棋盤的 $5-L$ 形覆蓋

馮躍峰

1. 引言

$m\times n$ 棋盤的覆蓋, 在工程技術、生產生活實際中都有著廣泛的應用, 因而引起了人們的研究興趣, 所謂 $m\times n$ 棋盤, 就是由 m 行 n 列方格排列而成的一個 $m\times n$ 矩形 (橫向爲行, 縱向爲列), 簡稱棋盤, 每個方格稱爲棋盤的格。

所謂棋盤的覆蓋, 就是用若干個圖形去覆蓋 $m\times n$ 棋盤。覆蓋棋盤的每個圖形也由若干個方格組成, 我們稱之爲覆蓋形, 在棋盤的覆蓋中, 約定任何兩個覆蓋形互不重疊, 且任何一個覆蓋形的每一個格都恰蓋住棋盤的一個格, 棋盤的每一個格也恰被某個覆蓋形的一個格覆蓋。比如, 圖1中的 6×6 棋盤被一個 2×2 正方形和4個 2×4 矩形覆蓋, 圖2中的 7×10 棋盤被7個 2×5 矩形覆蓋。

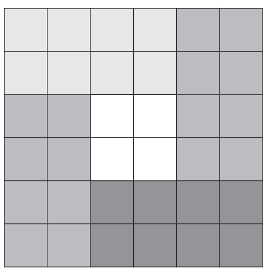

圖1

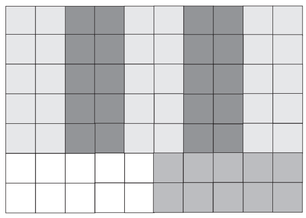

圖2

覆蓋棋盤的圖形可以是正方形、長方形, 還可以是其他非規則形狀的圖形。本文討論的是一種特殊形狀的圖形—“$K-L$ 形”覆蓋棋盤的有關結果, 爲了敍述問題方便, 我們先給如下一些定義。

定義 1: 由 $k(k>3)$ 個方格組成的形如圖3的圖形稱爲 $k-L$ 形。拐角處的兩個方格稱爲 $k-L$ 形的頂格, 另外的連續 $k-2$ 個方格稱爲底格。顯然, 一個 $k-L$ 形可以看作是由一個 $2\times(k-1)$ 矩形去掉一個 $1\times(k-2)$ 矩形得到的, 我們稱那個被去掉的 $1\times(k-2)$ 矩形所覆蓋的區域爲 $k-L$ 形的內部。

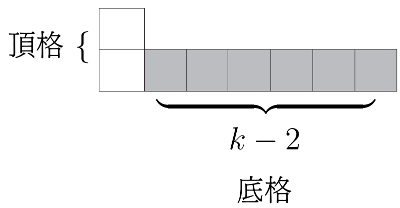

圖3

定義2: 在棋盤的 $k-L$ 形覆蓋中, 若某個 $k-L$ 形的底格是橫 (縱) 向排列的, 則稱此 $k-L$ 形在覆蓋中是橫 (縱) 向覆蓋的, 並稱此 $k-L$ 形所覆蓋的方格是被橫 (縱) 向覆蓋的。

對給定的自然數 k, 尋找 $m\times n$ 棋盤存在 $k-L$ 形覆蓋的充要條件, 是一個難度相當大的問題。1987年, 薛通和王元元在 [1]中共同解決了 $k=3,4$ 的特殊情形, 即下面的

定理1: $m\times n$ 棋盤存在“$3-L$形”覆蓋的充分必要條件是 (m,n) 或 (n,m) 爲

(i) $(2s,3t)$, $s,t\geq 1$,

或

(ii) $(2s+1,3t)$, $s,t\geq 2$。

定理2: $m\times n$ 棋盤存在“$4-L$形”覆蓋的充分必要條件是 $8|mn$ 且 m, $n>1$。

但 [1]中對這兩個定理的證明相當複雜, 用到了七個引理和另外兩個定理。本文將給出這兩個定理的簡化證明, 進而證明 $m\times n$ 棋盤存在“$5-L$形”覆蓋的一個充分必要條件, 即下面的

定理3: $m\times n$ 棋盤存在“$5-L$形”覆蓋的充分必要條件是 (m,n) 或 (n,m) 爲

(i) $(2s,3t)$, $s,t\geq 1$,

或

(ii) $(2s+1,3t)$, $s,t\geq 2$。

2. $3-L$, $4-L$ 覆蓋的簡化證明

定理1的證明:

必要性: 若 (m,n) 及 (m,n) 既不爲 $(2s,3t)(s,t\geq 1)$, 也不爲 $(2s-1,3t)(s,t\geq 2)$, 則 $3\nmid mn$, 或 (m,n), (n,m) 兩者之一爲 $(3,2t-1)$, $t\geq 1$。

