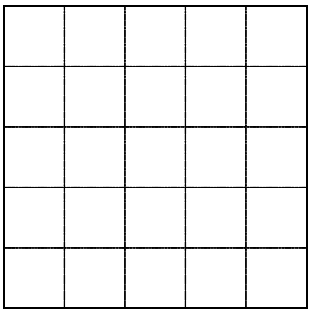
如何求出 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$

陳國裕

1、引言



圖一

在上圖中是一個 5×5 的正方形, 如果問圖中總共有幾個正方形? 這個問題相信很多人都曾看過。邊長爲1的正方形有 5^2 個, 邊長爲2的正方形有 4^2 個,$\cdots$, 邊長爲5的正方形有 1^2 個; 總共有 $5^2+4^2+3^2+2^2+1^2$ 個; 因爲數字並不大, 一個一個算也不難算出。但是如果把題目改成$n\times n$ 的正方形, 則總共有 $n^2+(n-1)^2+\cdots+3^2+2^2+1^2$ 個, 當 n 是一個比較大的數, 雖然可以利用電腦把它算出, 不過更希望把它的結果用一個式子表示出來。

德國數學家高斯在上小學時, 他的老師曾經出一個問題, 求 $1+2+3+\cdots+100$ 的和, 叫每位同學計算。當其他同學還在一個一個慢慢加的時候, 高斯用一點技巧很快就算出答案。他的老師也很驚訝他能那麼快算出來。這個故事早已流傳久遠, 但是求 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ 就比較不容易。在目前高一的教科書中是利用 $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$ 來做, 雖然它可以做出來, 而且也是相當簡潔的方法, 但是給人的感覺太突然, 爲什麼會想到要利用完全立方公式? 在學習數學的過程中, 探索發現的過程也是很重要, 同一個問題經由不同的人來思考, 結果可能會相同, 但是過程卻不一定會相同。看別人處理問題的方法吸收到一些經驗, 這樣可以幫助自己以後面對問題時有思考的方向而不會束手無策。

2、思考過程

符號說明: 用 S_n 或 $f(n)$ 表示級數前 n 項的和。

在學習的過程中, 常常看到別人的解題方法; 一種方法有時可以解決很多的問題, 就好像是一個原則, 也可以這樣來想, 一種方法就類似一種藥品, 甲生病時, 服用了某一種藥, 結果病好了, 現在乙也得了跟甲類似的病, 醫生很自然會建議乙服用甲用過的那一種藥。

求級數 $1+2+3+\cdots100$ 的和時, 對於沒有學過等差級數的人, 他可能會一項一項的加; 雖然這個方法讓人覺得並不很好, 不過只要加以適當的修正, 可能這個方法也可以做出來, 對於一般人來說, 直覺的想法認爲只

要加99次就可求出結果而沒有注意到要觀察在計算中所得到的數, 如果在做的過程中有把前2項的和、前3項的和、前4項的和、$\cdots$ 列出來, 再觀察所列出的數列, 有找到它的規則, 那就不必眞的做99次的加法。

方法一: 利用求出級數的前幾項和來猜測它的一般項。

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81
S_n	1	5	14	30	55	91	140	204	285
S_n		5	2×7	$2\times 3\times 5$	5×11	7×13	$2^2\times 5\times 7$	$2^2\times 3\times 17$	$3\times 5\times 19$
因數		5	7		11	13		17	19
$\frac{S_n}{2n+1}$	$\frac{1}{3}$	1	2	$\frac{10}{3}$	5	7	$\frac{28}{3}$	12	15
$\frac{S_n}{2n+1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{15}{3}$	$\frac{21}{3}$	$\frac{28}{3}$	$\frac{36}{3}$	$\frac{45}{3}$

先求出 S_n 的前9項, 再把每個 S_n 做質因數分解, 由表中的第五列可猜測 S_n 中會有因數 $2n+1$, 再由表中的第七列可猜測

$$\begin{aligned}\frac{S_n}{2n+1}&=\frac{1}{3}(1+2+3+\cdots+n)\\&=\frac{1}{3}\times\frac{n(n+1)}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{3}\times\frac{n(n+1)}{2}\times(2n+1)\\&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\end{aligned}$$

