# Ricci 流和 Poincaré 猜測

張樹城

摘要: 本文試著用通俗的描述來表達 R. Hamilton在 Ricci 流 (flow) 上的進展及其與 Poincaré 猜測之間的相互關係。

## 1. 前言

### 1.1 幾何與非線性微分方程

微分幾何最基本的目的就是對一些幾何類給一個最適當的描述 – 這通常包含了分析結構及構造在這分析結構上的幾何類的描述; 則我們必須研究這些結構及幾何類如何彼此相互產生作用, 此類關係通常由某些微分方程所控制。一般來說, 對局部性的幾何類而言, 這些方程往往是線性的; 對全域性的幾何類, 其方程則是非線性的幾何類。譬如:

1. 調和映射方程。
2. 最小曲面方程。
3. Monge-Ampére 方程。
4. Yang-Mills 方程。
5. Euler-Lagrangian 方程, 即黎曼泛函的臨界度量方程。

以上這些方程都是 elliptic 方程, 這些方程的解的存在性可反應出一些很好的幾何結果。

值得一提的是: 爲了研究這些 elliptic 方程, 通常會有另一個相對應的 Parabolic 方程 (Heat flow)。

本文主要也是從這著眼點出發, 即從 Parabolic 方程的觀點, 介紹某些類型的幾何流 (Geometic flow) 方程–Ricci flow, 進而描述其與幾何拓樸之間的相互關係。

特別地, 我們將著重在 Ricci flow 與 Poincaré 猜測之間的關係。自從費瑪最後定理被證實以後, 數學界下一個可能達成的大目標就是解決–Poincaré 猜測。

### 1.2. Ricci flow 和 Poincaré 猜測

於1982, R. Hrmilton 考慮在 $M^n \times [0,T)$ 上的 Ricci flow(RF):

$$\frac{\partial}{\partial t}g_{ij} = -2R_{ij} \qquad (*)$$

及 Normalized Ricci flow(NRF):

$$\frac{\partial}{\partial t}g_{ij} = -2R_{ij} + \frac{2}{n}rgij \qquad (**)$$

其中 $g_{ij}(t)$ 爲 $n$維流形$M$上的度量, $R_{ij}$ 爲 $Ricci$ 曲率, $r=\frac{\int Rdn}{\int d\mu}$ 爲平均純曲率, $R$ 爲純曲率。

Hamilton 於1982證明了

定理 A ([Hal], 1982): 在封閉的 (closed) 的3維黎曼流形 $M^3$ 上, 假如 $(**)$ 的初值度量 $g_{ij}(0)$ 的 Ricci 曲率是正的, 則對所有時間 $t$, $(**)$ 的解存在, $g_{ij}(t)$ 逼近到正的常曲率度量, 而且 $M^3$ 與 $\frac{S^3}{\Gamma}$ 可微同胚, 其中$\Gamma$爲有限群。

註 A:

1. 由定理 A 可知給定一 homotopy 3-sphere M, 如果 $M$ 上存在一正 Ricci 曲率度量, 則 $M=S^3$, 所以 Poincaré 猜測在此情況下是對的。
2. 一般情況之下, (**) 可能會有奇異解出現, 因爲並非所有封閉的流形都會有 Einstein 度量; 另一方面, 短時間 $(*)$ 光滑解的存在性總是成立的。
3. 此一定理可視爲解決 Poincaré 猜測的一大進展。類似地, S. T. Yau 也找到了非正純曲率的 Kählen-Einstein 度量, 進而解決了 Calabi 猜測。在此, Hamilton找到了正純曲率的 Einstein 度量。另外, Tian-Yau也找到了一些正純曲率的 Kählen-Einstein 度量。
4. 在固定體積之下, $\int_n Rd\mu$ 的 Euler-Lagrangian 方程爲 $-2R_{ij}+\frac{2}{n}Rg_{ij}=0$; 所以 (**) 式的右側式子並非其 Euler-Lagrangian 方程, 但 Hamilton 的想法基本上由此而來!

