自然對數漫談

宋秉信

數學是科學技術的基礎, 它為生產技術和科學各分支提供重要的工具。生產技術和科學的發展對數學又提出更新更高的要求, 促進數學的發展。同時, 數學理論的提高與計算技術和方法的改進, 對生產技術和科學各部門起著很大的推動作用。所以說, 數學的不斷發展歸根結底決定於人類生產實踐的需要。以10為底的常用對數就是基於人們對數字的乘除、乘方和開方等運算要求快速而發展起來的。自然對數則是由於微積分學的產生可以解決變量之間的函數關係而發展起來的。本文主要是談談自然對數有關的的問題。

一. 對數及對數表的編製

早在16世紀末, 由於航海事業的蓬勃發展, 人們需要進行天文觀測來確定船隻的方位。這就遇到了大量繁雜的計算課題需要人們去研究。如何簡化計算便是當時逼切需要解決的問題。社會的需要促使數學家乃至於天文學家著力去研究並創造一種新的簡便的計算方法。對數就是在這樣的歷史條件下產生的。

“對數”是繼乘方、開方運算之後第七種數學運算。它與解析幾何、微積分被人們視為17世紀數學領域裡最偉大的三大成就。為什麼對對數的發現作如此高的評價呢? 這完全在於對數方法對於社會和人類所作出的巨大貢獻。對數能將乘除、乘方和開方轉化為加減、乘除。於是繁雜的計算得以大大的簡化, 促進了生產技術和科學的發展。法國大數學家拉普拉斯 (Laplace, 1749-1827) 曾說過: “納皮爾對數的發明, 不僅是減省了天文學家的工作, 而且是相當於倍增其壽命”。這個評價眞是恰如其分。

1554年, 德國數學家史基弗里對下面等比數列和等差數列進行比較:

$$\cdots 2^{-4}, 2^{-3}, 2^{-2}, 2^{-1}, 2^{0}, 2^{1}, 2^{2}, 2^{3}, 2^{4}, \ldots \quad (1)$$

$$\cdots \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16, \ldots \quad (1')$$

$$\cdots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots \quad (2)$$

他發現數列 (1) 或 ($1'$) 的乘除關係可以轉化為數列 (2) 的加減關係。而且他還發現數列 (1) 或 ($1'$) 的乘方和開方關係也可以轉化為數列 (2) 的乘除關係。就是說, 在數列 (1) 或 ($1'$) 中任取兩個數作乘 (除) 法運算所得的積 (商), “對下來”在數列 (2) 中取相對應的數作加 (減) 法運算, 其和 (或差) “對上去”就是所求的積 (或商)。“對數”一詞的來源

就在於此, 這便是對數思想的萌芽。但是, 當時史基弗里僅僅發現這一性質而已, 他並沒有根據此性質作進一步研究, 更沒有編製出對數表來。

如果我們把史基弗里所發現的性質用現在對數符號來表示的話, 便是:

$$\begin{array}{ccccc} a & \cdot & b & = & ab \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \log_2 a & + & \log_2 b & = & \log_2(a+b) \end{array}$$

這可以說是最早的最原始對數表吧。如表一。

N	$\cdots$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	$\cdots$
$\log_2 N$	$\cdots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$

表(一)

註: 史基弗里想像中最早最原始的對數表。

這個最原始的對數表的使用價值不大。因爲它的間隔太大, 有許多數無法在表中查找到。如計算 6×3, $21\div 1.6$ 等在表中就沒有。怎麼辦? 人們在實踐中發現, 眞正有使用價值的對數表一定要使眞數 N 的間隔很密才行。因爲, 在利用對數作乘法或除法運算時, 不僅要從眞數表中查出其相應的對數來, 而且還要將查到的對數經過加減運算後的和、差, 反查出它所對應的眞數表, 因此一張眞正有使用價值的對數表, 不僅要使其眞數的間隔很密, 而且對數的間隔也必須很密。只有這樣, 不論是由眞數查對數; 還是由對數查眞數, 都比較精確。

那麼, 怎樣才能編製出眞數、對數的間隔都比較密的對數表呢?

