$\sqrt{2}$ 為無理數的證明

蔡聰明

數學最讓我欣喜的是, 事物能夠被證明。

—B. Russell—

$\sqrt{2}$ 爲無理數, 這是古希臘畢氏學派的偉大發現, 是歸謬證法的典範。一方面, 它震垮了畢氏學派的幾何原子論以及幾何學的算術化研究綱領, 導致數學史上的第一次危機。另一方面, 它也讓古希臘人發現到連續統 (continuum) 並且直接面對到「無窮」(infinity), 使得往後的數學家、哲學家爲了征服無窮而忙碌至今, 收獲非常豐富。

對於宇宙、人生之謎, 佛家有所謂的25證道法門。換言之, 一個深刻的事物往往可以從各種角度與觀點來論證。對於「$\sqrt{2}$ 爲無理數」, 我們一共蒐集了28種證法 (有些是大同小異), 其中的第十二種與第十三種是筆者自己的證法, 至少在文獻上不曾見過 (也許是筆者孤漏寡聞)。在數量上, 雖然比不上畢氏定理的370種證法 (見參考資料 [5]), 但是28種已夠驚人了 (28是第二個完美數, $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$)。這些證法牽涉到數學各方面的概念, 弄淸楚它們, 有助於加深與增廣對於數學的了解, 並且可將零散的知識統合在一起。

一、奇偶論證法

$\sqrt{2}$ 只有兩種情形: 有理數 (rational number) 或者不是有理數。不是有理數就叫做無理數 (irrational number)。因此, 我們立下正、反兩個假說:

$$H_1: \ \sqrt{2}\text{爲有理數};$$
$$H_2: \ \sqrt{2}\text{爲無理數。}$$

到底是哪一個成立呢? 如何證明?

欲證 H_2 成立, 我們不易直接著手, 所以改由 H_1 切入。

換言之, 我們假設「$\sqrt{2}$ 爲有理數」, 先投石問路一番, 看看會得出什麼邏輯結論。

第一種證法: 假設 $\sqrt{2}$ 爲有理數, 故 $\sqrt{2}$ 可以寫成

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \tag{1}$$

其中 a 與 b 爲兩個自然數並且互質。將上式平方得

$$a^2 = 2b^2 \tag{2}$$

所以 a^2 爲偶數, 從而 a 亦爲偶數。令

$$a = 2m$$

其中 m 爲某一自然數, 於是

$$2b^2 = a^2 = (2m)^2 = 4m^2$$

或者

$$b^2 = 2m^2$$

因此, b^2 爲偶數, 故 b 亦爲偶數。這就跟 a 與 b 互質的假設互相矛盾, 所以「$\sqrt{2}$ 爲有理數」不成立, 從而得證「$\sqrt{2}$ 爲無理數」。

這是一般教科書上最常見的證法, 我們稱之爲反證法或歸謬法 (reductio ad absurdum)。

二、算術根本定理

質數 $2, 3, , 5, 7, 11, 13, \ldots$ 相當於自然的「原子」(不可分解之意), 算術根本定理是說: 任何大於1的自然數都可以唯一分解成質數的乘積。這跟「萬物都是由原子組成的」具有平行的類推。

欲證$\sqrt{2}$ 爲無理數, 我們仍然採用歸謬法。假設 $\sqrt{2}$ 爲有理數, 即 $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, 其中 a 與 b 爲自然數, 則 $a^2 = 2b^2$。

首先我們注意到: $b > 1$ 且 $a > 1$。因爲若 $b = 1$, 則 $a^2 = 2$, 但是2不是平方數, 故 $b = 1$ 不成立, 於是 $b > 1$。又因爲 $\sqrt{2} > 1$, 故 $a > 1$。

其次, 由算術根本定理知,

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$$
$$b = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_m^{\beta_m}$$

其中 $p_1, \ldots, p_n$ 與 $q_1, \ldots, q_m$ 皆爲質數且 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \ldots, \beta_m$ 皆爲自然數。再由 $a^2 = 2b^2$ 得到

$$p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \cdots p_n^{2\alpha_n} = 2q_1^{2\beta_1} q_2^{2\beta_2} \cdots q_m^{2\beta_m} \tag{3}$$

