你會畫圖嗎?

柳柏濂

香港大學蕭文強兄曾在數播中發表過談計數的大作“你懂數數嗎？我可不懂!” 不揣冒昧, 我步他的後塵, 寫成此拙作, 不知可否有資格當上“兄弟篇”。

“你會畫圖嗎?”

對這樣一個無任何要求的問題, 每個人都會輕鬆地回答: “行!”

然而, 用更高的標準構作一個圖, 並不是人人都能勝任的工作。

要把一個人體形神兼備地描繪出來, 這是美術家的任務。

要把一個實物內外結構設計出來, 這是工程師的職責。

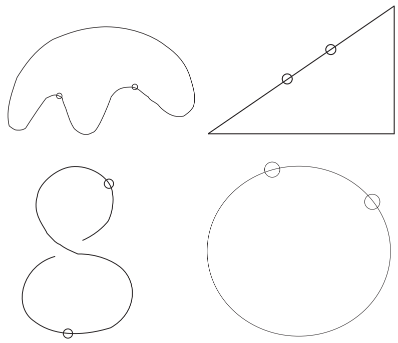
而, 要把在特定限製條件下的一個圖準確地表達出來, 這便是數學家的技巧了。

1996 年 7 月, 蘇格蘭的綿羊多莉出生, 引起了世界的轟動, 因爲它標誌著生物“克隆” (無性繁殖) 的成功。

然而, 在數學上, 克隆技術早已司空見慣。我們的孩子不是早在中學教材中, 學習如何構作一個三角形, 和已知的三角形全等嗎?

這裡, 我們並不專注於幾何作圖。有些朋友看到我這個題目後, 恐怕覺得這位作者老兄又來炒作三等分角, 化圓爲方之類的經典問題了。確實, 這類問題已論述深入, 筆者實在講不出幾句別人未講過的話。況且, 它要求拿著圓規直尺來工作。說實話, 現代數學的發展已經逐漸離開了圓規和直尺的問題。有誰見過, 大數學家的講演需要拿著圓規直尺上台的呢?

我們現在僅著眼於平面上點和線的連接關係, 而不拘泥於線的長短曲直。在數學上稱之爲拓樸關係。隨手畫幾個圖



從拓樸意義上來說, 這些點與線連接關係是一樣的。在數學上稱爲同構。乍看起來, 這種拓樸關係是多麼粗糙。然而, 就是這種“粗糙”, 才眞正反應出人類思維的精髓。想想看, 我們平時在餐廳裡, 旅途中, 辦公桌前, 談論某兩個點 (不防說“兩個公司”吧) 的位置時, 不是常常畫著這樣的一些圖, 來準確地表達

我們的 idea(思維) 嗎? 因此, 毫不誇張地說: 研究這類只注重點, 線連接關係的圖, 是數學聯繫各門學科的橋樑。

我們的手伸得長一點, 拿來一個化學家的故事。

龜背的困惑

讓我們追溯到一百多年前, 在十九世紀五十年代, 人們已經知道: 物質是由分子組成的。當時, 一個普遍的看法是: 不同物質的分子是由不同的原子組成。

例如, 一個水分子由兩個氫原子和一個氧原子組成。氫原子和氧原子分別用符號 H 和 O 表示, 水分子便可寫成H_2O。

池塘底或化糞池裡排出的汽泡叫沼氣。沼氣的主要成份是甲烷。它的分子由一個碳原子和四個氫原子組成。碳的符號是 C。於是甲烷可以寫成 CH_4。

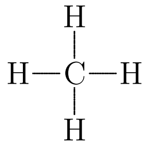
人們都覺得這種寫法很完美, 因爲用一些符號便可以把不同的物質都表示出來。化學家彷彿在完成一篇優美的文章後, 準備畫上一個完美的句號了。

可是, 人們逐漸發覺這篇“文章”並不完美。說來奇怪, 同樣是兩個碳原子, 六個氫原子, 一個氧原子組成的分子—它的表達式是 C_2H_6O, 竟然可以組成兩種不同的物質, 一種叫乙醇 (即酒精), 另一種叫二甲烷。令化學家吃驚的是: 這兩種物質的性質迥然不同。

