

中國傳統數學機械化思想

傅海倫

內容提要：本文對數學歷史發展過程中的兩個中心思想：數學公理化和數學機械化進行比較和分析；論述了機械化、數學機械化及其特徵，在此基礎上，闡述了中國傳統數學的機械化思想，並對這兩種中心思想在數學發展中的地位和作用作出了評價。

關鍵詞：機械化；數學機械化；數學公理化；特徵；地位；作用。

一. 兩個中心思想：數學機械化和數學公理化

貫穿在整個數學發展歷史過程中有兩個中心思想：一是公理化思想；另一是機械化思想。公理化思想導源於歐幾里得 (Euclid) 的古希臘數學，約公元前3世紀的「幾何原本」是建立在公理化體系上的數學典範，也是公理化思想的濫觴，在現代數學尤其是純粹數學中佔據著統治地位^[1]。

中國古代數學卻表現出與西方數學明顯不同的知識體系和思想方法，從總的來說，中國古代數學乃是機械化體系的代表，其思想著眼點就在於“機械化”^[2]。與古希臘及其延續的數學公理化的傳統相對應，從問題出發，以解決實際問題為目的，建立算法的機械化則是中國古代數學研究的傳統。

當代著名數學家吳文俊先生通過長期深入研究 and 全面考察中國數學史，總結出中國數學傳統的機械化思想。吳先生說：“中國的古代數學基本上遵循了一條從生產實踐中提

練出數學問題，經過分析綜合，形成概念與方法，並上升到理論階段，精煉成極少數一般性原理。進一步應用於多種多樣的的不同問題。從問題而不是從公理出發，以解決問題而不是以推理論證為主旨，這與西方之以歐幾里得幾何為代表的所謂演繹體系旨趣迥異，途徑亦殊。

由於形形色色的問題往往歸結為方程求解，因而方程求解就成為中國傳統數學「九章」以來發展中的一條主線。這與西方數學之以定理求證為中心者正相對照……中國傳統數學在從問題出發以解決問題為主旨的發展過程中建立了以構造型與機械化為其特色的算法體系，這與西方數學以歐幾里得「幾何原本」為代表的所謂公理化演繹體系正好遙遙相對。「九章」與「劉注」是這一機械化體系的代表作，與公理化體系的代表作歐幾里得「幾何原本」可謂東西輝映^[3]。

吳文俊先生正是在中國古代數學機械化思想與成就的啟發和鼓舞下，在數學機械化方面取得舉世矚目的成就的。正如他說的：

“經過對中國古代數學學習的觸發，結合著幾十年來在數學研究道路上探索實踐的回顧與分析，終於形成了這種數學機械化的思想。這種思想一旦形成，就自然化成一股頑強的動力”^[4]。

二. 機械化、數學機械化及其特徵

何謂機械化？按吳文俊先生的解釋，“所謂機械化，無非是刻板化和規格化。”^[5]

吳先生借用現代機器和計算機的工作來說明機械化：一方面，無論是機器代替體力勞動，或是計算機代替某種腦力勞動，其所以成為可能，關鍵在於所需替代的勞動已經“機械化”，也就是說已經實現了刻板化或規格化；另一方面，隨著現代機器性能和計算機技術的提高，大量複雜的勞動都可交由機器操作進行，這必然會進一步刺激並促進腦力勞動的機械化。簡單刻板的機械化動作，不僅可以讓機器來實現，還為自動化鋪平了道路，就這一意義來說，數學中的某些腦力勞動與體力勞動頗有共同之處，它們也就同樣可以機械化^[6]。

數學由於符號形式而易於運算和推理，故研究問題時，人們可以暫時撇開符號的意義而僅著眼於形式，當符號與一定的概念單值地對應時，思想的操作可轉換為對符號的操作，而符號的操作可委託機器進行，故人們利用符號借助計算機，便可使複雜、繁重的腦力勞動機械化，從而實現智力的解放。從認識論上看，數學思維既有創造性活動又有非創

