數 播 信 箱

(1. 陳明賢來函)

編輯先生:

在「數學傳播」季刊第二卷第一期簡蒼調先生的「續談觀察歸納法的價值」文中，第三十七頁中歸納了一個表（與原表略有增減）：

分割元素個數	0	1	2	3	4	5 ⋯ n
直線被點分割區域個數	1	2	3	4	5	6 ⋯ $n+1 \sim L_n$
平面被線分割區域個數	1	2	4	7	11	16 ⋯ $\frac{n(n+1)}{2}+1 \sim P_n$
空間被面分割區域個數	1	2	4	8	15	26 ⋯ $\frac{n^3+5n}{6}+1 \sim S_n$

我們令直線被點分割部分個數為 L_n，平面被直線分割區域個數為 P_n，空間被平面分割區域個數為 S_n。這 L_n, P_n, S_n 我們簡稱為個數函數，例如 L_n 稱為直線的個數函數。其實，點也有個數函數，設為 A_n，表示一點被「n 個不是東西的東西」所「分割」的個數，很明顯的，無論 n 為何值 ($n\in\mathbf{N}$)，A_n 永遠等於 1。

再回頭看看上表 L_n, P_n, S_n 可知

(1) A_n

(2) $L_n=1+n$

(3) $P_n=1+\dfrac{n(n+1)}{2}$

(4) $S_n=1+\dfrac{n^3+5n}{6}$

初看之下，看不出這四個公式之間有什麼關係。但再仔細觀察，終於可以發現其中蘊藏著極其微妙的關係：

(1) $A_n=1$

(2) $L_n=1+\sum\limits_{k=0}^{n-1} A_k$

(3) $P_n=1+\sum\limits_{k=0}^{n-1} L_k$

(4) $S_n=1+\sum\limits_{k=0}^{n-1} P_k$

這結果或許沒什麼，我們看看可不可以利用以上結果，擴充至 n 度空間（假說每度空間皆可分割）。

最後，我們歸納出一個結論：

「令 T_n 為某 (m) 度空間的個數函數，F_n 為其次一 ($m-1$) 度空間的個數函數，則

$$T_n=1+\sum_{k=0}^{n-1} F_k$$

其中 $n\in\mathbf{N}$, $m=0,1,2,3,\cdots\cdots$。」

如果這結論正確，那麼每一度空間的個數函數皆可導出，這不是很有趣的嗎?

讀者　陳明賢 上

明賢同學:

(一)首先讓我為你的細心的觀察喝彩。你的猜測是正確的。

若 T_n 是 m 維歐氏空間的個數函數，F_n 是 (m-1) 維歐氏空間的個數函數，則

$$T_n=1+\sum_{k=0}^{n-1}F_k。$$

（有關個數函數的定義，請參考簡蒼調先生的原文，「數播」第二卷第一期。）

上述結論的證明的基本精神，其實已經出現在簡先生的原文。

讓我們證明下面的遞廻函數公式:

$$T_{n+1}=T_n+F_n \qquad (1)$$

假設在 m 維空間給定 n 個 ($m-1$) 維之超平面 (hyperplane)，且此 n 個超平面將此空間分割成 T_n 個區域。如果新添加一個在一般位置的超平面 H，則 H 與原有之 n 個平面相交於 n 個 ($m-2$) 維的超平面，故 H 被分割成 F_n 個區域。故添加第 $n+1$ 個 ($m-1$) 維之超平面，必增加 F_n 個區域。(1)式得證。

在(1)式中令 $n=0,1,2,\cdots\cdots,n-1$，得

$$T_1=T_0+F_0,$$
$$T_2=T_1+F_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$T_n=T_{n-1}+F_{n-1}$$

將以上 n 式相加，得

$$T_n=T_0+\sum_{k=0}^{n-1}F_k,$$

因 $T_0=1$，故得

$$T_n=1+\sum_{k=0}^{n-1}F_k.$$

(二)回 顧:

在第(一)部份中之(1)式，$T_{n+1}=T_n+F_n$，其實就是簡先生原文第 37 頁的 $S_{n+1}=S_n+P_n$。

許多數學工作者發現，如果他能仔細的分析每一個已有的定理證明，他常常能够很漂亮的推廣某些已知的結果，甚至能由此揣摩並且發展出新的技巧。

你的觀察與其證明就是一個例子。

你能够成功的從低維空間的個數函數歸納出一般的公式，是非常難能可貴的，預祝你以後能够更仔細的分析每一個已知的結果，並且不斷的研究新的技巧！

臺大數學系
康明昌 敬覆
(1977年11月6日)

(2. 仲國慶來函)

編輯先生:

我有幾個問題向您請教，我希望您給我答覆或者指出在那一本書也很好；我知道您很忙，但我希望您給一個愛好數學的人，在起步走時能更有生趣。

1. f 是一個函數，定義爲

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\in\{\text{有理數}\}\\ 1 & x\in\{\text{無理數}\}\end{cases}\quad x\in\mathbf{R}$$

則 $$\int_0^1 f(x)dx=?$$

這個我認爲是 1/2，但也有可能等於 1 或 0，就要看是如何說法，但正確應該是多少呢？我是否應該把面積的概念再修正呢？

2. 由 $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}$$
$$\approx\int_1^n\frac{dn'}{n'}$$

有人把他寫成恆等式:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\log n+r\qquad r=0.57721566490153$$

再設 $$S_\alpha=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\cdots\cdots$$

則 $$\log n+r-S_\alpha=2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{2}{n}\right)$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n/2}$$
$$=\log\frac{n}{2}+r$$

(都考慮 n 很大時，r 才等於 0.577……)

則 $$\log n+r-S_\alpha=\log\frac{n}{2}+r$$
$$\log n+r-S_\alpha=\log n-\log_e 2+r$$
$$S_\alpha=\ln 2$$

代表 $$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\cdots$$

(有沒有錯？)

3. 在 T. Apostol 的 *Mathematical Analysis* 第 8 頁最下方 Example 1: The set $\mathbf{R}^+=(0,+\infty)$ is unbounded above. (沒有問題) It has no upper bounds & no maximun element. (有問題) It is bounded below by 0 but has no minimun element. (問題更大！)

我考慮沒有最大的元素，因爲 $\mathbf{R}^+$ 最大可到 $+\infty$，但總該有個元素吧？(但那又是什麼呢？我也說不出來。) 更絕的是沒有最小元素，當然若 $\mathbf{R}^+=[0,+\infty]$，0 是最小的元素，但是本題 $0\notin\mathbf{R}^+$，因此沒有最小的元素，∞ 不是實數還有話說，∞ 不能作 $\mathbf{R}^+$ 中的最大元素，但 0 總是在 $\mathbf{R}$ 裏面，爲何沒有最小元素呢？難道說不出來就算沒有嗎？請指點我一下！

4.