對乙醇和二甲烷的分析表明: 物質表現出來的性質, 不僅與組成的原子的種類和數量有關, 同時, 還與它們的排列方式有關。如果原子的種類, 數目相同, 但排列的方式各異, 他們的性質就大不一樣。

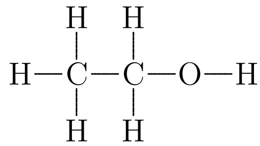
於是, 化學家們也開始採用數學圖形。他們把原子想象爲有很多“鉤子”, 當然, 不同的原子可能有不同個數的鉤子, 這些鉤子可以“鉤”住其它原子, 從而結合成分子。英國化學家弗蘭克蘭德首先把這些“鉤子”稱爲“價鍵”或“價”。例如, 氫 (H) 有1價, 氧 (O) 有2價, 碳 (C) 有4價, 德國化學家凱庫勒進一步將這些價用短線表示, 直觀地繪出各種分子的結構式。

於是, 可以畫出水 H_2O 的結構式是 H—O—H, 甲烷 CH_4 的結構式是,

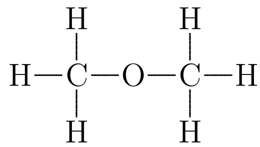


而 C_2H_6O 的結構式, 可得

(1)



(2)



第 (1) 個是乙醇, 第 (2) 個是二甲醚, 這就成功的解釋了化學中的同分異構現象。

然而, 新的亂子又讓化學家剛剛舉起的慶賀成功的酒杯又重新放下。有人拿來了一種化學物質苯。請注意, 它不要“笨”, 而叫苯。它的分子是由6個碳原子和6個氫原子組成。從研究它的性質的實驗表明: 苯的分子中, 原子的排列應該是對稱的, 而且結合相得相當牢固。如果把碳原子排成一串, 在數學上確實沒有問題, 遺憾的是, 它卻不是苯, 而是另一種物質。那麼它的結構式怎樣畫呢?

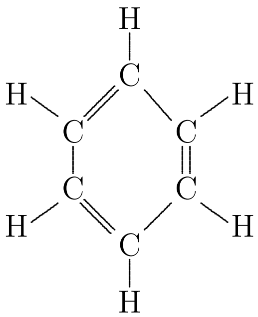
十九世紀中期, 如何畫出這個苯 (C_6H_6), 一度使化學家陷入危機。1925年,

人類已經發現了苯。30年過去了, 人們對它的結構式仍然束無手策。一個苯昂昂然彷彿一個“笨”字, 向人類的智慧發出嘲弄。

被譽爲化學結構之父的凱庫勒日夜苦思冥想···。1864年的一天, 他坐在火車上, 昏昏欲睡, 不久便沉入夢鄉。在睡夢中, 他似乎覺得碳都活起來了, 在他眼前翩翩起舞。突然, 一條碳鏈如銀蛇一般地盤成一圈···。

凱庫勒從夢中驚醒過來, 不禁想大喊一聲: “我找到了!”, 他馬上悟出了: 苯的結構不是直鏈式的, 而應該是環鏈。

於是, 他很快畫出了苯的如下結構式



它顯示出多麼漂亮的對稱性! 這與化學家的實驗結果完全一致。連今天的中學生也能隨手畫出這個“龜背”, 貌似簡單, 卻害苦了科學家好些年。如今, 它已變成有機化學的象徵, 標誌著人類探索眞理的歡樂和艱辛。

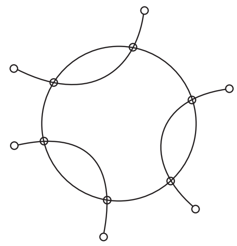
從“直”想到“曲”, 這在思維上只不過是一個小小的變向, 卻給人類認識世界帶來一個飛躍。

