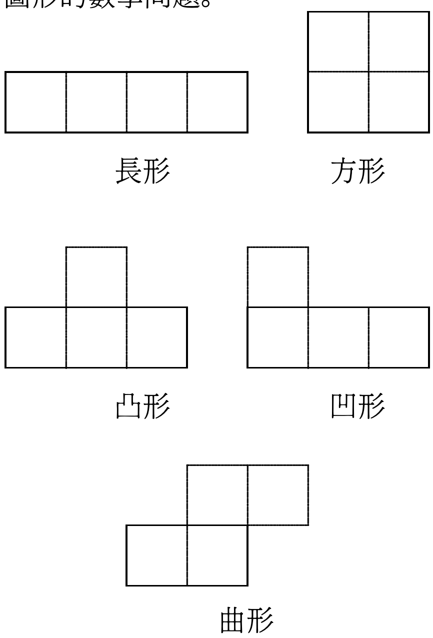
「俄羅斯方塊」的數學

劉江楓 · 劉達儒

近年風行的電子遊戲「俄羅斯方塊」, 中小學生都十分熟悉, 本文探討一些有關這幾片圖形的數學問題。

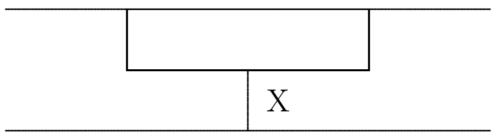


圖一

「俄羅斯方塊」都是用四個面積爲1的正方形, 邊對邊連起來的, 共有五種, 如圖一所示。前面三種有對稱軸, 後面兩種沒有, 所以在電子遊戲中, 各以兩個不同的方向出現, 但作爲數學圖形, 則不分左右, 本文所述各種拼圖均不允許方塊重疊。

問題一: 用兩種「俄羅斯方塊」, 其中至少有一種沒有對稱軸, 能拼成一個有對稱軸的圖形, 求所有不同的解。

能把五種「俄羅斯方塊」, 各一片同時裝入的長方形盒子中, 若不允許重疊, 則盒子面積最少要多大? 因爲每片的面積都是4, 總面積是20, 所以首先考慮的是 1×20, 2×10 及 4×5 的盒子。很容易發現, 1×20 的盒子不成, 因爲只有長形那一種能放進去。



圖二

2×10 的也不成, 如圖二所示, 把長形放進去後, 一邊可以用凹形配合, 但另一邊便出現問題, 有× 記號那方格, 其他三種「俄羅斯方塊」都伸不到。

問題二: 4×5 的盒子成嗎? 假如可以, 畫出成功的圖形; 假如不可以, 寫出證明, 並另求能用盒子的最小面積。

如盒子是 6×6 的, 方形可以放9片, 因爲已放滿了, 不能再多。

問題三: 其餘四種「俄羅斯方塊」, 每種至少能在 6×6 的盒子內放幾片? 畫出最佳答案的圖形, 並證明不能再多。

在 6×6 的盒子內, 封閉了9個方格, 如圖三所示, 便連一片方形都放不進去了。因爲盒子可放9片方形, 而每個方形內必須至少封閉1個方格, 所以如僅封閉8個方格, 必定還可以放方形進盒子內。

X		X		X	
X		X		X	
X		X		X	

圖三

問題四: 其餘四種「俄羅斯方塊」, 要在 6×6 的盒子內, 至少封閉幾個方格, 才使這種連一片都放不進去?

以上四個問題的解答附錄在本文之後, 現在研究一些「俄羅斯方塊」的非電子遊戲。

「井字遊戲」是人所共知的遊戲, 兩人對奕, 依次選佔 3×3 棋盤內空白的方格, 先拿到同線的3個方格那方獲勝。如雙方不走錯, 便握手言和, 因爲遊戲十分簡單, 很快便沒甚麼文章好做了。

現在把遊戲的目的, 改爲先拿到連成曲形的4個方格, 這還是不是公平的遊戲呢? 表面看來, 獲勝似乎比「井字遊戲」更難, 其實如由我方先行, 便有必勝之術。

A	B	C
D	X	D
C	B	A

圖四

第一步必須佔據中心那方格, 便已立不敗之地, 因爲對方把其餘8個方格全拿了, 也不能獲勝。之後, 依據對方的著法, 按照如圖四應付, 無論對方佔據那個方格, 只需把符號相同的另外那個方格拿下, 便能保證獲勝, 證明十分簡單, 從略。