二. 以 e 為底的對數表的產生

早在公元前200年, 古希臘著名數學家和物理學家阿基米德就注意到下面數列之間的一一對應關係:

$$\begin{array}{cccccccc} 10^0, & 10^1, & 10^2, & 10^3, & 10^4, & 10^5, & 10^6, & \ldots \\ 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \ldots \end{array}$$

它們也具有史基弗里所發現的性質。可以使冗繁的乘除法運算轉化爲較簡單的加減法運算。但阿基米德當時也沒有把這一研究工作繼續進行下去。如果當時他能編製出一張眞數範圍在1到10之間的對數表也就足夠了。在這樣的表中對於任意正數的對數就容易求得了。遺憾的是歷史上最早眞正能使用的對數表不是以10爲底的對數, 而是英國數學家納皮爾 (J. Napier 1550-1617) 在1614年編製出的 Napier 對數。

在微積分學創立之前, 想直接用10爲底來編製適用的對數表是比較困難的。人們在長期的實踐中逐步找到了以 e 爲底作出適用的對數表來。爲什麼選用 e 爲對數的底數呢? 其原因是:

1. 在微積分學創立之前, 要以眞數算出它相應的數來是有一定困難的。當時只能利用公式 $N=a^{\log_a N}$, 從對數算出相應的眞數, 這樣在計算時只要進行開方運算。

如果取以10爲底的話, 要作出對數間隔是 0.0001 的表來, 從表二中可以看出必須計算 $\sqrt[10000]{10}$, $\sqrt[10000]{100}$, $\sqrt[10000]{1000}$, $\ldots$, 這在當時, 要計算出來談何容易, 是很難辦到的事情。爲避免開10000次方的困難, 人們很自然地想到是否可以把底數選得大一些。如以 10^{10000} 爲底, 這樣指數爲 10000, 正好與開 10000 次方相對消。而且計算起來就方便多了。如表三。

$\log_{10} N$	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003	$\cdots$
N	$10^0=1$	$10^{0.0001}=\sqrt[10000]{10}$	$10^{0.0002}=\sqrt[10000]{100}$	$10^{0.0003}=\sqrt[10000]{1000}$	$\cdots$

表(二)

註: 取以10爲底, 對數間隔爲 0.0001 的對數表

$\log_{10^{10000}} N$	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003	$\cdots$
N	$(10^{10000})^0=1$	$(10^{10000})^{0.0001}=10$	$(10^{10000})^{0.0002}=100$	$(10^{10000})^{0.0003}=1000$	$\cdots$

表(三)

註: 取以 10^{10000} 爲底, 對數計算起來方便多了。

這樣改進, 對數的間隔是比表 (二) 小了一些, 且計算起來也方便了, 因爲避開了開方的運算。但眞數的間隔仍嫌過大, 而且越靠後越大。因此, 用這張表從對數反查其眞數是適用的, 反過來由眞數查對數就不怎麼適用了。如要查眞數爲384的對數, 這張表就無能爲力了。爲了彌補上述之不足, 人們又想到是否將底數縮小。如縮小爲 2^{10000}, 見表四。

$\log_{2^{10000}} N$	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003	$\cdots$
N	$(2^{10000})^0=1$	$(2^{10000})^{0.0001}=2$	$(2^{10000})^{0.0002}=2^2$	$(2^{10000})^{0.0003}=2^3$	$\cdots$

表(四)

註: 取以 2^{10000} 爲底的對數表, 計算起來更加方便。

從表 (四) 中可以看出它比表 (三) 要好得多。它除了保持對數間隔小、計算方便等優點外, 它的眞數間隔也大大縮小。這就給數學家們提供了編製出適用的對數表的思路, 即按這種方法逐步縮小底數的方法。如當時人們進一步將底數縮小爲 $(1.0001)^{10000}$, 如表五。

$\log_{1.0001^{10000}} N$	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004	$\cdots$
N	1.000000	1.000100	1.000200	1.000300	1.00400	$\cdots$

$\log_{1.0001^{10000}} N$	0.0009	0.0010	0.0011	$\cdots$	0.0050	$\cdots$	0.0060	$\cdots$
N	1.000900	1.001000	1.001011	$\cdots$	1.005012	$\cdots$	1.006018	$\cdots$

表(五)

註: 由於對數、其數的間隔更密了, 使用起來方便極了。

這種眞數的間隔更小了, 不論是從眞數查對數, 還是由對數反查眞數, 都比較方便。對於表中沒有的數, 我們可以根據線性插値的方法求得比較精確的近似值。當然, 還可以進一步改進, 如將底數縮小爲 $(1.00001)^{100000}$, 那麼所編製出來的對數表的間隔將會更密, 精確度會更高。

從上面討論的問題, 不難發現, 之所以能用初等方法編製出較爲適用的對數表來, 其關鍵在於採用了 $(1.0001)^{10000}$ 或 $(1.00001)^{100000}$ 這樣一種特殊形式的數做底數。因爲

$$\begin{aligned}(1.0001)^{10000} &= (1+0.0001)^{10000}\\ &= (1+\frac{1}{10^4})^{10^4},\\ (1.00001)^{100000} &= (1+0.00001)^{100000}\\ &= (1+\frac{1}{10^5})^{10^5}, \cdots,\end{aligned}$$

