

數學的內容、方法和意義

丘成桐

丘成桐教授應北京大學邀請，出席北大百週年校慶，並於一九九八年五月五日，與另外三位傑出華人科學家，楊振寧教授、李遠哲教授和朱棣文教授在北京大學舉行學術講座，上千名北大師生反應熱烈，三小時的講座，座無虛席。

今天要講的是數學的內容、方法和意義，這原是蘇聯人寫的一本書的書名，和今天的演講內容切合，因此借過來作為演講的名稱。

今天是北大百週年校慶，五四運動便是北大學生發動的。作為演講的引子，讓我們先簡略地回顧一下“五四”前後中西文化之爭。十九世紀中葉以後，中國對西方科技的認識，是“船堅炮利”，在屢次戰爭失利後，張之洞提出了“中學為體、西學為用”的主張，即以傳統儒家精神為主，加入西方的技術。到了五四運動前後便有了科玄論戰。以梁漱溟為主的一派以東方精神文明為上，捍衛儒學，以為西方文明強調用理性和知識去征服自然，缺乏生命之道，人變成機械的奴隸；而中國文化自適自足，行其中道，必能發揚光大。其時正值第一次世界大戰結束，西方哲學家羅素等對西方物質文明深惡痛絕，也主張向東方學習。另一派以胡適為首者則持相反意見，他們以為

在知識領域內科學萬能，人生觀由科學方法統馭，未經批判及邏輯研究的，皆不能成為知識。

科玄論戰最終不了了之，並無定論。兩派對近代基本科學皆無深究，也不收集數據，理論無法嚴格推導，最後變得空泛。其實這便是中國傳統文化之一特質。一方面極抽象，有質而無量，儒道皆云天人合一，禪宗又云不立文字，直指心性。另一方面則極實際，莊子說“六合之外，聖人存而不論”，荀子批評莊子“蔽於天而不知人”。古代的科學家講求實用，一切為人服務，四大發明之一指南針、造紙、印刷術、火藥莫不如此。要知道西方技術之基礎在科學，實際和抽象的橋樑乃是基本科學，而基本科學的工具和語言就是數學。

歷代不少科學家對數學都有極高的評價。我們引一些物理學家的話作為例子。R. Feynman^[1] 在「物理定律的特性」一書中說

我們所有的定律，每一條都由深奧的數學中的純數學來敘述，為甚麼？我一點也不知道。E. Wigner^[1] 說數學在自然科學中有不合常理的威力。F. Dyson^[1] 說：在物理科學史歷劫不變的一項因素，就是由數學想像力得來的關鍵貢獻，基本物理既然由高深的數學來表示。應用物理，流體等大自然界的一切現象，只要能得到成熟的了解時，都可以用數學來描述。寫過「湖濱散記」的哲人梭羅^[1]也說有關真理最明晰，最美麗的陳述，最終必以數學形式展現。

其實數學家不只從自然界吸收養分，也從社會科學和工程中得到啓示。人類心靈中由現象界啓示而呈現美的概念，只要能夠用嚴謹邏輯來處理的都是數學家研究的對象。數學和其他科學不同之處是容許抽象，只要是美麗的，就足以主宰一切，數學和文學不同之處是一切命題都可以由公認的少數公理推出。數學正式成為系統性的科學始於古希臘的歐幾里德，他的「幾何原本」是不朽名作。明末利瑪竇和徐光啓把它譯成中文，並指出“十三卷中五百餘題，一脈貫通，卷與卷，題與題相結倚，一先不可後，一後不可先，累累交承... 漸次積累，終竟乃發奧微之義”。複雜深奧的定理都可以由少數簡明的公理推導，至此真與美得到確定的意義，水乳交融，再難分開。值得指出，歐幾里德式的數學思維，直接影響了牛頓在物理上三大定律的想法，牛頓鉅著「自然哲學的數學原理」與「幾何原本」一脈相承。從愛因斯坦到現在的物理學家都希望完成統一場論，能用同一種原理來解釋宇宙間的一切力場。