有列可圖

我們講了很多化學。讀者可以重溫一下上面的敍述, 其實裡面全是數學, 是一個點和線的連接關係的問題。所謂“龜背”問題, 即求作一個12點的圖, 其中6個點 (H) 只能有一條線與之相連, 而其餘6個點 (C) 有4條線與之相連。爲了作這個圖, 十九世紀的化學家多數只想到前後相連, 而凱庫勒的高明之處是摒棄了傳統的 idea, 想到了首尾相連的方法。

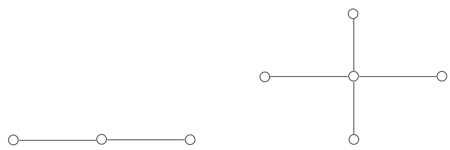
年青的讀者, 不要以爲這僅是一個微不足道的想法。當年哥倫布把雞蛋用力砸在台上使之成功地倒豎起來之前, 還沒有一個在場的先生想得出來呢!

我們把平面上的一些點稱作頂點, 連結它的線稱爲邊, 而每點連的線數稱爲該點的度。一個圖具有的頂點數稱爲它的階數。龜背問題的數學表述就是: 知道一個12個數的序列 $\prod = (4,4,4,4,4,4,1,1,1,1,1,1)$, 求作一個12階的圖 G, 使得 G 的各個頂點的度恰好是這個序列的數。或者說, 使得序列 $\prod$ 是圖 G 的度序列。如果把苯的結構式用拓樸圖畫出來, 就是



G

而水 (H_2O) 和甲烷 (CH_4) 的數學拓樸圖是



它們與苯的圖不同在於; 它們的每兩點之間最多只能連一條邊, 這類圖, 我們稱之爲簡單圖。

更一般地說, 構造化學結構式, 就是給出一個n元自然數序列 $\prod=(a_1,a_2,\cdots a_n)$, $a_1\ge a_2\ge\cdots\ge a_n>0$, 求作一個 n 階圖, 使得它的度序列是 $\prod$。如果這樣 n 階圖存在, 則稱 $\prod$ 是可圖的。這類問題稱爲圖的實現問題。

爲了更集中地討論問題, 我們只考慮簡單圖的實現問題。

別以爲這僅是鋪紙拿筆, 便能一揮而就的問題。隨手寫出一個自然數序列 $(2,2,1)$, 你能用一個3階簡單圖實現它嗎?

不能! 爲什麼?

看來, 我們應該探討一下: 什麼樣的 n 元序列 $(a_1,a_2,\cdots a_n)$, 才是可圖的?

我們把一個圖的度序列各個數相加, 圖的每邊的兩端各計算了一次, 因此, 這個和恰好是邊數的兩倍, 當然, 必是偶數。我們無法畫出 (2,2,1) 的圖, 是因爲 $2+2+1=5$ (奇數) 的緣故。

於是, 可得, $(a_1,a_2,\cdots a_n)$ 可圖須滿足的第一個條件:

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=\text{偶數} \qquad (1)$$

光有條件 (1), 還不能高枕無憂。試看 $(4,2,1,1)$, 它的各數之和是偶數, 但你仍畫不出相應的簡單圖來。因爲我們限定每兩頂點之間至多只能有一邊, 因此, n 階圖每點的度數 $\le n-1$。但4元序列 $(4,2,1,1)$ 的第一個數$4>3$。故無法作出一個四階簡單圖。由此, 我們又得出 $(a_1,a_2,\cdots a_n)$ 可圖須滿足的第二個條件:

$$a_i\le n-1,\quad i=1,2,\cdots n \qquad (2)$$

因爲我們已經約定$a_1\ge a_2\ge\cdots\ge a_n>0$, 那麼條件 (2) 可寫成$a_1\le n-1$。

對一個滿足條件 (1) 和 (2) 的序列, 我們便可著手構作一個合要求的圖, 即使這樣的圖不存在, 我們也能及時作出判斷。

先從一個簡單的例子談起。考察序列 $L_4=(3,3,2,2)$, 爲方便敍述把 L_4 從左到右位置記爲① ② ③ ④ 這也是我們將來作出來的圖的4個頂點的標號