方法二: 利用分項對消分數約分的方法。

N	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{S_n}{S_{n-1}}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{14}{5}$	$\frac{30}{14}$	$\frac{55}{30}$	$\frac{91}{55}$	$\frac{140}{91}$	$\frac{204}{140}$	$\frac{285}{204}$
	5	$\frac{2\times7}{5}$	$\frac{3\times5}{7}$	$\frac{11}{2\times3}$	$\frac{7\times13}{5\times11}$	$\frac{2^2\times5}{13}$	$\frac{3\times17}{5\times7}$	$\frac{5\times19}{2^2\times17}$
	$3\times\frac{5}{3}$	$2\times\frac{7}{5}$	$\frac{5}{3}\times\frac{9}{7}$	$\frac{3}{2}\times\frac{11}{9}$	$\frac{7}{5}\times\frac{13}{11}$	$\frac{4}{3}\times\frac{15}{13}$	$\frac{9}{7}\times\frac{17}{15}$	$\frac{5}{4}\times\frac{19}{17}$
	$\frac{3}{1}\times\frac{5}{3}$	$\frac{4}{2}\times\frac{7}{5}$	$\frac{5}{3}\times\frac{9}{7}$	$\frac{6}{4}\times\frac{11}{9}$	$\frac{7}{5}\times\frac{13}{11}$	$\frac{8}{6}\times\frac{15}{13}$	$\frac{9}{7}\times\frac{17}{15}$	$\frac{10}{8}\times\frac{19}{17}$

跟方法一類似, 先列出 $\frac{S_n}{S_{n-1}}$ 的前8項, 由上表的第五列, 可以猜測

$$\frac{S_n}{S_{n-1}}=\frac{n+1}{n-1}\times\frac{2n+1}{2n-1}。$$

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{3}{1}\times\frac{5}{3},\frac{S_3}{S_2}=\frac{4}{2}\times\frac{7}{5},$$

$$\frac{S_4}{S_3}=\frac{5}{3}\times\frac{9}{7},\ldots,$$

$$\frac{S_{n-2}}{S_{n-3}}=\frac{n-1}{n-3}\times\frac{2n-3}{2n-5},$$

$$\frac{S_{n-1}}{S_{n-2}}=\frac{n}{n-2}\times\frac{2n-1}{2n-3},$$

$$\frac{S_n}{S_{n-1}}=\frac{n+1}{n-1}\times\frac{2n+1}{2n-1},$$

$$\begin{aligned}&\frac{S_2}{S_1}\times\frac{S_3}{S_2}\times\frac{S_4}{S_3}\times\cdots\\&\times\frac{S_{n-2}}{S_{n-3}}\times\frac{S_{n-1}}{S_{n-2}}\times\frac{S_n}{S_{n-1}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=(\frac{3}{1}\times\frac{5}{3})\times(\frac{4}{2}\times\frac{7}{5})\times(\frac{5}{3}\times\frac{9}{7})\\
&\quad\times\cdots\times(\frac{n-1}{n-3}\times\frac{2n-3}{2n-5})\\
&\quad\times(\frac{n}{n-2}\times\frac{2n-1}{2n-3})\\
&\quad\times(\frac{n+1}{n-1}\times\frac{2n+1}{2n-1})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{S_n}{S_1}&=(\frac{3}{1}\times\frac{4}{2}\times\frac{5}{3}\times\cdots\times\frac{n-1}{n-3}\\
&\quad\times\frac{n}{n-2}\times\frac{n+1}{n-1})\times(\frac{5}{3}\times\frac{7}{5}\times\frac{9}{7}\\
&\quad\times\cdots\times\frac{2n-3}{2n-5}\times\frac{2n-1}{2n-3}\\
&\quad\times\frac{2n+1}{2n-1}),\ \text{又 } S_1=1\\
\therefore S_n&=(\frac{n(n+1)}{1\times 2})(\frac{2n+1}{3})\\
&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}
$$