第二種證法: 觀察 (3) 式中的2, 左項的2爲偶次方, 但右項的2爲奇次方, 這是一個矛盾。

第三種證法: 在 (3) 式中, 左項有偶數個質數 (計較重複度), 右項有奇數個質數, 這也是一個矛盾。

無論如何, 我們由歸謬法證明了 $\sqrt{2}$ 爲無理數。

三、無窮下降法

這可以有三種變化的證法。

第四種證法: 假設 (1) 式成立。因爲

$$1 < \sqrt{2} = \frac{a}{b} < 2$$

所以 $a > b$, 故存在自然數 q 使得

$$a = b + q$$

由 $a^2 = 2b^2$ 得

$$2b^2 = a^2 = (b+q)^2 = b^2 + 2bq + q^2$$

消去 b^2 得

$$b^2 = 2bq + q^2$$

所以

$$b > q$$

於是存在自然數 p 使得

$$b=q+p$$

從而

$$a=b+q=(q+p)+q=2q+p$$

又由 $a^2=2b^2$ 得

$$(2q+p)^2=2(q+p)^2$$

展開化簡得

$$p^2=2q^2 \tag{4}$$

至此, 我們由兩個自然數 a 與 b 出發, 求得另外兩個較小的自然數 p 與 q, 滿足

$$a>b>p>q。$$

在形式上, (4) 式和 (2) 式完全相同, 故可採用上述方法, 重複做下去, 就得到自然數所成的遞減的無窮數列

$$a>b>p>q>\cdots$$

但這是不可能的, 因爲不存在這種數列。

第五種證法: 對於第一種證法, 筆者遇見過有人不滿意一開始就假設 a 與 b 互質, 那麼我們就改爲如下的論證。

假設 $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ 爲有理數, 我們得知 a 與 b 皆爲偶數。令 $a=2a_1$, $b=2b_1$, 則 $\sqrt{2}=\frac{a_1}{b_1}$。同理可證 a_1 與 b_1 也都是偶數, 令 $a_1=2a_2$, $b_1=2b_2$。如此這般, 反覆做下去, 我們就得到遞減的自然數列

$$a>a_1>a_2>\cdots \text{ 與 } b>b_1>b_2>\cdots \tag{6}$$

但這是一個矛盾, 因爲自然數不能無止境地遞減下去。

第六種證法: 假設 $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$, 其中 a 與 b 爲自然數, 代入等式

$$\sqrt{2}+1=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

得到

$$\frac{a}{b}+1=\frac{1}{(\frac{a}{b})-1}=\frac{b}{a-b}$$

所以

$$\sqrt{2}=\frac{a}{b}=\frac{b}{a-b}-1=\frac{2b-a}{a-b}=\frac{a_1}{b_1} \tag{7}$$

其中 $a_1=2b-a$ 且 $b_1=a-b$。

今因 $1<\sqrt{2}=\frac{a}{b}<2$, 乘以 b 得

$$b<a<2b$$

於是

$$0<2b-a \text{ 且 } 2b<2a$$

從而

$$a_1=2b-a<a$$

由 (7) 式知

$$\sqrt{2}=\frac{a_1}{b_1}$$

並且 $0<a_1<a$。重複上述的過程, 又可得

$$\sqrt{2}=\frac{a_2}{b_2} \text{ 且 } a_2<a_1$$

總之, 我們可以得到自然數所成的無窮數列

$$a>a_1>a_2>a_3>\cdots>0$$

但這是一個矛盾。

四、進位法

利用三進位法, 也可以證明 $\sqrt{2}$ 爲無理數。

第七種證法: 假設 $\sqrt{2}$ 爲有理數, 則 $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$, 其中 a 與 b 爲自然數。於是 $a^2=2b^2$。今將 a 與 b 用三進位法表達時, 顯然 a^2 與 b^2 最後一位非零的數字必爲 1, 但是 $2b^2$ 之最後一位非零數字爲 2。因此, a^2 不可能等於 $2b^2$, 這是一個矛盾。

第八種證法: 假設 $\sqrt{2}$ 爲有理數, 亦即 $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$, 其中 a 與 b 爲自然數且互質。在三進位記數法中, a 與 b 的個位數字爲 0, 1 或 2, 所以 a^2 與 b^2 之個位數字必爲 0 或 1, 從而 $2b^2$ 之個位數字爲 0 或 2。由 $a^2=2b^2$ 可知, a^2 與 $2b^2$ 之個位數字必爲 0, 於是 a 的個位數字爲 0。另一方面, b^2 的個位數字也是 0, 從而 b 的個位數字爲 0。換言之, a 與 b 不互質, 這是一個矛盾。

第九種證法: 設 $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$, 且 a 與 b 互質, 則 $a^2=2b^2$。a 與 b 的個位數字可能爲 $0,1,2,3,4,5,6,7,8$ 或 9, 於是 a^2 與 b^2 的個位數字可能爲 $0,1,4,5,6$ 或 9, 而 $2b^2$ 的個位數字可能爲 $0,2$ 或 8。由 $a^2=2b^2$ 可知, a^2 與 $2b^2$ 的個位數字必爲 0, 從而 a 的個位數字爲 0, 且 b^2 的個位數字爲 0 或 5, 所以 b 的個位數字爲 0 或 5。因此, a 與 b 可被 5 整除, 這跟 a 與 b 互質的假設矛盾, 故 $\sqrt{2}$ 爲無理數。