如把曲形換爲凹形, 情況便不同了,「井字遊戲」是和棋, 表示同線得3個方格也搶不到, 更不要說凹形了。將棋盤擴大至 4×4, 則我方便有必勝之術。

	↑		↑
	X	X	X
	↓		↓

圖五

很明顯, 棋盤中央那4個方格比較重要, 先拿下第二行第二列那個。對方不能在這行與這列同時佔據方格, 所以可以假設輪到我方時, 第二列對方沒有取任何方格, 於是把第三行第二列那方格佔了如圖五所示。第三著一定可以得到同線相連的3個方格, 此時便可左右張弓, 取得第4個方格獲勝, 對方防不勝防。

	A	A	
B	X	O	C
B	O	X	C
	D	D	

圖六

換了凸形怎麼樣? 中央那4個方格仍是重要的, 雙方都會搶佔, 如圖六的形勢, 對方只需拿符號相關的另外那個方格的策略守和。如圖七的形勢, 如對方盲目地拿了最後那個中央方格便要輸了, 正確的著法是第三行第一列的方格。當然還有其他形式的開局, 但不難發現, 如對方無誤著, 我方無必勝之道。

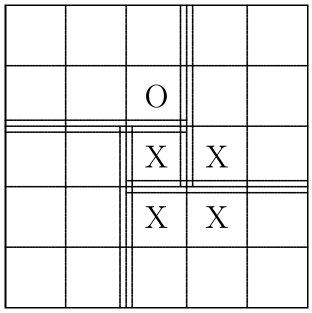
		O	
	X	X	
	O		

圖七

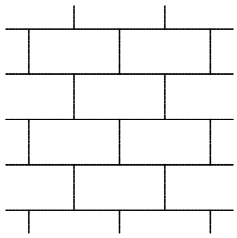
如把棋盤擴大至 5×5, 我方便可輕易傳捷了, 先拿下中心那方格, 把其餘24方格分爲對稱的四部份如圖八所示, 可以假設對方的應著在西北部。第二著我方拿下第四行第四列那方格, 第三著便有兩處可以形成兩頭的威脅了。

長形的遊戲比較複雜, 留給讀者探索, 只提供答案, 用 6×6 的棋盤, 對方可以守和, 用 7×7 的, 我方則有必勝之術。

最後談到方形了, 這回即使棋盤無限大, 對方也有守和之策, 將平面分割爲 1×2 的磚頭, 如圖九所示。無論我方佔據那個方格, 對方就把同一磚頭內另外那方格拿掉, 我方連一塊磚塊也搶不到, 便無法形成方形了。



圖八



圖九

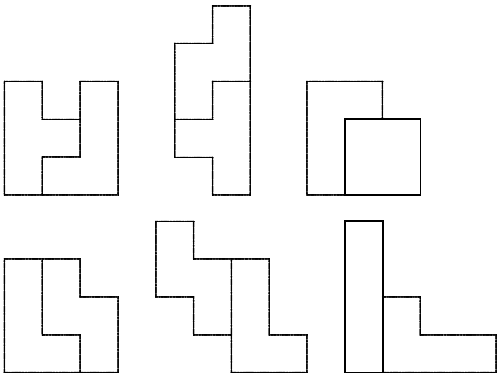
參考文獻

1. Martin Gardner, Generalized Tick-tack-toe, in“Fractal Music, Hypercard, and More”, W. H. Freeman, New York NY, 1992, 202-213。
2. Solomon Golomb, “Polyominoes: Puzzles, Patterns, Problems, and Packings”, 2^{nd} ed, Princeton University Press, Princeton NJ, 1994。
3. Kate Jones, “Instruction Booklet for Poly-5”, Kadon Enterprises, Pasadena, MD, 1989。
4. George Martin, “Polyominoes: A Guide to Puzzles and Problems in Tiling”, Mathematical Association America, Washington DC, 1991。

附錄: 問題解答

問題一:

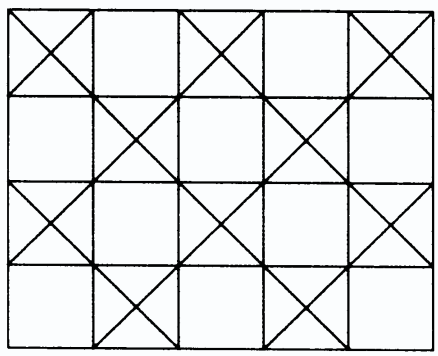
解答共有六種, 如圖十所示。



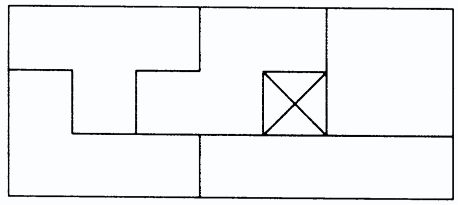
圖十

問題二:

不可以。我們把 4×5 的盒子, 像西洋棋盤般塗成黑白相間如圖十一所示, 則每種顏色的方格各10個, 方形、長形、凹形和曲形, 必定蓋過白色的方格各2個, 但凸形不是蓋過1個白色的方格就是3個, 黑色、白色總數恒不相同, 所以不成。3×7 的盒子則可以, 如圖十二所示, 所以最小面積是21。



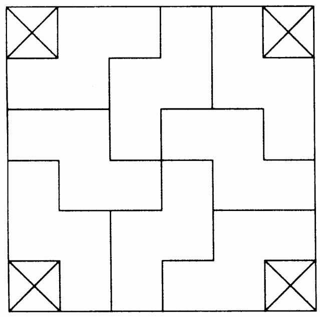
圖十一

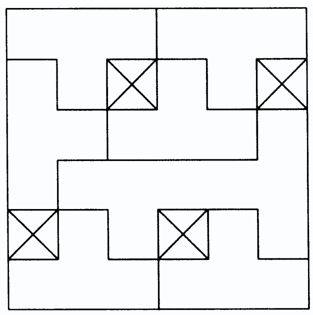


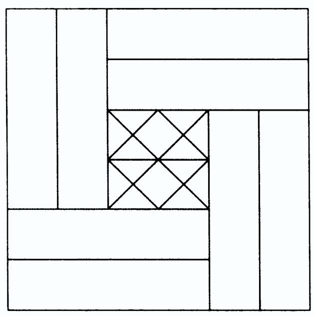
圖十二

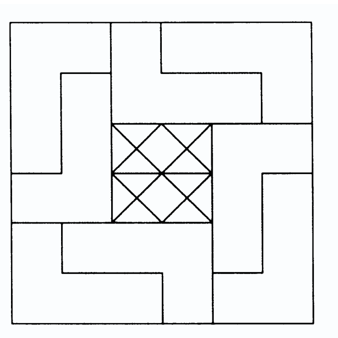
問題三:

其餘四種「俄羅斯方塊」, 在 6×6 盒子內可各放8片, 如圖十三所示。



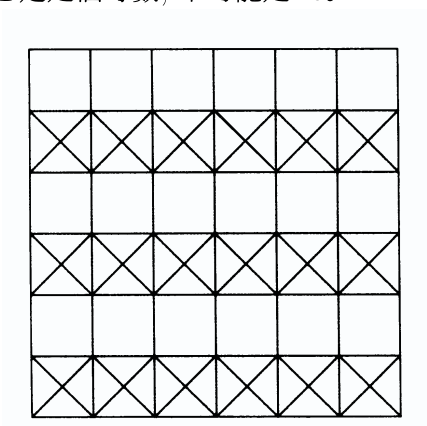






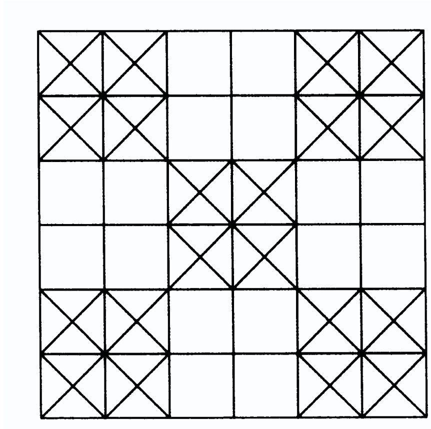
圖十三

凸形的證明和「問題二」一樣, 如把盒子塗成黑白相間, 那個9片凸形能蓋過的白色方格, 必定是個奇數, 不可能是18。



圖十四

凹形的證明, 可把盒子塗成黑白相間的横列如圖十四, 凹形怎麼樣放, 蓋過的白色格子, 不是1個就是3個, 如能放進9片, 白色方格的數便不會是18了。證明長形不能放9片, 可把盒子塗成黑白相間的 2×2 大方格, 如圖十五, 長形無論怎麼樣放, 都必定蓋過2個白色的方格, 因爲其總數是16, 所以只能放8片。另一證明方法爲把盒子塗成如圖十六, 則長形無論怎麼樣放, 都必定蓋過1個黑色的方格, 而其總數是8。曲形的證明最簡單, 因爲同一邊上兩角的方格, 至少有一個不能用, 所以最多能放8片, 當然也可以用塗色的方法證明。



圖十五

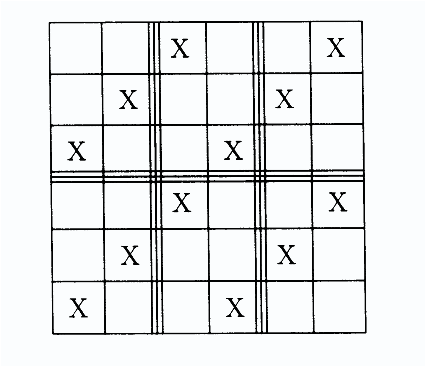
問題四:

長形的問題最易解決, 只封閉8個方格如圖十六所示。因盒子內可放8片長形, 所以不能封閉少於8個方格。

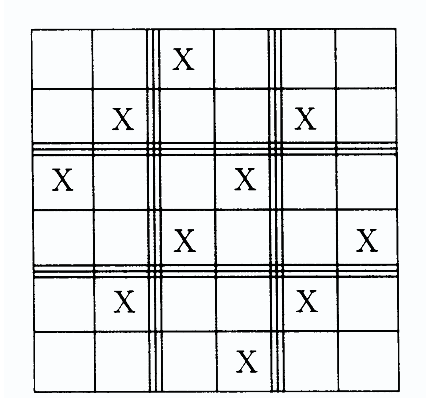
			X		
		X			
	X				X
X				X	
			X		
		X			

圖十六

防範凹形, 要封閉12個方格如圖十七所示。將盒子分割爲 $6 \times 2 \times 3$ 的長方形, 每個長方形內必須至少封閉2個方格, 所以12是正確的答案, 不能再少。



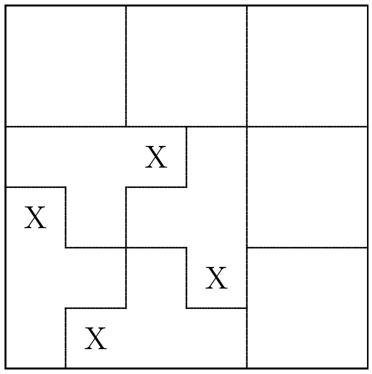
圖十七



圖十八

曲形的答案, 和方形一樣, 要封閉9個方格, 如圖三所示, 不過證明稍難些。將盒子分割爲9個 2×2 的正方形, 假如其中1個正方形原封不動, 則所有和它相鄰的方格都要封閉, 結果更不如理想, 所以不能封閉少於9個方格。

最後是凸形, 答案是10, 如圖十八。證明的出發點和曲形一樣, 把盒子分割爲9個 2×2 的正方形, 每個內至少要封閉1個方格。假如每個正方形都只封閉1個方格, 中央那個正方形, 可以假設封閉了第三行第三列那個, 這麼必須順時針方向依次封閉如圖十九所示那些方格, 但在左下角部份, 仍有許多空位可放凸形。



圖十九

—本文作者劉江楓任教於加拿大 Alberta 大學數學系; 劉達儒於中央研究院數學研究所擔任葉永南教授國科會計劃的助理, 感謝教授及長輩們的指導與愛護—