### 1.3 Thurston's Geometrization 猜測

簡單一句, Thurston's Geometrization 猜測描述說: 對每一個封閉3維流形, 皆可分解成幾個分量, 其中每一分量存在一個幾何結構 (geometric structure): $\mathbb{H}^3$, $\mathbb{E}^3$, $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$, $\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}$, $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$, $Nil, Sol$。

註 B: 上述的猜測提了3維統形的幾何與拓樸之間的關係; 而 Poincaré 猜測是其中的一個結果!([A])

R. Hamilton 的 Ricci flow 基本上是想利用幾何的方法來研究 Thurston's Geometrization猜測。大致上可分爲二大部份:

- 第一部份: 研究有限的時間內 $(*)$ 的奇異解。
- 第二部份: 非奇異解的分類。

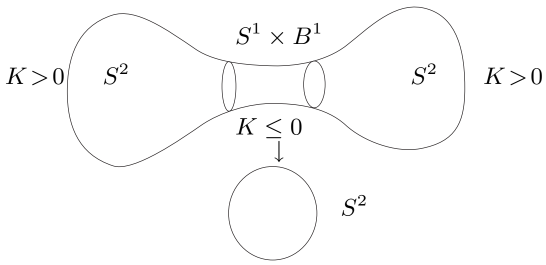
我們將詳述於後:

## 2. Ricci flow 的奇異解

### 2.1. Necks 和 Geometric surgery

首先, 我們注意到, $(*)$ 的解沿著正 Ricci 曲率的方向向內收縮 (shrinking); 然而沿著負 Ricci 曲率的方向向外擴張 (expanding)。例如在 $S^2$上, $(*)$ 的任何正曲率解在有限時間內將向內縮到一點。因此, 我們猜測一般的情況如下:

(a) ($S^2$, dumbell 度量)

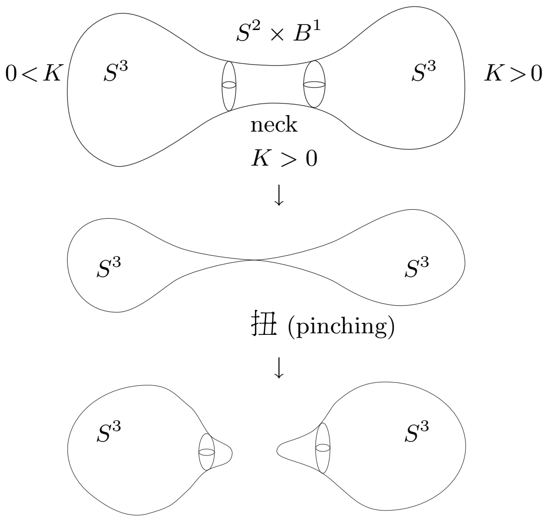

$S^1 \times B^1$
$K > 0$
$S^2$
$S^2$
$K > 0$
$K \leq 0$
$S^2$

• 兩邊 $S^2$: 正曲率。

• 中間 Neck $S^1 \times B^1$: 很接近零的負曲率

我們預測兩邊向內收縮 (contract) 比中間向外擴張 (expanding) 來得快, 最初變成單一 $S^2$, 然後漸漸收到一點。

(b) ($S^3$, dumbell 度量)

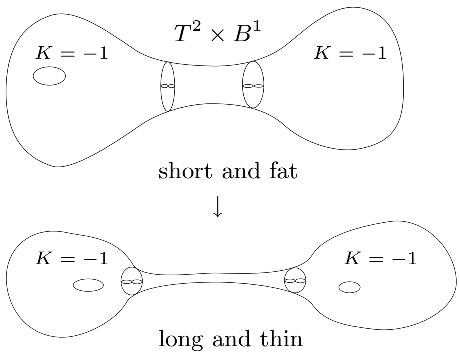



• 兩邊 $S^3$: 正曲率。

• 中間 Neck $S^2 \times B^1$: 正曲率。

預測 Neck $S^2 \times B^1$ 將向內收, 進而分出兩個 round $S^3$。

(c) ($H^2$,dumbell 度量)




• 兩邊 $K \equiv -1$

• 中間 Neck $T^2 \times B^1$: 曲率微負。

預測 Neck $T^2 \times B^1$ 將越來越長越薄, $\cdots$。

註 C:

1. 一般維度時, Neck:$N^p \times B^q \hookrightarrow M^n$, $n=p+q$。
2. 如上面 (a),(b), Hamilton的方法是在其產生奇異解之前做所謂的"幾何手術 (geomitric surgery)", 如

$$\begin{aligned} n &= 3 \\ & \quad S^2 \times B^1 \to B^3 \times S^0 \\ n &= 4 \\ & \quad S^3 \times B^1 \to B^4 \times S^0 \\ & \quad S^2 \times B^2 \to B^3 \times S^1 \end{aligned}$$