數學的真與美，數學家的體會深刻。

Sylvester^[1] 說“它們揭露或闡明的概念世界，它們導致的對至美與秩序的沉思，它各部分和諧關聯，都是人類眼中數學最堅實的根基”。數學史家 M. Kline^[1]說“一個精彩巧妙的證明，精神上近乎一首詩”。當數學家吸收了自然科學的精華，就用美和邏輯來引導，將想像力發揮的淋漓盡致，創造出連作者也驚嘆不已的命題。大數學家往往有宏偉的構思，由美作引導，例如 Weil 猜想促成了重整算數幾何的龐大計劃，將拓撲和代數幾何融入整數方程論中。由 A. Grothendieck 和 P. Deligne 完成的 Weil 猜想，可說是抽象方法的偉大勝利。回顧數學的歷史，能夠將幾個不同的重要觀念自然融合而得出的結果，都成為數學發展的里程碑。愛因斯坦將時間和空間的觀念融合，成為近百年來物理學的基石；三年前 A. Wiles 對自守型式和 Fermat 最後定理的研究，更是扣人心弦。數論學家能夠不依賴自然科學的啓示得出來的成就，令人驚異，這是因為數字和空間本身就是大自然的一部份，它們的結構也是宇宙結構的一部份。然而，我們必須緊記，大自然的奧秘深不可測，不僅僅在數字和空間而已，它的完美無處不在，數學家不能也不應該抗拒這種美。

本世紀物理學兩個最主要的發現：相對論和量子力學對數學造成極大的衝擊。廣義相對論使微分幾何學“言之有物”，黎曼幾何不再是抽象的紙上談兵。量子場論從一開始就讓數學家迷惑不已，它在數學上作用仿如魔術。例如 Dirac 方程在幾何上的應用使人難以捉摸，然而它又這麼強而有力地影響著

幾何的發展。超對稱是最近二十年物理學家發展出來的觀念，無論在實驗或理論上都頗為詭秘，但藉著超弦理論的幫助，數學家竟能解決了百多年來懸而未決的難題。超弦理論在數學上的真實性是無可置疑的，除非造化弄人，它在物理上終會佔一席位。

上世紀末數學公理化運動使數學的嚴格性堅如盤石，數學家便以為工具已備，以後工作將無往而不利。本世紀初 Hilbert 便以為任何數學都能用一套完整的公理推導出所有的命題。但好景不常，Godel在1931年發表了著名的論文「數學原理」中的形式上不可斷定的命題及有關係統 I」。證明了包含著通常邏輯和數論的一個系統的無矛盾性是不能確立的。這表示 Hilbert 的想法並非是全面的，也表示科學不可能是萬能的。然而由自然界產生的問題，我們還是相信 Hilbert 的想法是基本正確的。

數學家因其品稟各異，大致可分為下列三種：

(一) 創造理論的數學家。這些數學家工作的模式，又可粗分為七類。

- 從芸芸現象中窺見共性。從而提煉出一套理論，能系統地解釋很多類似的問題。一個明顯的例子便是上世紀末 Lie 在觀察到數學和物理中出現大量的對稱後，便創造出有關微分方程的連續變換群論。李群已成為現代數學的基本概念。
- 把現存理論推廣或移植到其它結構上。例如將微積分由有限維空間推廣到無限維空間，將微積分用到曲面而得到連絡理論等便是。當 Ricci, Christofel等幾何學家在曲面上研究與座標的選取無關的連絡理論時，他們很難想像到它在數十年後的 Yang-Mills 場論中的重要性。
- 用比較方法尋求不同學科的共通處而發展新的成果。例如：Weil 比較整數方程和代數幾何而發展算數幾何；三十年前 Langlands 結合群表示論和自守形式而提出“Langlands 綱領”，將可交換的領域理論推廣到不可交換的領域去。
- 為解釋新的數學現象而發展理論。例如：Gauss發現了曲面的曲率是內蘊（即僅與其第一基本形式有關）之後，Riemann 便由此創造了以他為名的幾何學，成就了近百年來的幾何的發展；H. Whitney 發現了在纖維叢上示性類的不變性後，Pontryagin和陳省身便將之推廣到更一般的情況，陳示性類在今日已成為拓撲和代數幾何中最基本的不變量。
- 為解決重要問題而發展理論。例如 J. Nash 為解決一般黎曼流形等距嵌入歐氏空間而發展的隱函數定理，日後自成學科，在微分方程中用處很大。而 S. Smale 用 h- 協邊理論解決了五維或以上的 Poincare 猜想後，此理論成為微分拓撲的最重要工具。
- 新的定理證明後，需要建立更深入的理論。如 Atiyah-Singer 指標定理，Donaldson理論等提出後，都有許多不同的證明。這些證明又引起重要的工作。
- 在研究對象上賦予新的結構。Kahler在研究複流形時引入了後來以他為名的尺度；近年 Thurston 在研究三維流形