方法三: 利用分項對消的減法。

$$S_1=1^2,\ S_2-S_1=2^2,\ S_3-S_2=3^2,$$
$$S_4-S_3=4^2,\ldots,S_n-S_{n-1}=n^2$$

全部式子相加 $S_n=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$。

看一下式子 $S_n-S_{n-1}=n^2$, S_n 是未知的, 所以由這個式子無法寫出 S_n, 換一個角度來看,S_n 是跟 n 有關的數, S_{n-1} 是跟 $n-1$ 有關的數, 兩個相減要產生 n^2, 既然 S_n 是跟 n 有關的數, 最簡單的想法就是把 S_n 分別用 $n,n^2,n^3,\ldots$ 代換, $n-(n-1)=1$ 不會產生 n^2 故不合, $n^2-(n-1)^2=2n-1$ 也不能產生 n^2 故不合, $n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1$ 有 n^2 產生, 可以試試看, 令 $n=1,2,3,\ldots,n$ 分別代入

$$
\begin{aligned}
1^3-0^3&=3\times 1^2-3\times 1+1\\
2^3-1^3&=3\times 2^2-3\times 2+1\\
3^3-2^3&=3\times 3^2-3\times 3+1\\
&\vdots\\
n^3-(n-1)^3&=3n^2-3n+1
\end{aligned}
$$

全部式子相加

$$
\begin{aligned}
n^3&=3\times(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)\\
&\quad-3\times(1+2+3+\cdots+n)+n\times 1\\
n^3&=3S_n-3\times\frac{n(n+1)}{2}+n\\
n^3&=3S_n-\frac{3n^2}{2}-\frac{3n}{2}+n\\
n^3&+\frac{3n^2}{2}+\frac{n}{2}=3S_n\\
3S_n&=\frac{2n^3+3n^2+n}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}\\
S_n&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}
$$

因爲 S_n 是跟 n 有關的數, 當 n 改變時, S_n 也會跟著改變, 所以把 S_n 當作 n 的函數, 令 $f(n)=S_n=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$。從 $f(n)$ 的形式來看, $f(n)$ 應該是多項式函數而且它的次數至少是二次, 因此從二次函數做起。

假設$f(n)$是二次函數, 而二次函數只要有三個不同的函數值就可以決定。設$f(n)=an^2+bn+c$, 且$f(1)=1$,$f(2)=5$,$f(3)=14$分別代入

$$
\begin{cases}a+b+c=1\\4a+2b+c=5\\9a+3b+c=14\end{cases}\quad\text{解出}\quad\begin{cases}a=\frac{5}{2}\\b=-\frac{7}{2}\\c=2\end{cases}
$$

$$f(n)=\frac{5}{2}n^2-\frac{7}{2}n+2$$

把 $n=4$ 代入驗算 $f(4)=\frac{5}{2}\times 4^2-\frac{7}{2}\times 4+2=28\neq 30=f(4)$ 故不合。

假設$f(n)$是三次函數, 而三次函數只要有四個不同的函數值就可以決定。設$f(n)=an^3+bn^2+cn+d$, 且$f(1)=1$,$f(2)=5$,$f(3)=14$,$f(4)=30$ 分別代入

$$\begin{cases} a+b+c+d=1 \\ 8a+4b+2c+d=5 \\ 27a+9b+3c+d=14 \\ 64a+16b+4c+d=30 \end{cases}$$

$$\text{解出}\quad \begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=\frac{1}{2} \\ c=\frac{1}{6} \\ d=0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(n)&=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n \\ &=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