3. 例子 (C), 我們必須將解做適當的尺標變換 (rescaling), 然後再做2。
4. Hamilton 理解到下列的對應關係

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Neck pinching} \\ \text{off} \end{array} \right\} \leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Thuston's geometrization} \\ \text{猜測中的分解} \end{array} \right\}$$

綜合以上討論, Hamilton 想分析在有限時間的奇異解的特性, 使得在奇異解產生以前, 能夠做所謂"幾何手術"如上, 然後把流形作適度的分解, 再讓 Ricci flow繼續作用下去, 進而得到非奇異解。

## 2.2. 3維和4維流形的奇異解

上一節的想法, 在某些四維流形上是可以做到的

定理 B ([Ha6], 1999): 在四維 closed 流形上, 如果存在有正的迷向 (isotropic) 曲率 (PIC), 則唯一的奇異解是如上所說的 Neck piching off, 如果在出現奇異解以前作“幾何手術”, 則流形可分解爲$S^4$, $\mathbb{R}P^4$, $S^3\times S^1$, $S^3\times^2 S^1$, 然後再考慮 Ricci flow, 則經過有限次的“手術”後, 我們得到空集合, 即表示 $M$ 與 $S^4$ 比 $\mathbb{R}P^4$, $S^3\times S^1$, $S^3\times^2 S^1$ 的 connected sum是可微同胚!

現在回到我們想理解的3維流形。

定理 C ([Ha9], 1999): 假設 $(M^3, g_{ij}(t))$ 是 $(*)$ 的奇異解, 則存在一子序列的尺標變換度量, 使得其收斂至 $S^3/\Gamma$, 或 $S^2\times\mathbb{R}/\Gamma$, 或 $\sum\times\mathbb{R}/\Gamma$, 其中$\Gamma$爲有限群, $\sum$ 是 cigar soliton (非緊緻, 在無窮遠處類似 cylinder)。

註 D:

(1) Hamilton 猜測 $\sum\times\mathbb{R}$ 的情況是不可能的, 其中一個重要工具是下面將介紹的“Little Loop Lemma”。
(2) 例如1是對的, 則這些尺標變換度量將收斂至$S^3/\Gamma$或者可作一 surgery, 然後證明經過有限次後, 得到非奇異解。
(3) 果眞如此, 則整個問題就剩下這些非奇異解的分類了。

# 3. 3維流形的非奇異解之分類

## 3.1. 定義與例子

定義: 我們說 $(M^3, g_{ij}(t))$ 是 (**) 的非奇異解當對所有時間 $0\le t<\infty$, $g_{ij}(t)$ 皆存在且其曲率一致有界。

例如: (**) 在任一封閉流形有非奇異解存在, 當初值度量 $g_{ij}(0)$ 是

(a) $(\sum^2, g_0)$: 任一閉曲面,
(b) $(M^3, g_0)$: $Ric(g_0)>0$,
(c) $(M^3, g_0)$: 局部 homogeneous 度量,
(d) $(M^4,_0)$: $g_0$ 有正的曲率算子,
(e) $(M, g_0)$: Kähler 流形, $C_1(M)=0$ 或 $C_1(M)<0$。

## 3.2. 3維流形的非奇異解

最後, 當$M$是閉3維流形時, 非奇異解的拓樸性質完全被分類出來。

定理 D ([Ha5], 1998): 假如 $M^3$ 存在有 (**) 的非奇異解, 則我們可以完全把 $M^3$ 分解成爲一些幾何結構.