五、完全平方數

第十種證法: 設 $\sqrt{2}$ 爲有理數, 故 $\sqrt{2}$ 可以寫成 $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$, 其中 a 與 b 爲互質的自然數, 於是 $a^2=2b^2$。這表示 b^2 可以整除 a^2, 從而 b 可以整除 a。因爲 a 與 b 互質, 所以只好 $b=1$。因此 $\sqrt{2}=a$, 或 $2=a^2$, 亦即 2 爲一個完全平方數, 這是一個矛盾, 故 $\sqrt{2}$ 爲無理數。

注意: 當我們推得 $b=1$ 時, 就已跟 $b>1$ 矛盾。另一方面, 我們仿上述的證法可以證明: 若 $\sqrt{n}$ 爲有理數, 則 n 爲完全平方數。

六、輾轉相除法

求兩個整數之最大公因數最常用輾轉相除法 (又叫做歐氏算則)。由此可衍生出一個美妙的結果:

定理 1: 若 a, b 的最大公因數爲 d, 則存在兩個整數 r, s 使得

$$d=ar+bs \tag{8}$$

第十一種證法: 設 $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ 且 a, b 互質, 則 $a=\sqrt{2}b$, $\sqrt{2}a=2b$, 根據上述定理知, 存在兩個整數 m, n, 使得 $1=am+bn$。於是

$$\begin{aligned}\sqrt{2}=\sqrt{2}\cdot 1&=\sqrt{2}(am+bn)\\&=(\sqrt{2}a)m+(\sqrt{2}b)n\\&=2bm+an\end{aligned}$$

爲一個整數, 這是一個矛盾。

七、畢氏三元數公式

我們知道, 方程式

$$x^2+y^2=z^2$$

的所有正整數解爲

$$\begin{cases} x = \ell(m^2 - n^2) \\ y = \ell(2mn) \\ z = \ell(m^2 + n^2) \end{cases} \qquad (9)$$

其中 ℓ, m, n 皆爲自然數且 $m > n$.

$\sqrt{2}$ 起源於等腰直角三角形的斜邊與一股的比值, 要證明 $\sqrt{2}$ 爲無理數, 只需證明不存在正整數邊的等腰直角三角形就好了。

我們仍然利用歸謬法, 假設存在有正整數邊的等腰直角三角形, 亦即存在自然數 ℓ, m, n, $m > n$, 滿足

$$\ell(m^2 - n^2) = \ell(2mn) \qquad (10)$$

第十二種證法: 由 (10) 式得到

$$m^2 - (2n)m - n^2 = 0$$

解得

$$\begin{aligned} m &= \frac{2n \pm \sqrt{4n^2 + 4n^2}}{2} \\ &= n(1 \pm \sqrt{2}) \end{aligned}$$

負根不合, 故

$$m = n(1 + \sqrt{2})$$

我們再證明: $n(1 + \sqrt{2})$ 永不爲自然數。這就得到一個矛盾, 而完成證明。

令集合

$$S = \{n : n(1 + \sqrt{2}) \in \mathbb{N} \text{ 且 } n \in \mathbb{N}\}$$

如果 S 爲空集合, 則證明完畢。因此, 我們考慮 $S \neq \phi$ (空集合) 的情形。由良序性原理 (well-ordering principle, 即任何非空的自然數子集必有一最小元素, 這等價於數學歸納法) 可知, S 有一最小元素, 令其爲 u。

由 S 的定義知 u 與 $u(1 + \sqrt{2})$ 皆爲自然數。考慮 $u(\sqrt{2} - 1)$。顯然

$$u(\sqrt{2} - 1) < u$$

並且

$$\begin{aligned} &u(\sqrt{2} - 1) = u(1 + \sqrt{2}) - 2u \in \mathbb{N} \\ &u(\sqrt{2} - 1)(1 + \sqrt{2}) = u \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

再由 S 的定義知, $u(\sqrt{2} - 1) \in S$。這跟 u 的最小性矛盾, 故 $\sqrt{2}$ 爲無理數。

第十三種證法: 由 (10) 式得到

$$(m - n)^2 = 2n^2, \quad m > n \qquad (11)$$

因此, $(m - n)^2$ 爲偶數, 從而 $(m - n)$ 也是偶數。令 $m - n = 2p_1$, 代入 (11) 得到

$$2p_1^2 = n^2 \qquad (12)$$

故 n^2 爲偶數, 從而 n 也是偶數。因此, m 與 n 都是偶數。

令 $n = 2q_1$, 代入 (12) 式得到

$$p_1^2 = 2q_1^2$$

於是 p_1^2 爲偶數, 從而 p_1 也是偶數。按此要領不斷做不去, 我們就得到偶數所成的兩個數列

$$\begin{aligned} &m > p_1 > p_2 > \cdots \\ &n > q_1 > q_2 > \cdots \end{aligned}$$