把 $n=5$ 代入驗算 $f(5)=\frac{5\times6\times11}{6}=55$ 合; 把 $n=9$ 代入驗算 $f(9)=\frac{9\times10\times19}{6}=285$ 合; 再代入其他的數驗算也合, 因此猜測 $f(n)$ 是三次函數是合理的。

$$\begin{aligned} &f(n)-f(n-1) \\ &=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\ &\quad-\frac{1}{6}(n-1)((n-1)+1)(2(n-1)+1) \\ &=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) \\ &=\frac{1}{6}n((2n^2+3n+1)-(2n^2-3n+1)) \\ &=\frac{1}{6}n\times 6n=n^2 \end{aligned}$$

再由分項對消的方法即可證明前面用函數的觀點做的結果是正確。

方法四: 利用倒過來寫相加。

$$\begin{aligned} &1^2+(2n)^2=1^2+(n+n)^2 \\ &=1^2+n^2+2nn+n^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &2^2+(2n-1)^2 \\ &=2^2+(n+(n-1))^2 \\ &=2^2+n^2+2n(n-1)+(n-1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &3^2+(2n-2)^2 \\ &=3^2+(n+(n-2))^2 \\ &=3^2+n^2+2n(n-2)+(n-2)^2 \\ &\qquad\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &n^2+(n+1)^2 \\ &=n^2+(n+1)^2 \\ &=n^2+n^2+2n\times1+1^2 \end{aligned}$$

全部式子相加

$$\begin{aligned} S_{2n}&=S_n+n\times n^2+2n(1+2+3+ \\ &\quad\cdots+n)+S_n \\ S_{2n}&=2S_n+n^3+2n\times\frac{n(n+1)}{2} \\ S_{2n}&=2S_n+2n^3+n^2 \qquad (1) \end{aligned}$$

在這個式子中,S_{2n} 與 S_n 類似是兩個未知數, 既然有兩個未知數, 又要把它解出, 聯想到解聯立方程式。

$$\begin{aligned} S_{2n}&=1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2 \\ &\quad+2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2 \\ &=4(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)=4S_n \end{aligned}$$

$$1^2=(2\times1-1)^2=2^2\times1^2-2\times2\times1+1^2$$

$$3^2=(2\times2-1)^2=2^2\times2^2-2\times2\times2+1^2$$

$$5^2=(2\times 3-1)^2=2^2\times 3^2-2\times 2\times 3+1^2$$
$$\vdots$$
$$\begin{aligned}(2n-1)^2&=(2\times n-1)^2\\&=2^2\times n^2-2\times 2\times n+1^2\end{aligned}$$

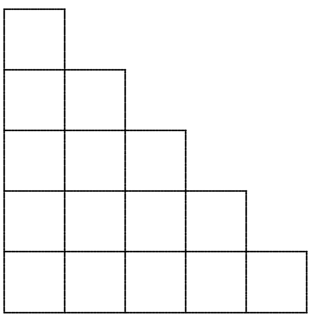
全部式子相加

$$\begin{aligned}&1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2\\=&2^2\times(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)\\&-2\times 2\times(1+2+3+\cdots+n)+n\times 1^2\\=&4S_n-4\times\frac{n(n+1)}{2}+n\\=&4S_n-2n^2-2n+n\\=&4S_n-2n^2-n\\&\therefore S_{2n}=(4S_n-2n^2-n)+4S_n\\=&8S_n-2n^2-n \qquad (2)\end{aligned}$$

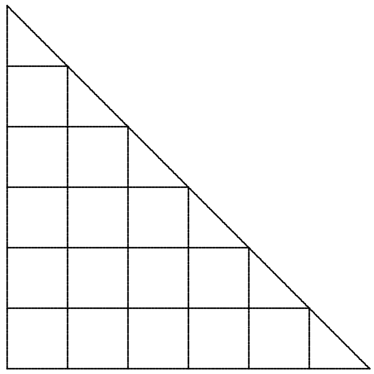
由 (1)(2) 兩式

$$\begin{aligned}&8S_n-2n^2-n\\&=S_{2n}=2S_n+2n^3+n^2\\6S_n&=2n^3+3n^2+n=n(n+1)(2n+1)\\S_n&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\end{aligned}$$