當 $3\nmid mn$ 時, $m\times n$ 棋盤顯然不存在“$3-L$形”覆蓋, 結論成立。其次, 考察 $3\times(2t-1)$ 棋盤。當 $t=1$ 時, 它顯然不存在“$3-L$形”覆蓋, 結論成立; 當 $t>1$ 時, 反設 $3\times(2t-1)$ 棋盤存在“$3-L$形”的覆蓋, 如圖4, 將 $3\times(2t-1)$ 棋盤的各個格用 $1,2,3,\ldots$ 編號, 並用 (i,j,k) 表示編號爲 i,j,k 的三個格被同一塊 $3-L$ 形蓋住。

1	6	7		
2	5	8		
3	4	9		

圖4

考察 $3\times(2t-1)$ 棋盤前兩列的格在覆蓋中的所有可覆蓋方式。它們可用下述樹圖表示:

$$\begin{tikzcd}
 & & (1,6,2) & (1) \\
 & (1,6) \arrow[ur] \arrow[r] & (1,6,5) & (2) \\
(1) \arrow[ur] \arrow[r] & (1,2) \arrow[r] & (1,2,5) & (3)
\end{tikzcd}$$

圖5

考察其中編號爲3的格的覆蓋, 對於情形 (3), 格 (3) 無法覆蓋, 因而這種情形不可能出現; 對於情形 (1), 則必出現 (3,4,5); 對於情形 (2), 則必出現 (2,3,4)。所以, 不論出現那種情形, 當 $3\times(2t-1)$ 棋盤存在“$3-L$形”覆蓋時, $3\times(2t-3)$ 棋盤亦存在“$3-L$形”覆

蓋。如此下去, 有 3×1 棋盤存在“$3-L$形”覆蓋, 矛盾。

充分性: (1) 考察 $2s\times3t(s,t\geq1)$ 棋盤, 它可劃分爲 $s\times t$ 個 2×3 棋盤, 而 2×3 棋盤存在“$3-L$形”覆蓋, 所以 $2s\times3t$ 棋盤存在“$3-L$形”覆蓋。

(2) 考察 $5\times3t(t\geq2)$ 棋盤。

若 $t=2p(p\in N)$, 則 $5\times3t=5\times6p$, 此時, $5\times3t$ 棋盤可劃分爲 p 個 5×6 矩形。

若 $t=2p+1(p\in N)$, 則 $5\times3t=5\times(6p+3)=5\times[6(p-1)+9]=5\times6(p-1)+5\times9$。此時, $5\times3t$ 棋盤可劃分爲 $p-1$ 個 5×6 矩形和一個 5×9 矩形。由圖6,7可知, 5×6 矩形和 5×9 矩形都存在“$3-L$形”覆蓋。從而 $5\times3t(t\geq2)$ 棋盤存“$3-l$形”覆蓋。

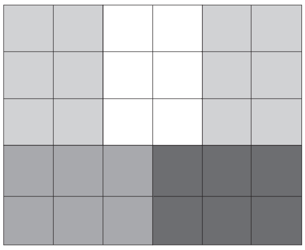

圖6

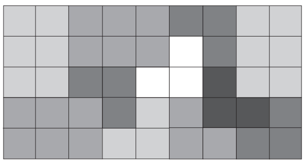

圖7

(3) 考察 $(2s+1)\times3t(s\geq3,t\geq2)$ 棋盤。此時, 注意到 $(2s+1)\times3t=2[2(s-2)+5]\times3t=2(s-2)\times3t+5\times3t$, 所以 $(2s+1)\times3t$ 棋盤可劃分爲一個 $5\times3t(t\geq2)$ 矩形和一個 $2(s-2)\times3t$ 矩形。由前面的 (1), (2) 兩種情形知, $(2s+1)\times3t(s\geq3,t\geq2)$ 棋盤存在“$3-L$形”覆蓋。

綜上所述, 定理1獲證。

定理2的證明:

必要性: 首先, 當 m 或 $n=1$ 時, $m\times n$ 棋盤顯然不存在“$4-L$形”覆蓋。

1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.

圖8

其次, 若 $m\times n$ 矩形存在“$4-L$形”覆蓋, 則必有 $4|mn$, 從而, m,n 中必有一個偶數。不妨設 m 爲偶數。將 $m\times n$ 棋盤的各個格用1, -1 編號 (圖8), 使奇數行的編號爲1, 偶數行的編號爲-1。顯然, 每個 $4-L$ 形蓋住的4個格編號之和爲2或-2。注意到棋盤中所有格的編號之和爲0, 從而覆蓋中, 其和爲2與其和爲-2的 $4-L$ 形的個數相等。於是共有偶數個 $4-L$ 形, 即 $8|mn$。