像這樣形式的數, 一般可表示爲 $(1+\frac{1}{n})^n$。當 $n=10^4$, $n=10^5$, 就是上面所說的兩種形式。顯然, n 越大, 用 $(1+\frac{1}{n})^n$ 作底所編製出的對數表就越能滿足我們的要求。

級數 $(1+\frac{1}{1})$, $(1+\frac{1}{2})^2$, $(1+\frac{1}{3})^3$, $\cdots(1+\frac{1}{n})^n, \cdots$ 是收斂的。1727年歐拉 (Euler, 1707-1783) 首先把這個級數的極限値記作 e, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e(e\approx 2.7182818\cdots)$。

從理論上講, 用上面所述的初等方法編製出來的對數表, 應以 e 爲底是最爲理想的。但是, e 是一個無理數, 在實際計算時只能取它的近似値作爲底。納皮爾當時就是採用 $(1.0000001)^{10000000} = (1+\frac{1}{10^7})^{10^7}$ 爲底編製出歷史上第一張可供使用的對數表。Napier對數是與自然對數相似近。它們之間的關係是: 若正數 N 的 Napier 對數等於 L, 則有 $\log_a(\frac{N}{10^7}) = \frac{L}{10^7}$, 其中 $a=(1+10^{-7})^{10^7}$。此數與自然對數的底數 e 的倒數 e^{-1} 很接近。

2. 我們知道, 用除1以外的任何正數爲底的對數函數的導數都會引出一個以 e 爲底的對數。

如以對數函數 $y=\log_a x$ 爲例, 其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$。因爲

$$\begin{aligned}y' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}(\frac{1}{\Delta x}\cdot\log_a\frac{x+\Delta x}{x})\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\Big[(\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x})\cdot\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})\Big]\\ &= \frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}}\\ &= \frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\log_a(1+\frac{1}{\frac{x}{\Delta x}})^{\frac{x}{\Delta x}}\end{aligned}$$

當 $\Delta x\to 0$, $\frac{x}{\Delta x}\to\infty$, 且 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(1+\frac{1}{\frac{x}{\Delta x}})^{\frac{x}{\Delta x}}=e$。所以有

$$\begin{aligned}y' &= \frac{1}{x}\log_a\lim_{\Delta x\to 0}(1+\frac{1}{\frac{x}{\Delta x}})^{\frac{x}{\Delta x}}\\ &= \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x}\frac{\log_e e}{\log_e a} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln a}。\end{aligned}$$

註: $\ln a$ 爲自然對數符號, 即以 e 爲底, a 的對數。

自從有了以 e 爲底的對數表以後, 利用換底公式, 可得 $\log_{10}N = \frac{\log_e N}{\log_e 10} = \frac{\ln N}{2.3025850929\cdots}$。這就不難進一步將以 e 爲底的對數換算成以10爲底的對數。應該指出的是, 在納皮爾生活的那個時代, 指數概念並未完成。納皮爾本人也算不知道對數的“底”這一

概念。一直到18世紀歐拉才發現指數與對數的關係。這表明對數的發明在指數概念之前。

英國一位數學、天文學家布立格斯 (H. Briggs, 1561-1631) 曾建議納皮爾將他的對數作些改進, 以求更便於計算。這種改進當然是指要他改爲以10爲底的對數。但納皮爾還未來得及修改, 便去逝了。在納皮爾去逝後, 布立格斯以其他後半生的全部精力完成了納皮爾及他自己的願望, 於1624年出版了「對數算術」一書。其內容包括從1到20000以及從90000到100000之間的以10爲底的14位常用對數表。而20000到90000之間的常用對數表到1628年才由荷蘭數學家佛拉哥 (Viacg, 1600-1667) 補足完成。值得一提的是, 在17世紀中葉, 對數傳入我國, 但當時我國數學家對對數已有了深入的研究。其中最有影響的是清代數學戴煦 (1805-1860) 著有「求表捷術」等。這是中華民族數學史光輝的一頁。

三. 為什麼以 e 為底的對數叫做自然對數?