這是不可能的, 故 $\sqrt{2}$ 爲無理數。

八、良序性原理

一個分數有無窮多的化身, 例如

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=\frac{20}{30}=\cdots \text{ 等等。}$$

今假設 $\sqrt{2}$ 爲有理數, 即 $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$。此時 a 與 b 皆有無窮多個可能值。令 A, B, C 表示分子、分母與 $a+b$ 之全體所成的集合, 亦即

$$\begin{aligned}
A &= \{a : \sqrt{2}=\frac{a}{b}; a,b\in\mathbb{N}\}\\
B &= \{b : \sqrt{2}=\frac{a}{b}; a,b\in\mathbb{N}\}\\
C &= \{a+b : \sqrt{2}=\frac{a}{b}; a,b\in\mathbb{N}\}
\end{aligned}$$

由良序性原理知, A, B, C 皆有最小元素, 分別令其爲 a、b、$a+b$。

今因爲 $a^2=2b^2$, 所以

$$a^2-ab=2b^2-ab$$

亦即

$$a(a-b)=b(2b-a)$$

從而

$$\sqrt{2}=\frac{a}{b}=\frac{2b-a}{a-b}$$

故 $\sqrt{2}$ 有新的表示法 $\frac{2b-a}{a-b}$。

但是, 由 $1<\sqrt{2}=\frac{a}{b}<2$, 可知 $b<a<2b$。從而

$$2b-a<a \tag{13}$$

$$a-b<b \tag{14}$$

$$(2b-a)+(a-b)<a+b \tag{15}$$

第十四種證法: (13) 式與 a 之最小性抵觸, 故 $\sqrt{2}$ 爲無理數。

第十五種證法: (14) 式與 b 之最小性抵觸, 故 $\sqrt{2}$ 爲無理數。

第十六種證法: (15) 式與 $a+b$ 之最小性抵觸, 故 $\sqrt{2}$ 爲無理數。

第十七種證法: 假設 $\sqrt{2}$ 爲有理數, 則 $\sqrt{2}$ 可表成

$$\sqrt{2}=\frac{a}{b},\ a \text{ 與 } b \text{ 爲自然數。}$$

於是 $a=b\sqrt{2}$, 亦即 $b\sqrt{2}$ 爲自然數。由良序性原理知, 存在最小自然數 b_0 使得 $b_0\sqrt{2}$ 爲自然數。

因爲 $1<\sqrt{2}<2$, 所以

$$b_0\sqrt{2}-b_0<b_0$$

並且

$$(b_0\sqrt{2}-b_0)\sqrt{2}=b_0-b_0\sqrt{2}\in\mathbb{N}$$

這就跟 b_0 的最小性矛盾, 故 $\sqrt{2}$ 爲無理數。

九、質因數論證法

利用質數3的特性, 我們可以證明 $\sqrt{2}$ 爲無理數。

補題1: 設 a, b 爲自然數, 則

$$3|(a^2+b^2) \Leftrightarrow 3|a \text{ 且 } 3|b$$

注意: 記號 $a|b$ 表示 b 可被 a 整除。

證明: $\Leftarrow$) 是顯然的。

$\Rightarrow$) 因爲 a 與 b 被3除的餘數爲0,1或2, 故 a^2 與 b^2 被3除的餘數爲0或1。現在假設 $3|(a^2+b^2)$, 則 $3|a^2$ 且 $3|b^2$, 從而 $3|a$ 且 $3|b$, 證畢。

第十八種證法: 假設 $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$, 且 a 與 b 爲互質, 則 $a^2=2b^2$。於是 $a^2+b^2=3b^2$, 亦即 $3|(a^2+b^2)$。由補題知 $3|a$ 且 $3|b$, 這跟 a 與 b 互質矛盾, 故 $\sqrt{2}$ 爲無理數。

第十九種證法: 假設 $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$, 且 a 與 b 爲互質, 則 $a^2=2b^2$, 因此 $b|a^2$。今若 $b>1$, 由算術根本定理知, 存在質數 p 使得 $p|b$, 從而 $p|a^2$, 故 $p|a$, 於是 $\gcd(a,b)\geq p$, 這是矛盾。若 $b=1$, 則 $\sqrt{2}=a$, 於是 $a^2=2$, 這也是矛盾的, 因爲沒有一個自然數的平方會等於2。