充分性: 若 $4|m,2|n$, 則令 $m=4k$, $n=2t$。此時, $m\times n=4k\times2t$, $m\times n$ 棋盤可劃分爲 kt 個 4×2 矩形, 所以存在“$4-L$形”覆蓋。

若 $8|m$, 有以下兩種情況。

(1) n 爲偶數, 此時由上知, 結論成立。

(2) n 爲奇數, 令 $n=2t+1(t\in N)$, 則 $n=2(t-1)+3$, 此時, $m\times n=8k\times n=8k\times 2(t-1)+8k\times 3$, 所以 $m\times n$ 棋盤可劃分爲 $k(t-1)$ 個 8×2 矩形和 k 個 8×3矩形。顯然, 8×2 矩形存在“$4-L$形”覆蓋。又如圖 9, 8×3 矩形存在“$4-L$形”覆蓋。所以 $m\times n$ 棋盤存在“$4-L$形”覆蓋。

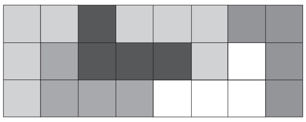

圖9

綜上所述, 定理2獲證。

3. $5-L$ 覆蓋的充要條件

爲討論 $5-L$ 覆蓋的充要條件, 我們先證明如下一些引理:

引理1: 當 m 爲奇數時, 若 $m\times n$ 棋盤 M 存在 $k-L$ 形覆蓋, 則 M 在覆蓋中第一列的格必有被縱向 $k-L$ 形的底格所覆蓋的。

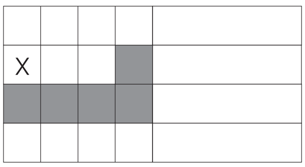

圖10

證: 如果棋盤的第一列中的格都是被横向覆蓋的, 則第一列的格必定都是被各 L 形的頂格所覆蓋。(實際上, 若第一列存在一個格, 它被某個横向 $k-L$ 形的底格所覆蓋, 那麼, 第一列中位於此 L 形內部的一個格不能被横向覆蓋 (圖10), 矛盾)。但每個 $k-L$ 形都有2個頂格, 從而 $m\times n$ 棋盤的第一列有偶數個格, 與 m 爲奇數矛盾。於是必有一個格, 設爲 a_{i1} (其中 a_{ij} 表示位於第 i 行第 j 列的格), 被縱向 L 形覆蓋, 若 a_{i1} 被此 L 形的底格所覆蓋, 則結論成立; 若 a_{i1} 被此 L 形的頂格所覆蓋, 則在此 L 形內部與 a_{i1} 相鄰的那個格 $a_{i-1,1}$ 或 $a_{i+1,1}$ 必被另一個縱向 L 形的底格所覆蓋。引理1獲證。

引理2: 對任何奇數 k 和自然數 n, $k\times(2n-1)$ 棋盤不存在 $k-L$ 形覆蓋。

證: 反設 $k\times(2n-1)$ 棋盤 M 存在 $k-L$ 形覆蓋, 由引理1, M 的第一列心必有一個格是被縱向 L 形的底格所覆蓋的。顯然, 此縱向 L 形本質上只有兩種覆蓋方式: 一是頂格不在棋盤的邊界上 (見圖11), 二是頂格在棋盤的邊界上 (見圖12)。

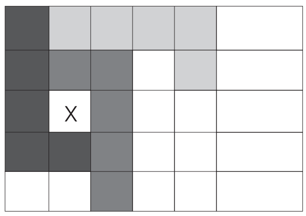

圖11

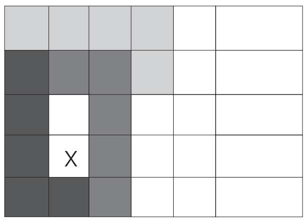

圖12

對於第一種情形, 若格 a_{12} 是縱向覆蓋的, 則格 a_{22} 無法覆蓋, 於是格 a_{12} 是橫向覆蓋的。若 a_{22} 也是橫向覆蓋的, 則格 a_{23} 無法覆蓋, 於是格 a_{22} 是縱向覆蓋的。此時則格 a_{32} 無法覆蓋 (圖11)。矛盾。對於第二種情形, 若格 a_{11} 是被橫向覆蓋的, 則 a_{22} 只能被縱向覆蓋, 此時, a_{42} 無法覆蓋 (圖12), 矛盾。於是, a_{11} 只能被縱向覆蓋, 這樣, 剩下的一個 $k\times(2n-3)$ 棋盤也存在 $k-L$ 形覆蓋。如此下去, $k\times 1$ 棋盤存在 $k-L$ 形覆蓋, 矛盾。