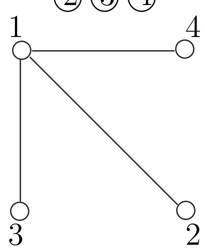
L_4: (3, 3, 2, 2)
① ② ③ ④

位置 ① 的數是3, 表示圖的頂點 ① 將和3個頂點有邊相連, 這3個頂點依次爲② ③ ④, 當我們把頂點 ① 畫出來後, 序列 L_4 的第 ① 個數應刪去, 且與它相連各個點的度數減1, 得序列L_3。

L_3: (3 − 1, 2 − 1, 2 − 1)
① ② ③ ④

即

(2, 1, 1)
②③④



L_3 仍滿足條件 (1)(2), 按上述方法, 把頂點 ②連頂點 ③, ④, 於是序列 L_3中位置 ②的數又被刪去, ③, ④ 位置各減1, 得序列L_2。

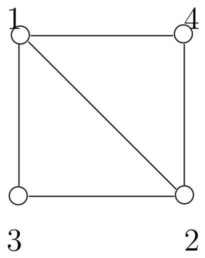
L_2: (1 − 1, 1 − 1)

2　3　4

即

(0, 0)

3　4



出現了零序列, 說明我們的構圖成功並完成。若中間某一步出現的序列不滿足條件 (1) 或 (2), 則可以斷言: 此圖不存在。

爲了讓讀者熟悉這一算法, 我們再看兩個例子。

例1. 求度序列爲 $(5, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 1)$ 的圖。

L_8: (5, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 1)

1 2 3 4 5 6 7 8

L_7: (3, 3, 2, 2, 1, 2, 1)

$\underline{2}\ \underline{3}\ \underline{4}\ \underline{5}\ \underline{6}\ 7\ 8$

(有"—"表示已減去1的位置)

L_6: (2, 1, 1, 1, 2, 1)

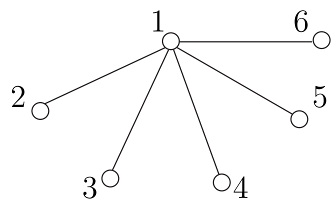
$\underline{3}\ \underline{4}\ \underline{5}\ 6\ 7\ 8$

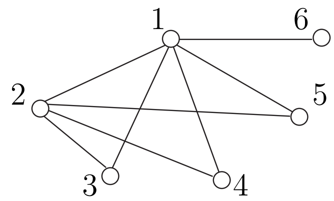
L_5: (0, 0, 1, 2, 1)

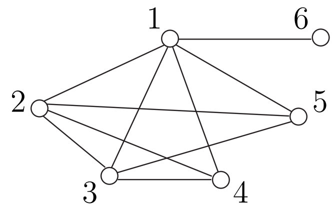
$\underline{4}\ \underline{5}\ 6\ 7\ 8$

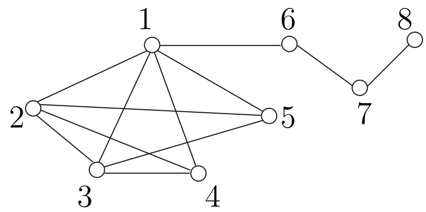
L_4: (0 0)

$\underline{6}\ 7\ \underline{8}$









G_1

圖 G_1 的度序列正是 L_8。

例2: 求度序列爲 $(5, 4, 3, 2, 2)$ 的圖。

L_5: (5, 4, 3, 2, 2)

1 2 3 4 5

滿足條件1, 2

L_4: (3, 2, 1, 1)

$\underline{2}\ \underline{3}\ \underline{4}\ \underline{5}$

因 $3 + 2 + 1 + 1 =$ 奇數, 故不存在這樣簡單的圖, 它有度序列 L_5。

至此, 我們已得出一個從序列構造圖的判斷法:

已知遞降序列 $L_n = (a_1, a_2, \cdots a_n)$, 以 L_n 爲度序列的簡單圖 G 存在的充分必要條件是:

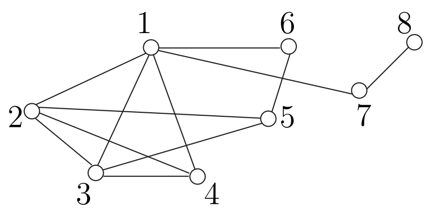
(1) $a_1 \leq n-1$

(2) $L_{n-1} = (a_2-1, a_3-1, \ldots a_{a_1+1}-1, a_{a_1+2}, \ldots a_n)$ 可圖。

根據這一準則, 可以一舉解決能否構造和如何構造兩個問題。

須要指出: 按上述方法構出來的圖不必是唯一的。換言之, 我們可能作出不同構的圖, 它們都具有所給出的度序列。

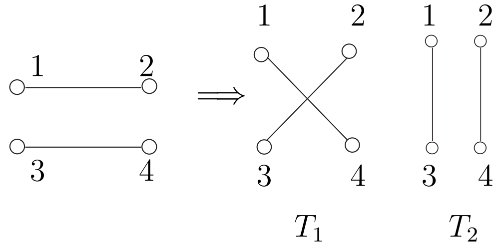
例如, 在例1的圖 G_1 中, 我們把邊 $\{1,5\}$, $\{6,7\}$ 換成 $\{1,7\},\{6,5\}$ 便得圖 G_2



G_2

易見, $G_1 \ncong G_2$, 但它們的度序列均是 $(5,4,4,3,3,2,2,1)$。

細心的讀者可能會注意到, 我們剛剛用到的變換只不過把兩條邊換成另外兩條邊而已。如下圖, 互不相同的4個點 1,2,3,4, 兩條邊$\{1,2\}$, $\{3,4\}$, 在沒有其它邊的情況下, 可以出現兩種變換 T_1, T_2。



T_1 T_2

容易看出, 變換前後, 1, 2, 3, 4 四個點的度數不變。當然, 這種變換要以不會出現重邊爲前題的, 否則就不是我們要求的簡單圖。

於是, 運用變換 T_1, T_2, 我們便能從一個作出的圖, 構作出具有同一度序列的所有圖來。

又回到數

用一種構造性的方法, 我們解決了 $(a_1, a_2 \cdots a_n)$ 可圖性的判斷和實現兩個問題。

可是, 要判斷一個序列是否可圖, 用這種方法我們必須在構造中才能進行。正如要論證人類是否可能到達火星, 要先開著飛船去一趟, 才能作出判斷一樣。

於是, 數學家尋找一個判斷序列可圖的純理論條件, 著名數學家厄爾多斯和加萊證明下列定理。

定理: 正整數序列 $\prod=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, 其中 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots > 0$, 是可圖的充分條件是: 對每個整數 r, $1 \leq r \leq n-1$,

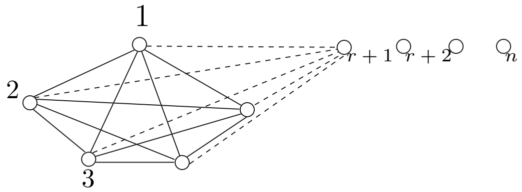
$$\sum_{i=1}^{r} a_i \leq r(r-1) + \sum_{i=r+1} \min\{r, a_i\} \quad (3)$$

我們不打算沿著兩位數學家的足跡, 把整個證明瀏覽一遍。但是, 我們可以把他們的主要思路概括出來。

首來, 條件 (3) 的必要是不難導出的, 它的意思是, 我們在序列 $\prod$ 中任意指一個數 a_r, 考察由 a_1 到 a_r 這 r 個頂點的度的和的最大值。這個和可以分兩部分, 第一部分是 r 個點之間互相連線至多有 $r(r-1)$ 度, 第二部分是其餘的點與 r 個點的連線, 例如第 $r+1$ 個點, 它與 r 個點的連線至多有