第二十種證法: 假設 $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ 且 a 與 b 互質, 則

$$a^2=2b^2 \text{ 或 } b^2=\frac{a}{2}\cdot a$$

顯然 $b>1$, 由算術根本定理知, 存在質數 p, 使得 $p|b$。於是 $p|b^2$, 從而 $p|(\frac{a}{2}\cdot a)$。由此得 $p|\frac{a}{2}$ 或 $p|a$, 不論何者皆可得 $p|a$。因此, p 爲 a 與 b 之公因數, 這跟 a 與 b 互質矛盾, 故 $\sqrt{2}$ 爲無理數。

第二十一種證法: 假設 $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$, 且 a 與 b 互質, 則 $a^2=2b^2$, 或

$$b^2=a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

令 p 爲 b 的一個質因數, 則 $p|b^2$, 從而 $p|(a+b)(a-b)$, 於是

$$p|(a+b) \text{ 或 } p|(a-b)$$

因爲 $p|b$, 故 $p|a$。換言之, p 爲 a 與 b 的公因數, 這就跟 a 與 b 互質矛盾, 所以由歸謬法知 $\sqrt{2}$ 爲無理數。

十、方程式論的論證法

補題2: 若 $\frac{a}{b}$ 爲既約的分數, 則 $\frac{a^2}{b^2}$ 亦然。

證法: 設 $\frac{a}{b}$ 爲既約分數, 則 a 與 b 互質。由算術根本定理知, a^2 與 b^2 亦互質, 故 $\frac{a^2}{b^2}$ 也是既約分數。

定理2: 代數方程式

$$x^2=2, x>0 \tag{16}$$

既無自然數解, 也無分數解。

證明: 首先我們觀察平方數

$$1,4,9,16,\ldots$$

其中沒有 2, 故 (16) 式沒有自然數解。

其次, 設 $x=\frac{a}{b}$ 爲 (16) 式的既約分數解, 即 $\frac{a^2}{b^2}=2$。由補題知 $x^2=\frac{a^2}{b^2}$ 也是既約分數。但 $x^2=\frac{a^2}{b^2}=2$ 是自然數, 而不是分數, 這是一個矛盾, 故 (16) 式沒有分數解。

第二十二種證法: $\sqrt{2}$ 爲 $x^2=2$ 的一個正數解, 但由定理2知 $x^2=2$ 既無自然數解, 也無分數解, 故 $\sqrt{2}$ 爲無理數。

定理3: (牛頓有理根定理) 整係數多項方程式

$$c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0=0,\quad c_n\neq 0 \tag{17}$$

若存在有理根 $\frac{a}{b}$, 並且 a 與 b 互質, 則 $a|c_0$ 且 $b|c_n$。

證明: 在 (17) 式中, 以 $x=\frac{a}{b}$ 代入, 再乘以 b^{n-1}。我們注意到 c_na^n/b 爲一個整

數。因爲 a 與 b 互質, 故 $b|c_n$。另一方面, 以 $x=\frac{a}{b}$ 代入 (17) 式並且乘以 b^n/a。我們觀察到 c_0b^n/a 爲一個整數, 故 $a|c_0$。

推論: 如果整係數方程式

$$x^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0=0$$

存在非零的有理根, 則此根必爲可整除 c_0 之整數。

第二十三種證法: 設 $\sqrt{2}$ 爲有理數, 亦即設

$$\sqrt{2}=\frac{a}{b},\ a \text{ 與 } b \text{ 互質, 且} b>1\text{。}$$

考慮方程式

$$x^2-2=0 \tag{18}$$

那麼 $x=\frac{a}{b}$ 爲 (18) 式的一個有理根。由定理3知

$$b|1 \quad \text{且} \quad a|(-2)$$

於是 $b=1$, 這跟 $b>1$ 矛盾, 故 $\sqrt{2}$ 爲無理數。

補題3: 若存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $\cos n\theta$ 爲整數, 則

$$\cos\theta=0,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm1 \text{ 或爲無理數。}$$

證明: 由三角恆等式

$$2\cos2\theta=(2\cos\theta)^2-2$$

$$2\cos(n+1)\theta=(2\cos\theta)2\cos n\theta \\ -2\cos(n-1)\theta$$

及數學歸納法可得知: 對於每一個自然數 n, 恆存在一個整係數 n 次多項式 $f_n(x)$, 最高次項的係數爲1, 使得

$$f_n(2\cos\theta)=2\cos n\theta\text{。}$$

因此, 若 $\cos n\theta$ 爲一個整數, 則 $2\cos\theta$ 爲整係數多項方程式

$$f_n(x)-2\cos n\theta=0$$

的一個根。由上述推論知 $2\cos\theta$ 爲整數或無理數。因爲

$$2\cos\theta\le2$$

故 $\cos\theta=0,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm1$ 或爲無理數。

定理4: 設 $\theta=r\pi$, 其中 r 爲有理數, 則

$$\cos\theta=0,\pm\frac{1}{2},\pm1\text{或爲無理數。}$$

證明: 取 $n\in\mathbb{N}$ 使得 nr 爲整數, 則

$$\cos\theta=\cos nr\pi=\pm1$$

當 nr 爲偶數時, $\cos n\theta=+1$; 當 nr 爲奇數時, $\cos\theta=-1$。由補題3知, 在 $\theta=r\pi$ 之下,