造性活動。二者又是互為前提、相互制約、相互轉化的。非創造性工作是創造性工作的基礎，創造性工作又可以通過某種途徑部分地轉化為非創造性工作，當我們通過構造算法程序把求解問題的創造性工作轉化為非創造性工作之後，也就有可能把問題的求解過程交由機器來完成，這便是數學思維的機械化。數學問題的機械化就要求在運算或證明過程中，每前進一步之後，都要有一個確定的、必須選擇的下一步，這樣沿著一條有規律的、刻板的道路，一直達到結論。

由此看來，所謂數學機械化，即是把要求解或證明的某一類問題（這類問題可能成千上萬，也可能無窮無盡）當作一個整體加以考慮，建立一種統一的、確定的求解法則或證明程序，使得該類中的每一個問題，祇要按照此程序機械地（死板地）、按部就班地一步一步實施下去，經過有限步驟之後，即可求得問題的解或推斷出數學命題的結論是否為真，命題為真時即為定理。對一類問題而言，這種統一的、確定的求解或證明的方法稱為數學問題的機械化方法，一般表現為機械化程序，它具有以下幾個特點：

1. 確定性。即程序是“一義”的規定，沒有歧義的理解，運用時是可行的。
2. 預見性。在執行這個程序時，每一步都可預見到確定的下一步怎麼辦。
3. 普適性。程序普遍適用於解決問題所在的同一類其它任何一個問題。
4. 具體性。即實現具體求解，能在有限步內達到“最後”一步，得出所要求的具體結果。

數學機械化又是創造性思維和非創造性思維活動的統一。建立統一的、確定的計算或證明機械化程序的過程就是創造性思維活動的過程，這是實現數學機械化的關鍵；按照固有的程序實施機械化求解或證明，這是將思維的創造性工作部分地轉化為非創造性工作的過程，也是完成思維機械化操作的過程。

三. 數學機械化思想來源於中國古算，中國傳統數學乃是機械化體系的代表

數學機械化思想來源於中國古算，並貫穿於中國古算整個發展過程之中。中國古算以算法為中心，注重計算，以解決問題為主旨，幾乎不考慮離開數量關係的圖形的性質，而是通過切實可行的方法把實際問題化歸為一類數學模型，然後構造一套機械化的算法，並按程序化的要求，一步步求出具體的數值解。

算法的程序化是中國古代數學的重要特點。算經中的“術”全是計算公式或計算程序或應用這些公式、程序的細草。所有的問題都要算出具體數值作為答案，即使是與圖形有關的幾何問題也不例外，這就是幾何方法與算法的有機結合或幾何問題的算法化。從問題出發，建立算法的機械化一直是古代中國數學研究的傳統，也是中算家努力的方向乃至孜孜以求的目標。

成書於公元前一世紀^[7]的「九章算術」是算法機械化的光輝典範。書中歸納了九類

數學問題，每章中討論一類，基本上採取算法統率應用問題的形式^[8]，給出解答。「九章算術」提出了世界上最早、最完整的分數四則運算法則及各種比例和比例分配算法，也提出了世界上最早、最完整的多位數開平方、開立方程序，線性聯立方程組的解法及有關正負數概念與移項法則，也最早見於此書。「九章算術」中的數學機械化思想被後代數學家所繼承和發展，魏晉時劉徽發展了多種算法，其「九章算術」注是對數學機械化算法的重大貢獻，劉徽以率的基本運算為“綱紀”，實現了籌式運算的模式化和程序化，把以籌算為基礎的算法提高到理論的高度。開平方、開立方的機械化過程，到宋代更發展成為高次代數方程求數值解的機械化算法，賈憲求賈憲三角各廉的增乘開方法、賈憲開創而秦九韶完善的求高次方程正根的正負開方術、「數書九章」中的大衍求一術解法、李冶使用的天元術等等都是一套比較複雜的計算程序，許多程序可以直接搬到現代電子計算機上實現。

被西方推崇為中世紀最偉大的數學家朱世杰^[9]，其數學名著「四元玉鑒」(1303年)中，已給出了高次代數聯立方程組的解法(未知數的個數最高可達4個)成為機械化證明的代數基礎。而這類問題的求解卻長期困惑著近代數學家們，在近代，解高次聯立方程組的方法直到近二、三十年才有重大進展。不僅如此，宋元時期的“天元術”以至於“四元術”，實則建立了一整套的代數機器，包括天元、地元、人元、物等元等相當於現代未知數的概念，並建立這些元正負乘幂及其代數式運算系統，即可把幾何問題轉化為代數方程與方程組的求解問題。

