中, 我們所稱的古典–量子對偶律。

古典–量子對偶律: 在空間中, 牛頓運動方程式隱含在薛丁格方程式基本解的路徑積分表示式中:

$$F=m_0\gamma''(t)\Longleftrightarrow K(a,b)=\int_a^b e^{\frac{i}{\hbar}S[\gamma]}D\gamma \tag{9}$$

根據這古典–量子對偶律的哲學觀, 我們便可以根據 (7) 及 (8), 找出 (8) 式的 Euler-Lagrange Equation, 並利用相對論的 Principle of Covariance 而成功地得到時空中的量子測地方程式 (6) 了!

其實, 根據量子–測地方程式, 我們也可以進一步得到廣義相對論中的薛丁格方程式 (relativistic wave equation):

$$i\hbar\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}=-\frac{\hbar^2}{2m_0}\Box\Phi+V\Phi-\frac{m_0c^2}{2}\Phi \tag{10}$$

因爲要解釋此方程式 (10)'的由來, 將很花篇幅, 我們請有興趣的讀者, 參考拙著 [Wu1], 不過值得特別一提的是, 走我們提出的幾何路徑 (Geometric Approach) 來嘗試統合量子力學及廣義相對論, 也可以讓我們得到有名的愛因斯坦質–能方程式: $E=m_0c^2$。

參考資料

[Di] P. A. M. Dirac, *The Lagrangian in Quantum Mechanics*, Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion, Band 3, Heft 1(1933), 64-70.

[Do] R. D'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity*, Calrendon Press, Oxford, 1992.

[F] R. P. Feynman, *Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics*, Rev. Med. Pyhs. 20 (1948), 267.

[FH] R. P. Feyman and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path integrals*, McGraw-Hill Publishing Company, New York, 1965.

[N] *Feyman integral and the Schrö-dinger equation*, J. Math. Phys. 5(1964), 332-343.

[R] G. Roepstorff, *Path integral app-roach to Quantum Physics*, Springer-Verlag, 1994.

[Wu1] J.-Y. Wu, *Quantum effect in general relativity*, NCCU, Math. Dept. Technical report No. JYW1999-3.

[Wu2] J.-Y. Wu, *Curvature, bounded cohomology and path integrals*, to appear in the Proceedings of ICCM'98, Beijing..

—本文作者任教於中正大學數學系—