$$\cos\theta=0,\pm\frac{1}{2},\pm1 \text{ 或爲無理數。}$$

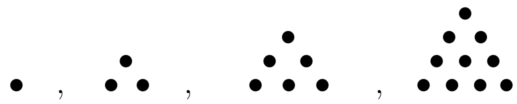
第二十四種證法: 由定理4立知

$$\cos(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

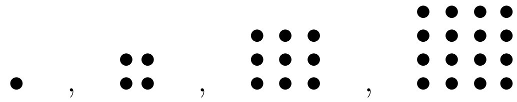
爲無理數, 從而 $\sqrt{2}$ 爲無理數。

十一、畢氏學派的弄石法

畢氏學派喜歡將自然數用小石子排成各種形狀, 叫做形數 (figurate numbers), 例如 $1,3,6,10,\ldots$ 是三角形數:



而 $1, 4, 9, 16, \ldots$, 是正方形數:



第二十五種證法: 若 $\sqrt{2}$ 爲有理數, 令 $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$, 則 $a^2=2b^2=b^2+b^2$, 這表示一個較大的正方形數 a^2 必可重排成兩個相同的較小的正方形數 b^2+b^2。

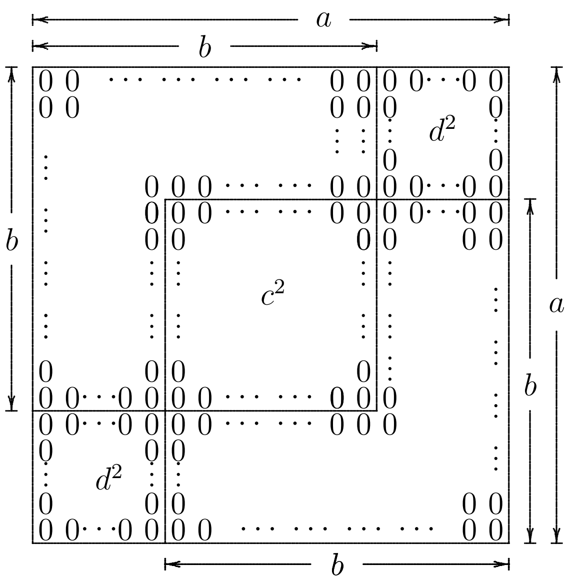


圖1

如圖1所示, 中間的正方形數 c^2 可重排成對角的兩個正方形數 d^2+d^2。容易看出

$$c=2b-a,\ d=a-b$$

$$(2b-a)^2=2(a-b)^2$$

按此要領繼續遞降下去, 就會得到矛盾, 因爲

$$2^2\neq 1^2+1^2,\ 3^2\neq 2^2+2^2$$

$$3^2\neq 1^2+1^2,\ 4^2\neq 3^2+3^2$$

$$4^2\neq 2^2+2^2,\ 4^2\neq 1^2+1^2$$

十二、無窮步驟論證法:

兩線段 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 可共度 (commensurable) 是指, 存在一個共度單位 $u>0$ 及自然數 a, b, 使得

$$\overline{AB}=a\cdot u,\ \overline{CD}=b\cdot u$$

最大的這種 u, 叫做最大共度單位。共度單位與最大共度單位分別相當於公因數及最大公因數。顯然我們有

定理5: 兩線段 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 可共度的充要條件是比值 $\overline{AB}/\overline{CD}$ 爲一個有理數。

給兩條線段 $\overline{AB}$ 或 $\overline{CD}$, 假設 $\overline{AB}>\overline{CD}$, 所謂輾轉互度法就是, 從 $\overline{AB}$ 扣掉 $\overline{CD}$ 的整數倍, 使得

$$\overline{CD}>\overline{AB}-m_1\overline{CD}\equiv\overline{A_1B_1}\geq 0$$

如果 $\overline{A_1B_1}=0$, 則 $\overline{CD}$ 就是 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 的最大共度單位; 否則, 再從 $\overline{CD}$ 扣掉 $\overline{A_1B_1}$ 的整數倍, 使得

$$\overline{A_1B_1}>\overline{CD}-m_2\overline{A_1B_1}\equiv\overline{A_2B_2}\geq 0$$

如果 $\overline{A_2B_2}=0$, 則 $\overline{A_1B_1}$ 就是 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 的最大共度單位。按此要領不斷做下去, 當求得最大共度單位時, 就停止輾轉互度的操作。容易看出