由上第二節與第三節可知, 整個問題剩下來的就是如何去解決註 D(1) 的猜測了。下面我們提供一些可能的方法。

# 4. 極大値原理及 Harnack 估計

## 4.1. 極大値原理 (Maxinum Principle)

Ricci flow 之所以能夠在分析與幾何中建立關聯, 最基本的性質就是幾何量滿足所謂的極大値原理; 由此可知, 對所有進度而言, 正純曲率 $R$ 及正曲率算子都被 $(*)$保持下來, 在特殊的3維流形中, 正 Ricci 曲率也被保持下來, 另外它用來證明了研究 Ricci flow 一個重要的估計–Harnack 不等式。

### 4.2. Harnack 估計

我們介紹下列的 Harnack 不等式:

定理 E ([Ha7], 1993): 假設 $(M, g_{ij}(t))$ 是 $(*)$的解, $g_{ij}(0)$有非負曲率算子$R_{ijkl}$, 則對任一向量場$W$, $2-$form $U$

$$\begin{aligned} Z &= M_{ij}W^iW^j + 2P_{ijk}U^{ij}W^k \\ &\quad +R_{ijkl}U^{ij}U^{kl} \geq 0. \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} P_{ijk} &= D_iR_{jk} - \nabla_j R_{ik} \\ M_{ij} &= \triangle R_{ij} - \frac{1}{2}\nabla_i\nabla_j R \\ &\quad +2g^{kp}g^{lq}R_{ikjl}R_{pq} \\ &\quad -g^{kl}R_{ik}R_{jl} + \frac{1}{2t}R_{ij} \\ \nabla_i &= \text{Levi-Civita 連絡} \\ \Delta &= g_{ij}\nabla_i\nabla_j \end{aligned}$$

應用:

(1) Harnack 估計用來研究$(*)$的奇異解與 Ricci Soliton 之間的關係, 如 [Ha9]。

(2) 它也可用來證明下列的 "Little Loop Lemma":

對$(m^3, g_0)$而言, 如果 $g_0$ 爲非負截面曲率度量, 則存在常數$A$, $B$, 使得如果在某時間 $t$, $\rho$ 滿足

$$R(y,t) \leq \frac{A}{\rho^2}, \quad \forall y \in B_\rho(x)$$

我們有如下估計

$$inj(x) \geq B\rho$$

其中 $inj(x)$ = injectivity radius, $\forall x \in M$.

由此引理, 將可用來證明註 D(1) 的猜測問題乃是在此引理中, 我們必須對曲率做適度限制。

## 5. Open 問題

從以上討論以及註 D(1), 第四節應用 (2), 知如果我們能得到類似如下猜測, 則整個 Hamilton's program 將可得到滿意的答案。

**Conjecture:** 考慮$(M^3, g_{ij}(t))$上的 Ricci flow, 在任何初値度量$g_{ij}(0)$之下, 我們也有某種 Harnack-type 的估計!

例子: 在二維的例子, Hamilton 和 Yau 找到了類似的 Harnack-type 估計。

## 參考資料


[A ] M. Anderson, *Scalar curvature and geometrization conjectures for 3-manifolds*, in Comparison Geometry, MSRI Publications, **30**(1997), 49-82, Cambridge Univ. Press.

[Ha1 ] R. S. Hamilton, *Three-manifolds with positive Ricci curvature*, J. Differential Geom. **17**(1982), 255-306.

[Ha2 ] R. S. Hamilton, *Four-manifolds with positive curvature operator*, J. Differential Geom. **24**(1986), 153-179.

[Ha3 ] R. S. Hamilton, *The Ricci flow on surfaces*, Contemporary Mathematics **71**(1988), 237-261.

[Ha4 ] R. S. Hamilton, *An isoperimetric estimate for the Ricci flow on surfaces*, in Modern Methods in Complex Analysis, The Princeton conference in honor of Gunning and Kohn, pp. 191-200, ed. T. Bloom, etal., Annals of Math. Studies **137**(1995), Princeton Univ. Press.

[Ha5 ] R. S. Hamiltion, *Non-singular solutions of the Ricci flow on three manifolds*, Comm. Anal. Geom. (1998) to appear.

[Ha6 ] R. S. Hamiltion, *Four-manifolds with positive isotropic curvature*, Comm. Anal. Geom. **5**(1997), 1-92.

[Ha7 ] R. S. Hamiltion, *The Harnack estimate for the Ricci flow*, J. Differential Geom. **37**(1993), 225-243.

[Ha8 ] R. S. Hamilton, *Eternal solutions to the Ricci flow*, J. Differential Geom. **38**(1993), 1-11.

[Ha9 ]R. S. Hamilton, *Formation of singularities in the Ricci flow*, Surveys in Diff. Geom. **2**(1995), 7-136, International Press, Boston.

—本文作者任教於清華大學數學系—