方法五: 利用堆疊與體積的觀念。



圖二



圖三

在求 $1+2+3+\cdots+n$ 的過程中, 也可以用面積來做。把上圖二的 T_5 補成三角形 (如圖三), 再用三角形面積列式即可求出。

$$T_5+\frac{1}{2}\times(5+1)=\frac{1}{2}\times(5+1)\times(5+1)$$
$$T_5=\frac{5\times(5+1)}{2}$$

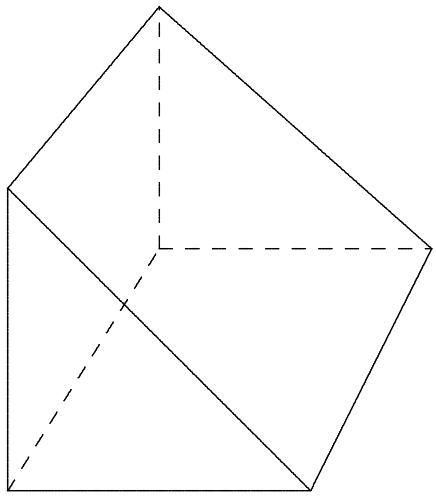
在求 T_5 過程中利用到三角形面積, 要求 S_5 時, 用角錐的體積來做做看。

角錐的體積 $=\frac{1}{3}\times$ 底面積 $\times$ 高

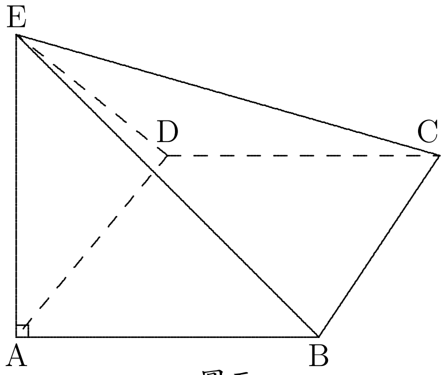
角柱的體積 $=$ 底面積 $\times$ 高

三角柱X(如圖四): 它是一個單位正方體的一半, 其體積是$\frac{1}{2}$。

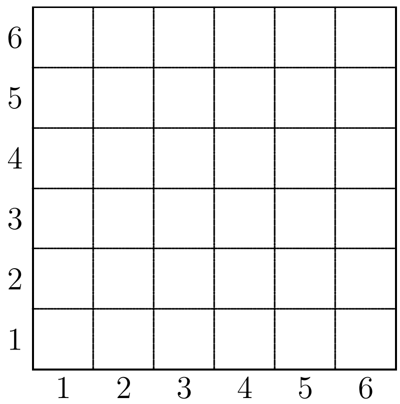
四角錐Y(如圖五): 底面$ABCD$爲正方形 $AE\perp AB, AE\perp AD, AE=AB=1$, 它的體積爲$\frac{1}{3}$。



圖四



圖五



圖六

圖六是一個 6×6 的正方形, 要做 $S_5 = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$ 的堆疊, 5^2 就用一個 $5\times 5\times 1$ 的長方體放在圖六上且 5×5 的一面朝下並且有一個角放在 (1,1) 的位置上, 其他四個也都用相同的方法放在圖六上, 則 (1,1) 的高度爲5,(2,1),(2,2),(1,2) 的高度爲4,(3,1),(3,2),(3,3),(1,3),(2,3) 的高度爲3, …。在 (1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6) 各放一個四角錐 Y, 使其正方形面向下, 等腰直角三角形的兩面分別向圖六的後方及左方, 除了對角線6格之外的其他30格各放一個三角柱 X, 在對角線下方的位置, 三角柱的兩個正方形面分別向下及向左, 在對角線上方的位置, 三角柱的兩個正方形面分別向下及向後, 最後整個形狀類似四角錐 Y, 只不過尺寸加大而已。利用兩種方法計算它的體積而求出 S_5。

$$\begin{aligned}&S_5+(5+1)\times\frac{1}{3}+((5+1)\\&\times(5+1)-(5+1))\times\frac{1}{2}\\=&\frac{1}{3}\times(5+1)^2\times(5+1)\end{aligned}$$