$\min\{r, a_{r+1}\}$ 條, 其餘的點也可類推。於是便得

$$\sum_{i=1}^{r} a_i \leq r(r+1) + \sum_{i=r+1}^{n} \min\{r, a_i\}$$



條件 (3) 的充份性, 主要是對 n 運用數學歸納法。對於 $n = 1, 2$, 證明是顯然的。假設充分性對於 n 成立。即滿足條件 (3) 的序列可圖, 只需證明對於 $n+1$, 充分性亦成立便可。

這裡, 需要運用一些巧妙的數學構思, 即把一個滿足條件 (3) 的 $n+1$ 元序列 $\prod' = (a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1})$ 重新構成一個 n 元的 $\prod^* = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$。

考察 $\prod'$ 中的元 a_{a_1+1}, 當然, 我們容許 a_{a_1+1} 的前後有元和它相等, 令 p 和 q 是最小和最大的整數, 使得

$$a_{p+1} = \cdots a_{a_1+1} = \cdots = a_q$$

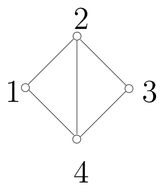
(如果無其它元與 a_{a_1+1} 相等, 則 $p = a_1$, $q = a_1 + 1$)。我們構造 $\prod^*$ 如下:

$$e_i = \begin{cases} a_{i+1} - 1, \text{ 對 } i = 1, 2, \ldots, p-1 \\ \qquad\qquad \text{和 } q - (a_1 - p) - 1, \\ \qquad\qquad\qquad \ldots, q-1 & (4.1) \\ a_{i+1}, \text{ 對其餘的} i & (4.2) \end{cases}$$

我們只要證得 $\prod^*$ 滿足條件 (3)(證明從略), 則由歸納假設, $\prod^*$ 可圖, 得圖 G^*。注意到 G^* 是 n 階的, 且其度序列只與 $a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}$ 有關。我們在 G^* 基礎上, 再添加一個新點, 它與對應於 (4.1) 的那些 e_i 的點連線。容易算得, 這個新點的度就是 a_1, 而所得的新圖的度序列便是 $\prod'$。這就完成了對充分性的證明。

在這裡, 雖然省略了若干證明的細節, 但已經勾畫出定理證明的思路。

從頭到尾, 我們滿嘴都在談圖。事實上, 電腦的發展已經使形和數逐步統一起來。要把一個圖輸入到電腦裡, 可以通過 (0,1) 矩陣這個工具。我們先從一個例子談起。我想, 讀者都可以從下列的圖和矩陣看出其中的對應門路



$$\leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

它的對應法則是:

(1) n 階圖 (頂點加標號) 對應於 n 階矩陣, 其中點 $1, 2, \ldots, n$ 對應於矩陣行 $1, 2, \ldots, n$ 列 $1, 2, \ldots, n$。

(2) 點 i 與點 j 有邊, 對應於矩陣第 i 行第 j 列位置是1; 點 i 與點 j 無邊, 對應於矩陣第 i 行第 j 列位置是0。

這種對應是1-1的。細心的讀者可以發現, 我們作出的 n 階 (0,1) 矩陣一定是對稱的, 即以對角線爲軸的左右對稱。

建立了這種1-1對應後, 圖可以輸入到電腦裡, 可以參與很多數學運算。我們可以運

用代數工具來研究一個圖的性質。圖, 再不是幾何學家的專利了。

於是, 我們上面所述的, 序列在圖上的實現問題等價於: 給出一個序列 $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ 是否可以作出一個 (0,1) 矩陣, 使它的行和、列和都是 $a_1, a_2, \ldots a_n$。

於是, 畫圖問題又回歸到數的問題。要解決我們的問題, 你可以不畫圖, 而光是設計出這樣的 (0,1) 矩陣。試試看, 這同樣是不好對付的。

那種給定一個矩陣的行和和列和, 構造和枚舉 (0,1) 矩陣的問題是數學中一類相當困難的問題, 至今仍有很多無法解決, 即使電腦幫上一把, 也無濟於事。

現在, 再問一句: "你會畫圖嗎?"

應該怎樣回答呢?

1998. 6於美國明尼蘇達大學

—本文作者任教於廣州華南師範大學數學系和廣東職業技術師範學院計算機系—