定理6: $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 可共度的充要條件是經過有窮步驟的輾轉互度就可求得最大共度單位。

注意: 輾轉互度法就是輾轉相除法也。

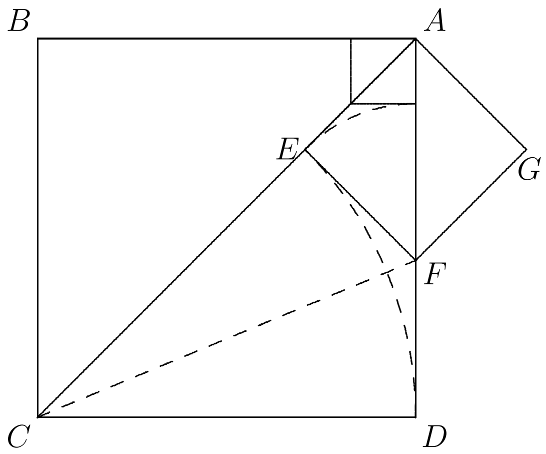


圖 2

現在我們考慮正方形 $ABCD$, 參見圖 2, 則

$$\sqrt{2} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}}。$$

欲證 $\sqrt{2}$ 爲無理數, 根據定理5及定理6, 我們只需證明 $\overline{AC}$ 與 $\overline{CD}$ 作輾轉互度時, 沒完沒了, 即會涉及無窮步驟 (infinite processes)。

第二十六種證法: 我們作 $\overline{AC}$ 與 $\overline{CD}$ 的輾轉互度操作。在 $\overline{AC}$ 上取一點 E, 使得 $\overline{CE} = \overline{CD}$。過 E 點 $\overline{EF}$, 垂直於 $\overline{AC}$ 並且交 $\overline{AD}$ 於 F 點。由作圖知 $\triangle CDF$ 與 $\triangle CEF$ 全等, 所以 $\overline{DF} = \overline{EF}$。又 $\triangle AEF$ 爲等腰直角三角形, 故 $\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{DF}$。以 $\overline{AE}$ 爲一邊作正方形 $AEFG$, 則

$$\overline{AE} = \overline{AC} - \overline{CD}$$

再用 $\overline{AE}$ 去度 $\overline{CD}$, 就是用 $\overline{DF}$ 去度 $\overline{AD}$, 得到

$$\overline{AD} - \overline{DF} = \overline{AF}$$

接著變成 $\overline{AF}$ 與 $\overline{DF}$ 的互度, 即 $\overline{AF}$ 與 $\overline{EF}$ 的互度。換言之, 就是正方形 $AEFG$ 的對角線 $\overline{AF}$ 與一邊 $\overline{EF}$ 的輾轉互度, 這個情形跟原先 $\overline{AC}$ 與 $\overline{CD}$ 的輾轉互度完全一樣, 只是比例縮小而已。如此這般互度下去, 沒完沒了, 故 $\sqrt{2}$ 爲無理數。

第二十七種證法: 將 $\sqrt{2}$ 展開成連分數

$$\begin{aligned}\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2}-1) &= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}\\ &= 1 + \frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}}\\ &= \cdots = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\cdots}}}\end{aligned}$$

由連分數的理論知: 無理數展開成連分數時, 必爲無窮的簡單連分數 (infinite simple continued fraction); 反之亦然。因此, $\sqrt{2}$ 爲無理數。

第二十八種證法: 假設 $\sqrt{2}$ 爲有理數, 則存在兩個自然數 a, b, $a > b$, 使得 $a^2 = 2b^2$, 亦即

$$a : b = b : \frac{a}{2}$$

此式可以圖解如下: 作一個長方形 (a, b), 將它分割成兩半, 得到兩個相同的小長方形 $(b, \frac{a}{2})$, 那麼 (a, b) 與 $(b, \frac{a}{2})$ 相似, 參見圖 3。我們稱具有這種性質的長方形爲正規的長方形 (normal rectangle)。

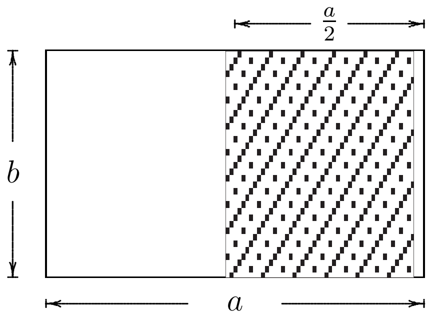


圖3

另一方面, 由 $a^2 = 2b^2$ 也可得 $(a+b)(a-b) = b^2$, 亦即

$$(a+b) : b = b : (a-b)$$

此式也可以圖解如下: 取兩個相同的正規長方形 (a, b), 將其中一個的短邊 b 接在另一個的長邊 a 上, 如圖4。我們得到一個大長方形 $(a+b, b)$ 與一個小長方形 $(b, a-b)$, 並且兩者相似。這種長方形我們稱爲超正規長方形 (hyper-normal retangle)。