以天、地、人、物等元代替所求線段，用它們的代數式來表示幾何圖形的長度、面積，然後運用相伴發展了的那套代數機器進行求解。所有這些，正好與迪卡兒 (Descartes) 的工作是相通的，是解析幾何得以創立的決定性一步。第二次世界大戰之後，電子計算機的誕生、普及和發展，促使人們重新認識以中國為主體的古代東方數學的程序化思想與機械化算法體系。實際上，中國傳統數學的許多計算程序不僅是與現代電子計算機原理相通的，而且這些思想對今天的數學教學與研究仍有啓迪作用。中國傳統的機械化與代數化思想應該合理地繼承和發揚，吳文俊關於數學機械化的研究工作，就是這些思想和成就啓發之下的產物，它是我國自「九章算術」以迄宋元時期數學的直接繼承^[10]。

四. 正確看待數學機械化和數學公理化在數學歷史發展中的地位 and 作用

數學機械化思想和數學公理化思想分別代表著東西方數學發展的主流，在數學發展史上，總是相比較而存在，具有各自相對獨立發展的一面，也有相互聯繫、相互作用而交叉發展的另一面。首先，從歷史來看，數學基本上是沿著兩條路線發展的：一條是從希臘歐幾里得邏輯演繹體系下來的；另一條是發源於中國，影響到印度，然後影響到世界的數學。東西數學兩大體系、兩種思想差不多是各自獨立發展起來的，在數學漫長的歷史中非但沒有相互代替，而是以其自身的內容和運行機制表現出各自不同的風格和特點。

一般地說，公理化思想著重“封閉式”的理論構建，更強調邏輯演繹體系和非構造型思維方式下的“存在”；而機械化思想著重構造型實踐，更強調“經驗”、“發現”和構造型思維方式下從無到有的發明。兩種思想各有優勢，共同存在，相互補充。由於人們的思維方法本來也不祇是單一的模式，東西方數學的兩種思想方法分別反映乃至適應了各民族科學文化的特定環境和傳統思維方式的不同特點而獲得相當程度的獨立發展。其次，處於同一思維水平的人們的數學思想在很大程度上又具有內在一致性，這正是我們生活於其中且也屬於它的物質世界統一性的一種反映。在希臘有句名言：“規律總是相同的。”人類社會和科學發展到一定程度，總會出現一些相同的東西。建立在機械化思想的數學總是自覺或不自覺地在公理化數學原則的作用下進行研究和探索的；而建立在公理化思想的數學中又總存在著機械化數學的因素，“純淨”的機械化數學和公理化數學都是不存在的，這在幾何學中尤為突出。

在古希臘時代，對待幾何學就有阿基米德和歐幾里得的兩種不同體系^[11]。前者以阿基米德的有關著作為代表，著重研究幾何圖形的數量特徵或其度量，諸如圓周率、球面面積以及拋物線、弓形面積的計算等等；後者以「幾何原本」為代表，把數量關係完全排除在外，而單純追求各種幾何事實間的邏輯關係，以此建立起幾何公理體系成為演繹推理方法的典範。這兩種不同的體系，中國古代幾何兼而有之^[12]。中國的早期幾何學並不僅僅是經驗公式的總結而沒有論證性質，戰國時期墨家的代表作——「墨經」，是在與歐幾里

得誕生（公元前330年）的同時問世的。「墨經」是我國論證幾何學的萌芽，在至今有傳本的53篇中的“經上”，記錄了許多幾何學名詞的定義，“經說上”給出各條經文補充說明^[13]，墨家後學所作共六篇，其中「小取」是一篇關於邏輯學的完整論文，內中提出墨家邏輯的三個手段：“以名舉實，以辭抒意，以說出故”；“名”是概念，“辭”是判斷，“說”是推理，很類似演繹數學中的定義、定理和證明。同篇還提到效、譬、侔、援、推等五種推理方法，既有演繹法，又有歸納法和類推法^[14]。所有這些，都與歐幾里得有關的定義和公式相類似，但事實上，墨家的思想並未能發展成爲數學的主流。