對數函數 $y = \log_a x$ $(a > 0$ 且 $a \neq 1)$ 的導數 $y' = \frac{1}{x}\log_a e$, 對於 $a = e$ 時, 便有 $y' = \frac{1}{x}$。即當 $y = \ln x$ 時, 有 $y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$。而且, 只有 $\ln x$ 的導數才等於 $\frac{1}{x}$, 其它代數函數 (如 $y = x^n$ 等) 的導數是不可能等於 $\frac{1}{x}$ 的。這就是說, 代數函數 (如 $y = x^n$ 等) 不能得到微分爲 $x^{-1}dx$ 的形式。

積分是微分的逆運算, 所以 $\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$。就是說, 一個分式的分子是分母的微分, 此分式的積分就是分母以 e 爲底的對數。只要形狀呈 $\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \int \frac{df(x)}{f(x)}$, 則 $\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \ln|f(x)| + c$, 這反映了自然界的現象有種種函數關係, 而要確立變量之間的函數關係往往需要確立函數的導數或微分的關係式。即微分方程通過解這種方程, 得出所要求的函數關係。若方程中存在著 $\int \frac{f'(x)dx}{f(x)}$ 的項, 那麼積分後便會出現以 e 爲底的對數。而且, 反映自然界規律的函數關係, 總是以指數形式或對數形式出現的, 所以必定是以 e 爲底的對數。最能說明以 e 爲底的指數或對數和自然界的關係是自然界的複利律。我們知道, $(e^x)' = e^x$, 即 e^x 的導數等於其本身。而且一個函數其導數等於其本身的也只有 e^x。所以, 若發現一個函數 y, 其導數 (變化率) 與函數本身成正比, 那麼, 我們便可斷定所研究的函數一定是以 e 爲底的指數函數或對數函數。即若 $\frac{dy}{dx} = \pm ay$, 則 $y = ce^{ax}$ 或 $y = ce^{-ax}$ (其中 a, c 均爲常數)。若函數的數量是增加, 則爲正; 是減少的則爲負。由此可知, 若寫成對數形式, 則是以 e 爲底的對數除一些經驗式外, 一般不可能有其它正數爲底的指數或對數出現。人們把以 e 爲底的對數稱作自然對數也就源於此。而“e”作爲數學符號使用最早的人是歐拉, 爲紀念他, 才確定用“e”作爲自然對數的底數。

四. 自然對數表的編製

若把對數函數 $\ln(1+x)$ 展開成台勞級

數:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots \quad (-1<x\leq 1),$$

把 x 換成 $-x$, 便有

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots \quad (-1\leq x<1),$$

$$\therefore \ln\frac{1+x}{1-x}=2(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots) \quad (-1<x<1),$$

設 k 是任意自然數, 命 $x=\frac{1}{2k+1}<1$, 則 $\frac{1+x}{1-x}=\frac{k+1}{k}$。

$$\therefore \ln\frac{k+1}{k}=2\Big[\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{3(2k+1)^3}+\frac{1}{5(2k+1)^5}+\cdots\Big],$$

或

$$\ln(k+1)=\ln k+2\Big[\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{3(2k+1)^3}+\frac{1}{5(2k+1)^5}+\cdots\Big]。$$

根據這個公式, 從 $\ln 1=0$ 出發, 就可以循環地計算出所有自然數的自然對數。如果取前六項來計算近似值, 誤差是:

$$\begin{aligned}R_6&=\Big[\frac{1}{13(2k+1)^{13}}+\frac{1}{15(2k+1)^{15}}+\frac{1}{17(2k+1)^{17}}+\cdots\Big]\\&<\frac{2}{13(2k+1)^{13}}\Big[1+\frac{1}{(2k+1)^2}+\frac{1}{(2k+1)^4}+\cdots\Big]\\&=\frac{2}{13(2k+1)^{13}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{(2k+1)^2}}\\&=\frac{2}{13(2k+1)^{11}}\cdot\frac{1}{4k^2+4k}\\&<\frac{2}{13\cdot 13^{11}\cdot 8}\\&=1.0856\times 10^{-7}。\end{aligned}$$

因此取前六項來計算自然對數的近似值時, 能夠精確到小數第六位。這就是說, 要編製六位自然對數表, 取前六項就已夠了。當然在循環計算中, 誤差還會累加, 因此還應該多取幾項。

我們只要編製出以 e 爲底的自然對數表, 其他對數表只要乘以變換模就可以了。

參考文獻

1. 莫一, 納皮爾與對數的發明, 華中師院 (1984), 武漢市,「數學通訊」, 八四年第四期, p18。
2. 祝梁濟, 淺談自然對數, 北京市,「數學通報」, 一九八二年第二期, p19。

—本文作者任教於中國福建省泉州市仰恩大學—