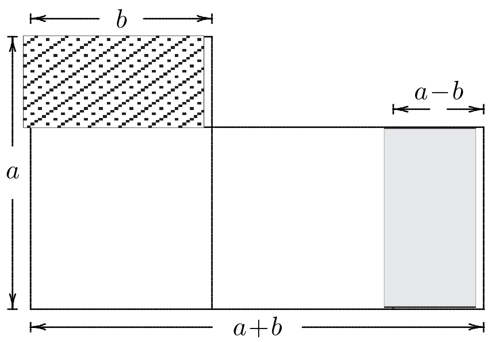


圖4

換言之, 將超正規長方形 $(a+b, b)$ 去掉兩個正方形 (b, b), 就得到一個更小的超正規長方形 $(b, a-b)$。

再將超正規長方形 $(b, a-b)$ 去掉兩個正方形 $(a-b, a-b)$, 又得到一個更小的超正規長方形 $(a-b, 2b-a)$。每次所得的超正規長方形的邊長皆爲自然數, 而且越來越小。

仿上述辦法操作下去, 沒完沒了, 這是荒謬的, 故 $\sqrt{2}$ 爲無理數。

以上 28 種法之間並非完全不同。事實上, 第二十八種是第六種的圖解。所有的證法可以看作是歸謬法的主題變奏。

十三、結語

歸謬法是數學中一種非常重要的證明方法, 更是思考的利器。根據數學史家 Sazabo 的看法, 古希臘哲學家利用歸謬法, 發現正方形的對角線與一邊不可共度 (等價於 $\sqrt{2}$ 爲無理數), 迫使古希臘的幾何學走上公理演繹之路。因此, 歸謬法在數學的發展史上扮演著關鍵性的角色。顯然, 它不只是在數學中有用而已, 例如 Galileo 就曾利用它來否證掉 Aristotle 的自由落體理論。

古希臘哲學家發明歸謬法, 這是他們在作幾何分析 (geometric analysis) 的過程中, 發現的一顆珍珠, 一件精緻的論證武器。

畢氏學派大膽地假設任何兩線段皆可共度, 從而幾何度量只會出現整數或整數比, 而將幾何學成功地奠定在有理數的算術基礎上面。後來畢氏學派又發現 $\sqrt{2}$ 爲無理數, 這使得幾何學的地基鬆動。

數學家 Hardy 在「一個數學家的辯護」(見參考資料 [4]) 一書中, 列舉了五個第一流的、漂亮的、眞正的數學定理, 其中一個就是「$\sqrt{2}$ 爲無理數」, 可見這個定理在 Hardy 心目中的崇高地位。

古希臘數學家對 $\sqrt{2}$ 不只以求得近似估計, 達到實用目的爲滿足, 他們更關心 $\sqrt{2}$ 是否爲有理數與它的「本質」是什麼, 並且堅持要有證明。這種不帶功利的「終極關懷」, 爲抽象的事物—理念、理想、眞理而堅持到底的態度, 恰是古希臘文明的特色, 也是往後西方文明產生科學、民主與人權的胚芽 (germ)。

古希臘文明是西方文明的源頭, 而歐氏幾何是希臘文明的精品。「$\sqrt{2}$ 爲無理數」對於促成歐氏幾何的誕生具有不可磨滅的貢獻, 對人類的歷史影響深遠。偉哉, $\sqrt{2}$！

參考資料

1. Cauman, L. S., On Indirect Proof, Scripta Mathematica, Vol. XXIII, No. 2, 1966.
2. Gauntt, R., The Irrationality of $\sqrt{2}$, American Math. Monthly, 63, p. 247, 1956.
3. Harris, V. C., On Proofs of the Irrationality of $\sqrt{2}$, Mathematics Teacher, 64, p. 19, 1971.
4. Hardy, G. H., A Mathematician's Apology, Cambridge Univ. Press, Reprinted, 1984.
5. Loomis, E. S., The Pythagorean propositions, Ann Arbor, Michigan, Edward Brothers, 1968.
6. Szabo, A., The Beginning of Greek Mathematics, Dordrechet, 1978.
7. Szabo, A., The Transformation of mathematics into deductive science and the beginnings of its foundation on definitions and axioms. Scripta Mathmatica, Vol. XXVll, No. 1 and No. 2, 1960.
8. Anglin, W. S., Mathematics, A concise History and Philosophy, Springer-Verlag, 1994.

—本文作者任教於台灣大學數學系—