時，也引進了“幾何化”的概念。一般而言，引進新的結構使太廣泛的概念得到有意義的研究方向。有時結構之上還要再加限制，如 Kahler 流形上我們要集中精神考慮 Kahler-Einstein 尺度，這樣研究才富有成果。

(二) 從現象中找尋規律的數學家。這些數學家或從事數據實驗，或在自然和社會現象中發掘值得研究的問題，憑藉美和經驗把其中精要抽出來，作有意義的猜測。如 Gauss 檢視過大量質數後，提出了質數在整數中分佈的定律；Pascal 和 Fermat 關於賭博中賠率的書信，為現代概率論奠定基石。五十年代期貨市場剛剛興起，Black 和 Scholes 便提出了期權定價的方程，隨即廣泛地應用於交易上。Scholes 亦因此而於去年獲得諾貝爾的經濟學獎。這類的例子還有很多，不勝枚舉。

話說回來，要作有意義的猜測並非易事，必須對面對的現象有充分的了解。以紅樓夢為例，只要看了前面六七十回，就可以憑想像猜測後面大致如何。但如果我們對其中的詩詞不大了解，則不能明白它的真義。也無從得到有意義的猜測。

(三) 解決難題的數學家。所有數學理論必須能導致某些重要問題的解決，否則這理論便是空虛無價值的。理論的重要性必與其能解決問題的重要性成正比。一個數學難題的重要性在於由它引出的理論是否豐富。單是一個漂亮的證明並不是數學的真諦，比如四色問題是著名的難題，但它被解決後我們得益不多，反觀一些難題則如中流砥柱，你必須將它擊破，然後才能登堂入室。比如一日不

能解決 Poincare 猜測，一日就不能說我們了解三維空間！我當年解決 Calabi 猜測，所遇到的情況也類似。

數學家要承先啓後，解掉難題是“承先”，再進一步發展理論，找尋新的問題則是“啓後”。沒有新的問題數學便會死去，故此“啓後”是我們數學家共同的使命。我們最終目標是用數學為基礎，將整個自然科學，社會科學和工程學融合起來。

自從 A Wiles 在 1994 年解決了 Fermat 大定理後，很多人都問這有什麼用。大家都覺得 Fermat 大定理的證明是劃時代的。它不僅解決了一個長達 350 年的問題，還使我們對有理數域上的橢圓曲線有了極深的了解；它是融合兩個數論的主流——自守式和橢圓曲線——而迸發出來的火花。值得一提的是，近十多年來橢圓曲線在編碼理論中發展迅速，而編碼理論將會在電腦貿易中大派用場，其潛力無可估計。

最後我們談談物理學家和數學家的差異。總的來說，在物理學的範疇內並沒有永恆的真理，物理學家不斷努力探索，希望能找出最後大統一的基本定律，從而達到征服大自然的目的。而在數學的王國裡，每一條定理都可以從公理系統中嚴格推導，故此它是顛撲不破的真理。數學家以美作為主要評選標準，好的定理使我們從心靈中感受大自然的真與美，達到“天地與我並生，萬物與我為一”的悠然境界，跟物理學家要征服大自然完全不一樣。

物理學家為了捕捉真理，往往在思維上不斷跳躍，雖說是不嚴格和容易犯錯，但他們

卻能把自然現象看得更透更遠，這是我們十分欽佩的。畢竟數學家要小心奕奕、步步為營，花時間把所有可能的錯誤都去掉，故此這兩種做法是互為表裡，缺一不可的。

在傳統文化中，我們說立德，但卻從不討論如何求真，不求真，則何以立德？我們又說“溫柔敦厚，詩教也”，但只是含糊的說美，數學兼講真美，是中華民族需要的基本科學。

參考資料：

1. Ossermen 原著，葉李華，李國偉譯，宇宙的詩篇，天下文化出版社，人文科學 29，1997，台北。

—本文作者為中央研究院院士—