以後的幾何學，中算家並不追求邏輯論證的完美，而是著重於實際計算問題的解決，通過巧妙的構圖和直觀模型進行“析理”，以建立解決問題的一般方法和一般原則；但另一方面，這種幾何學又是以面積、體積、勾股相似等爲基本概念，以長方形面積算法、長方體體積算法，相似勾股形的性質爲出發點的，整個幾何理論建立在“出入相補原理”、“祖暅原理”、“勾股不失本率原理”及“劉徽原理”等基本原理解決之基礎上，例如，由勾股定理自然地引起平方根的計算問題，而求平方根和立方根的方法，其步驟就是以出入相補原理爲幾何背景逐步索驥而得。這說明，公理化數學原則在自覺或不自覺地被運用著並隨著數學的發展而發展。而古希臘的論證幾何到了公元一世紀前後，也產生了一種十分接近於我國佔主要地位的計算和代數體系的幾何學，這可見於當時的兩部著

作——「計量術」和「幾何學」。希臘和我國幾何學的這種奇妙的交叉發展，充分說明在數學的歷史長河中，各學科都是在多種思想和方法的探索中前進的。

不僅如此，從數學有史料爲依據的幾千年發展過程來看，以公理化思想爲主的演繹傾向以及以機械化思想爲主的算法傾向往往互爲消長，各自對數學的發展作出了貢獻。一方面，公理化思想爲人們認識世界提供了演繹推理的模式和理性證明的手段，從而把數學知識組織成爲一個嚴密的邏輯體系，形成數學理論，對數學乃至科學的發展發揮了巨大作用，以至於現代數學幾乎都是按「幾何原本」公理化方法建構起來的；另一方面，自公元前3世紀阿基米德之後，希臘數學開始衰落，到公元前1世紀「九章算術」的出現，標志著世界數學重心由古希臘讓位給中國^[15]，數學機械化算法體系成爲數學發展的主流。機械化思想作用下的中國傳統數學從問題出發以解決問題爲主旨，其成果之輝煌，遠非同時代世界其它的數學可以相比。機械化的算法內容，提高了解決實際問題能力。這種理論聯繫實際的重應用、重計算技術的思想是推動數學發展的動力之一。因而在數學的發展中，這種數學思想具有普遍意義。例如在17世紀分析數學產生之初，就不是靠理論的嚴格，而是靠實際應用的成功來保證數學的“可靠性”的，因而它獲得迅速發展，開創了數學發展的新階段。對近代數學起著決定作用的解析幾何與微積分，實質上都是機械化思想而非公理化思想的產物^[16]。

現代應用數學就是按應用方向或主要應用的數學模型分類的。把對一個數學定理的

證明轉化為利用適當算法的一個機械化的計算是現代數學的重要目標之一。不少著名數學家正日益重視計算機的廣泛使用和算術化的傾向在純粹數學中的作用，紛紛轉向計算機代數、計算機幾何等新興學科。吳文俊先生在幾何定理的機器證明^[17]上居於世界前列，被稱為“吳方法”。他高瞻遠矚，指出：“肇始於我國的機械化算法體系，在經過明代以來近幾百年的相對消沉後，由於計算機的出現，已越來越為數學家所認識與重視，勢必重新登上歷史舞臺”^[18]。“中國古代算術的思想與方法，正好與現代計算機的使用溶合無間，也必將因此而重返青春，以另一種嶄新面貌在未來的數學發展中扮演重要角色”。^[19]

吳文俊機械化定理的創立，為數學的機械化奠定了堅實的基礎，致使數學研究的面貌改觀。而吳文俊定理植根於中國傳統數學這片沃土，是以宋元時期傳統數學“天元術”、“四元術”為基礎創造發展起來的。“吳文俊解釋並發展朱世杰「四元玉鑿」中的解高次聯立代數方程組的有效解法，成為機械化證明的代數基礎^[20]。該法就解多元多項式的方程組而言，是當今世界上唯一能包括一般情形的完整算法。從「九章算術」、「四元玉鑿」到吳文俊「幾何定理機器證明的基本原理」(1984年)，中國數學機械化的思想脈絡清晰可見。自1976年以來，周咸青^[21]用“吳方法”已成功地證明了600多條定理，以吳氏定理為基礎，機器證明定理的範圍又被推廣到非歐幾何、仿射幾何、圓幾何、線幾何、球幾何等等領域。1978年，又證明初等微分幾何中的一些主要定理可以機械化，這樣走出一

