複數爲什麼表爲 $a+bi\ (a, b \in \mathbf{R})$ 之形式

王湘君

本文作者現爲師大附中數學教師

一、前　　言

同學都知道，自然數不夠用，產生負整數與零；整數不夠用，產生有理數；有理數不夠用，產生無理數。所以實數系 **R** 是由自然數系 **N** 開始，經由整數系 **Z**，有理數系 **Q**，逐步擴展得來的。因此，我們得到數系間之包含關係如下:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$$

每一個新的數系擴充時，都有其動機與方法，這裏只打算討

論由 **R** 擴充到 **C** 這一環。

二、創造複數系的動機

一般說來，實數系是一個相當完備而優良的數體，對於各種實用問題，絕大部分都可以在實數系裏，有效而簡明地予以解決。但是對於某些問題，實數系依然有不夠完備的地方。譬如二次方程式 $x^2+1=0$ 在**R**中無解。對於實數系在這方面的欠缺的補救辦法，是在實數系之外，另創一個新的數體，使佈於**R**中之任何方程式，在新的數體中，皆有解。這就是創造複數系之動機，它比實數系更加完備，所以在若干問題的討論上，複數系用起來比實數系更簡捷，更有效。

三、創造複數系的方法

數系擴充必須遵守一些原則:

(1)新數系比舊數系要有更廣的"引用性"。

(2)可用舊數系得到新數系。

(3)新數系要盡量保持舊數系的性質及運算。

(4)舊數系是新數系的特例。

由實數系 **R** 擴充到複數系 **C** 時，**R** 中的加減乘除等運算規則會保持，但 **R** 中的次序關係將被破壞，因爲每一實數與數線上的點，恰成一一對應。也就是在一度空間裏，除了實數以外，不可能再有其他數了。所以要擴充實數系，必須向二度空間（平面 R^2）上發展，而在平面上的點是沒有大小次序關係的，故複數沒有次序性。又平面上的點與有序實數對，有良好的一一對應關係。故

〔**定義**〕: *有序實數對* $<x,y>$ *叫做一複數。*

於是每一複數與平面上的點，恰成一一對應，這樣就構成了複數系 $\mathbf{C}=\{<x,y>|x,y\in\mathbf{R}\}$（我們避免用 i，又避免與 $\mathbf{R}^2$ 相混，所以採用 $<x,y>$ 的表示法。嚴格說來，有了運算才叫複數系，因此我們在下節將討論它的運算。）

四、複數的四則運算

剛才我們定義有序實數對 $<x,\ y>$ 叫做一複數。現在我們有了一大堆複數，我們必須在它們中間定義運算，才能把它們結合起來。

首先規定複數的相等:

$$<a,b>=<c,d>\Longleftrightarrow a=c \text{ 且 } b=d$$

再定義複數的四則運算:

(1) $<a,b>+<c,d>=<a+c,b+d>$

(2) $<a,b>-<c,d>=<a-c,\ b-d>$

(3) $<a,b>\cdot<c,d>=<ac-bd,ad+bc>$

(4) $\dfrac{<a,b>}{<c,d>}=<\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2},\ \dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}>$ （假設 $c^2+d^2\neq 0$）

（讀者可自行檢驗運算的結合律，交換律，分配律，消去律，等規則。）我們根據乘法的定義，得出下列定理。

定理: $<0,1>\cdot<0,1>=<0,1>^2=<-1,0>$

證明: $<0,1>\cdot<0,1>=<0\cdot0-1\cdot1,0\cdot1+1\cdot0>$
$=<-1,0>$

爲了方便，我們規定 $<a,0>=a$，$<0,1>=i$，上面的定理可改寫爲 $i^2=-1$。我們把 $<0,1>=i$，叫做虛數單位，即 $i=\sqrt{-1}$。我們來檢查一下，創造複數系的目的是否已達成?

(1)方程式 $x^2+1=0$ 的二根就是 i，及 $-i$ $(\because i^2=-1)$

(2)二次方程式 $ax^2+bx+b=0$ 當判別式 $b^2-4ac<0$ 時

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{4ac-b^2}\,i}{2a}$$

故 $ax^2+bx+c=0$ 在複數系中定有解了。

五、複數的標準形式

我們知道平面是一個二維向量空間，向量 $(1,0),(0,1)$ 是平面上的一組正交基底，任一向量 (x,y) 都可表成此二向量的線性組合，即 $(x,y)=x(1,0)+y(0,1)$，又每一複數與有序實數對一一對應，現在我們把 $<x,y>$ 與 (x,y) 看成一樣，則前面規定 $<1,0>=1,<0,1>=i$，故每一複數 $<x,y>$ 可表爲 1 及 i 之線性組合，即

$$\begin{aligned}<x,y>&=x<1,0>+y<0,1>\\&=x\cdot1+y\cdot i\\&=x+yi,\end{aligned}$$

我們稱 $x+yi$ 爲複數 $<x,y>$ 的標準型，x 叫做實部，y 叫做虛部。若把複數寫成標準形式，則上面所定義的複數四則運算，可以寫成如下:

(1) $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

(2) $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

(3) $(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

(4) $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$ （假設 $c^2+d^2\neq0$）

觀察上面各式，可知: 若把 i 看成代表實數的字母，i^2 看作 -1，則複數的四則運算與實數的四則運算，完全相同，以後討論複數時，把它們化爲標準形式，較爲方便。

六、結　語

複數的觀念，最初並不能爲一般人所接受，因爲在應用時沒有遇到過用複數表示的量。將複數用平面上的點來表示，是高斯首先提出來的，使得大家對複數有了更進一步的認識。由於科學的發展，在若干應用問題（如力學，電學等）中，也已發現要用複數才能表示的量。