如果把5改成 n, 則

$$\begin{aligned}&S_n+(n+1)\times\frac{1}{3}+((n+1)\\&\times(n+1)-(n+1))\times\frac{1}{2}\\=&\frac{1}{3}\times(n+1)^2\times(n+1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&S_n+\frac{2}{6}(n+1)+\frac{3}{6}n(n+1)\\=&\frac{2}{6}\times(n+1)^2\times(n+1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_n=&\frac{2}{6}\times(n+1)^2\times(n+1)\\&-\frac{2}{6}(n+1)-\frac{3}{6}n(n+1)\\S_n=&\frac{1}{6}\times(n+1)\times(2(n+1)^2-2-3n)\\S_n=&\frac{1}{6}\times(n+1)\times(2n^2+4n+2-2-3n)\\S_n=&\frac{1}{6}\times(n+1)\times(2n^2+n)\\S_n=&\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\end{aligned}$$

方法六: 在方法五中用到堆疊, 還是以圖六來看, 現在只看堆疊好但是尙未放上角錐及角柱的情形。目前是做 S_5 的堆疊, 由圖六中看, 高度爲5只有1格, 高度爲4有3格, 高度爲3有5格, 高度爲2有7格, 高度爲1有9格; 所以 $S_5 = 1\times 5+3\times 4+5\times 3+$

$7\times 2+9\times 1$, 如果把5改爲 n, 則

$$\begin{aligned}S_n=&1\times n+3\times(n-1)+5\\&\times(n-2)+\cdots+(2n-1)\times 1\\=&(2\times 1-1)\times((n+1)-1)\\&+(2\times 2-1)\times((n+1)-2)\\&+(2\times 3-1)\times((n+1)-3)+\cdots\\&+(2n-1)\times((n+1)-n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(2\times 1-1)\times((n+1)-1)\\=&2\times1\times(n+1)-2\times1\times1-(n+1)+1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(2\times2-1)\times((n+1)-2)\\=&2\times2\times(n+1)-2\times2\times2-(n+1)+2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(2\times3-1)\times((n+1)-3)\\=&2\times3\times(n+1)-2\times3\times3-(n+1)+3\\&\vdots\\&(2\times n-1)\times((n+1)-n)\\=&2\times n\times(n+1)-2\times n\times n-(n+1)+n\end{aligned}$$

全部式子相加

$$\begin{aligned}S_n&=2(n+1)(1+2+3+\cdots+n)\\&\quad-2(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)\\&\quad-n(n+1)+(1+2+3+\cdots+n)\\S_n&=2(n+1)\times\frac{n(n+1)}{2}\\&\quad-2S_n-n(n+1)+\frac{n(n+1)}{2}\\3S_n&=n(n+1)^2-\frac{n(n+1)}{2}\\3S_n&=\frac{n(n+1)}{2}(2(n+1)-1)\\S_n&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\end{aligned}$$

方法七:

$$\begin{aligned}&(1+2+3+\cdots+n)^2\\=&1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+2\times(1\times 2\\&+1\times 3+1\times 4+\cdots+1\times n\\&+2\times 3+2\times 4+\cdots+2\times n\\&+3\times 4+\cdots+3\times n\\&\qquad\vdots\\&+(n-1)\times n)\\=&1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+2\times(2\times 1\\&+3\times(1+2)+4\times(1+2+3)+\cdots\\&+n\times(1+2+3+\cdots+(n-1))\\=&1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+2\times(2\times 1\\&+3\times\frac{2\times 3}{2}+4\times\frac{3\times 4}{2}+\cdots\\&+n\times\frac{(n-1)\times n}{2})\\=&1^2+2^2+3^2+\cdots n^2+2^2\times 1\\&+3^2\times 2+4^2\times 3+\cdots+n^2\times(n-1)\\=&1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2\\&+2^2\times(2-1)+3^2\times(3-1)\\&+4^2\times(4-1)+\cdots+n^2\times(n-1)\\=&1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+2^3-2^2\\&+3^3-3^2+4^3-4^2+\cdots+n^3-n^2\\=&1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+1^3-1^2+2^3\\&-2^2+3^3-3^2+4^3-4^2+\cdots+n^3-n^2\\=&1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3\\=&(1+2+3+\cdots+n)^2\end{aligned}$$