引理3: 7×15 矩形存在“$5-L$形”覆蓋。

證明: 7×15 矩形的一種“$5-L$形”覆蓋如圖13所示。

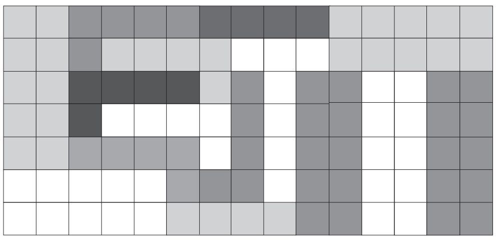

圖13

下面給出定理3的證明:

必要性: 若 (m,n) 及 (m,n) 既不爲 $(2s,5t)(s,t\ge 1)$, 也不爲 $(2s+3,5t)(s,t\ge 2)$, 則 $5\nmid mn$; 或 m,n 中有一個爲小於5的奇數; 或 (m,n), (n,m) 兩者之一爲 $(5,2t-1)$, $t\ge 1$。

首先, 當 $5\nmid mn$ 時, $m\times n$ 棋盤顯然不存在“$5-L$形”覆蓋, 結論成立; 其次, 當 m,n 中有一個爲小於5的奇數時, 反設 $m\times n$ 棋盤 M 存在“$5-L$形”覆蓋, 不妨設 m 是小於5的奇數, 則 $m\le 3$, 由引理1, M 的第一列至少有一個格是個縱向覆蓋的, 這與 $m\le 3$ 矛盾。最後, 當 (m,n) 或 (n,m) 爲 $(5,2t-1)$, $t\ge 1$ 時, 直接利用引理2, 結論成立。

充分性: (1) 考察 $2s\times 5t(s,t\ge 1)$ 棋盤, 它可劃分爲 $s\times t$ 個 2×5 棋盤。而 2×5 棋盤存在存在“$5-L$形”覆蓋, 所以 $2s\times 5t$ 棋盤存在“$5-L$形”覆蓋。

(2) 考察 $7\times 5t(s,t\ge 2)$ 棋盤。

(i) 若 $t=2p(p\in N)$, 則 $7\times 5t=7\times 10p$, 從而 $7\times 5t(t\ge 2)$ 棋盤可以劃分爲 p 個 7×10 矩形。由圖2可知, 7×10 可以劃分爲7個 2×5 矩形, 從而存在“$5-L$形”覆蓋, 所以 $m\times n$ 棋盤存在“$5-L$形”覆蓋。

(ii) 若 $t=2p+1(p\in N)$, 則 $7\times 5t=7\times 5(2p+1)=7\times(10p+5)=7\times[10(p-1)+15]=7\times 10(p-1)+7\times 15$, 所以 $m\times n$ 棋盤可以劃分爲 $p-1$ 個 7×10 矩形和一個 7×15 矩形。由圖10及引理3可知, $7\times 5t$ 棋盤存在“$5-L$形”覆蓋。

(3) 考察 $(2s+3)\times 5t(s\ge 3,t\ge 2)$ 棋盤。$(2s+3)\times 5t=[2(s-2)+7]\times 5t=2(s-2)\times 5t+7\times 5t$。於是, t 爲偶數時 $(2s+3)\times 5t$ 棋盤可以劃分爲 $t(s-2)$ 個 2×5 矩形和 $t/2$ 個 7×10 矩形, 所以 $(2s+3)\times 5t$ 棋盤存在“$5-L$形”覆蓋; 當 t 爲奇數時, 注意到 $t\ge 2$, $(2s+3)\times 5t$

棋盤可以劃分爲 $t(s-2)$ 個 2×5 矩形, $(t-3)/2$ 個 7×10 矩形和一個 7×15 矩形, 所以 $(2s+3)\times 5t$ 棋盤存在“$5-L$形”覆蓋。

綜上所述, 定理3獲證。

文 [1]中猜想, 當 $k>4$ 時, 只有當 $m\times n$ 棋盤可分割若干矩形模塊分別被 $k-L$ 形覆蓋時, $m\times n$ 棋盤才能被 $k-L$ 形覆蓋。定理3說明此猜想不成立。比如, 當 $m,n>5$ 且 $5|mn$ 時, $m\times n$ 棋盤都存在 $5-L$ 形覆蓋。

最後, 我們對 $m\times n$ 棋盤的 $k-L$ 形覆蓋, 提出如下兩個新的猜想:

猜想1: 當 k 爲奇數時, $m\times n$ 棋盤存在 $k-L$ 形覆蓋的充要條件是: (m,n) 或 (n,m) 爲

(i) $(2s,kt)$, $s,t\geq 1$,

或

(ii) $(2s+k-2,kt)$, $s,t\geq 2$。

猜想2: 當 k 爲偶數時, $m\times n$ 棋盤存在 $k-L$ 形覆蓋的充要條件是: $2k|mn$, 且 $\max\{m,n\}\geq k$。

參考文獻

1. 薛通, 王元元: 棋盤的L-形覆蓋問題, 數學的實踐與認識, 1987, 4, p.35。

—本文作者任教於中國廣東深圳高級中學—