條完全是中國人自己開拓的新道路。到80年代，吳文俊不僅建立起數學機械化證明的基礎，而且擴張成廣泛的數學機械化綱領，吳法已在數理科學、理論物理和計算機科學等基礎科學領域成功地解決了一系到理論和實際問題。

近年來，對於中國數學史的研究以及定理機器證明的數學機械化綱領正在急劇擴大影響，真正成為一個獨具中國特色的結構性的、可機械化的數學運動。1990年8月8日，以吳文俊為首的“數學機械化中心”正式成立。在吳文俊的總綱領下，他的同事及學生吳文達、石赫、劉卓軍、王東明、胡森、高小山、李子明、王定康等等在方程求解與數學機械化應用方面已得出一系列理論及實際應用的結果。如多元多項因子分解及極限環問題等等，吳文俊在數學機械化方面的各項獨創性工作使他在國際、國內產生廣泛的影響，享有很高的聲譽，單是定理機器證明就已獲得許多熱情的讚揚。J. S. 穆爾 (Moore) 認為，在吳文俊的工作之前，機械化幾何定理證明處於黑暗時期，而吳文俊的工作給整個領域帶來光明^[22]。美國定理自動證明的權威人士 L. 渥斯 (Wos) 認為吳文俊的證明路線是處理幾何問題的最強有力的方法。

1992年，以吳文俊為首席科學家的國家攀登計劃項目“機器證明及其應用”正式立項。該項目執行5年來，對於設置的：(1) 機器證明的理論與算法、(2) 代數系統求解的理論與算法、(3) 在理論物理中的應用、(4) 在計算機科學中的應用、(5) 在數學學科中的應用、(6) 在機器人機構學中的應用、(7)

吳方法的軟件系統實現——這7個子課題。在大範圍內取得突出成績，超出了預計的目標^{[23][24]}。1995年8月，吳文俊在北京主持了第一屆亞洲計算機數學研討會，交流數學機械化研究的經驗，使有別於西方而具有中國特色也就是東方特色的機械化數學研究在更大的範圍內開展。隨著人們對吳方法、吳原理的認識日益加深，隨著吳定理的應用更為廣泛，隨著其影響逐步擴展，我們有理由相信，吳的方法和原理必將越來越受到國際數學界的高度評價。

參考文獻

- [1][2][4][10][16] 吳文俊,「吳文俊文集」,山東教育出版社,1986年,第298、98頁、前言、287頁、前言。
- [3][18] 吳文俊,「九章算術」及其劉徽注研究序(李繼閔著),陝西人民教育出版社,1990年。
- [5][6] 吳文俊,「數學的機械化問題」,載「自然辯證法通訊」,1978年。
- [7][15] 郭書春,「古代世界數學泰斗劉徽」,山東科技出版社,1992年,94-105、114頁。
- [8] 郭書春,「中國古代數學」,山東教育出版社,1991年,第6頁。
- [9] 參見李約瑟,「中國科學技術史」(第三卷),科學出版社,1978年。
- [11][12][17] 吳文俊,「幾何定理機器證明的基本原理」,(初等幾何部分),計算機科學叢書,科學出版社,導言、導言、120-122頁,1984年。
- [13] 錢寶琮,「中國數學史」,科學出版社,1964年,第16-19頁。
- [14] 劉鈍,「大哉言數」,遼寧教育出版社,1995年,第66頁。
- [19] 吳文俊,“對中國傳統數學的再認識”,載「百科知識」,1987年7、8輯。
- [20][22] 胡作玄,“吳文俊”,載吳文俊主編,「世界著名數學家傳記」(下集),科學出版社,1995年,第1774、1777頁。
- [21] Chou S. C., Mechanical Geometry Theorem-proving, Reidel, 1988.
- [23] 王渝生,“機械化數學新進展”,載「中國科學報(海外版)」,1997年11月25日,第5版。
- [24] 王渝生,“中國傳統數學的現代意義”,載「科學發展的歷史借鑒與成功啓示」,科學出版社,1998年,第90-98頁。

—本文作者任教於山東師範大學數學系—