(跟前面相同部分省略)

$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + 2^2 \times 1$
$+3^2 \times 2 + 4^2 \times 3 + \cdots + n^2 \times (n-1)$
$= S_n + 1 \times (1+1)^2 + 2 \times (2+1)^2 + 3$
$\times (3+1)^2 + \cdots + (n-1) \times ((n-1)+1)^2$
$= S_n + 1 \times (1^2 + 2 \times 1 + 1) + 2 \times (2^2$
$+2 \times 2 + 1) + 3 \times (3^2 + 2 \times 3 + 1) + \cdots$
$+(n-1) \times ((n-1)^2 + 2 \times (n-1) + 1)$
$= S_n + 1^3 + 2 \times 1^2 + 1 + 2^3$
$+2 \times 2^2 + 2 + 3^3 + 2 \times 3^2 + 3 + \cdots$
$+(n-1)^3 + 2 \times (n-1)^2 + (n-1)$
$= S_n + 1^3 + 2 \times 1^2 + 1 + 2^3$
$+2 \times 2^2 + 2 + 3^3 + 2 \times 3^2 + 3 + \cdots$
$+(n-1)^3 + 2 \times (n-1)^2 + (n-1)$
$+n^3 + 2 \times n^2 + n - n^3 - 2 \times n^2 - n$
$= S_n + (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3)$
$+2 \times (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$
$+(1+2+3+\cdots+n) - n^3 - 2n^2 - n$
$= S_n + (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3)$
$+2S_n + \frac{n(n+1)}{2} - n^3 - 2n^2 - n$
$= 3S_n + (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3)$
$+\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - n^3 - 2n^2 - n$
$= 3S_n + (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3)$
$-n^3 - \frac{3n^2}{2} - \frac{n}{2}$

$$0 = 3S_n - n^3 - \frac{3n^2}{2} - \frac{n}{2}$$
$$3S_n = n^3 + \frac{3n^2}{2} + \frac{n}{2}$$
$$3S_n = \frac{n}{2}(2n^2 + 3n + 1)$$
$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3、結語

有很多人研究求 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ 的方法, 由於每個人的想法不一, 因而產生的解法也各自不同。在以前學習創造力的課程中, 聽過這樣一句話,「無中生有」是比較難, 而「有中生新」是比較容易的。在現有的問題上加以改良, 以得到新的結果。方法一是從知道數列的前幾項看出它的一般項, 這種由特殊的例子推測到一般的現象, 在數學上是很常用的。方法二、三是用分項對消, 在很多題目都有用到, 只是爲想到 $(n+1)^3 - n^3 = 3n^2+3n+1$ 這個公式找到一個理由來解釋。方法四是利用倒過來寫相加的技巧, 而這個方法讓我感覺較深刻, 也是一個「有中生新」的例子。要找到一個新的方法有時並不容易, 但是可以利用現有的方法加以修正而得到一個改良的方法, 這樣也是一種創新。在這個方法中, 第一個方程式列出之後, 爲了找另外一個方程式讓我困擾很久, 幾乎想要放棄, 後來終於找到另外一個方程式。所以只要能夠堅持不放棄, 最後終能成功。在科學上有很多的發現也是如此。方法五是用體積的觀念, 這種方法也很多人想過。方法七中, 我們的目標是平方, 卻是先得到立方的結果。如果以能夠推廣到求 $1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k$, k 爲正整數, 方法三, 用到 $(n+1)^k = n^k + kn^{k-1} + \cdots + kn + 1$ 是好方法, 而用函數的觀點也很好。

— 本文作者任教於台北市和平高中國中部—