兩個小討論

汪 治 平

本文中的兩個討論都不是在“嚴密的語言”下來陳述的。作者的想法明白而新鮮；尤其第二段是供大家討論欣賞。讀者若是想要它“嚴密”的話，只須用幾個述語補上一些自然的條件。

作者原高雄中學學生，現就讀臺大數學系一年級。 ——編者按

前　言

在高中數學上，目前許多參考書充斥市面，有的已經到了走火入魔的程度。然而有些問題是要用分析方法才能解決的，有些頭腦優秀的同學一則由於好奇心的驅使，一則由於腦力無處發洩，拼命鑽研這些「怪題目」，不但浪費了許多時間，而且也難得到系統化的結果。

下面是兩個較常見的問題：⑴級數的判別，⑵切線問題。

(1) 級數的積分檢驗法

無窮級數可表爲下列形式：

$$S_m=\sum_{n=1}^{m} f(n) \quad 。$$

當 $f(n)$ 爲遞減時；我們知道

$$\int_{n}^{n+1} f(n)dn \leq f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(n)dn \quad 。$$

因此，

$$f(1)+\int_{2}^{m+1} f(n)dn$$

$$\leq f(1)+\sum_{n=2}^{m} f(n) \leq \int_{1}^{m} f(n)dn+f(1) \quad 。$$

由上式可知，若

$$\lim_{m\to\infty} \int_{1}^{m} f(n)dn$$

收斂，則 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收斂，且兩者之差小於 $\int_{1}^{2} f(n)dn$ 。

例 1：判別 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ 是否收斂？

解：

$$\lim_{m\to\infty} \int_{1}^{m} \frac{1}{n^2}dn=\lim_{m\to\infty}\left(-\frac{1}{m}+1\right)=1 ,$$

故級數收斂。

例 2：求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2^6+3^6+\cdots+n^6}{n^7}$

解：由於

$$\int_{0}^{n} m^6 dm \leq \sum_{m=1}^{n} m^6 \leq \int_{1}^{n+1} m^6 dm ,$$

我們知道

$$\frac{\frac{n^7}{7}}{n^7} \leq \frac{\sum_{m=1}^{n} m^6}{n^7} \leq \frac{\frac{(n+1)^7}{7}-\frac{1}{7}}{n^7}$$

取極限得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{m=1}^{n} m^6}{n^7}=\frac{1}{7} \quad 。$$

(2) 二變數方程式的解的切線的斜率

i) 假設 F 是個二變數的函數。假設 $F(x_0, y_0)=0$，$\partial F(x_0, y_0)/\partial y_0=0$，則 $F(x, y)=0$ 所定義的曲線的斜率

$$m=-\frac{\partial F}{\partial x} \Big/ \frac{\partial F}{\partial y} \quad 。$$

證明：由定義知道

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$=\lim_{\triangle h\to 0} \frac{F(x_0+\triangle h, y_0)-F(x_0, y_0)}{\triangle h} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$=\lim_{\triangle k\to 0} \frac{F(x_0, y_0+\triangle k)-F(x_0, y_0)}{\triangle k} \qquad (2)$$

如果我們選取的 $(\triangle h, \triangle k)$ 能夠使得 $F(x_0+\triangle h, y_0+\triangle k)=0$ 的話，則

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$=\lim_{\substack{\triangle h\to 0\\ \triangle k\to 0}} \frac{F(x_0+\triangle h, y_0+\triangle k)-F(x_0+\triangle h, y_0)}{\triangle k}$$

$$=\lim_{\substack{\triangle h\to 0\\ \triangle k\to 0}} \frac{-F(x_0+\triangle h, y_0)}{\triangle k}$$

這時候，

$$-\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \Big/ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$=-\lim_{\substack{\triangle h\to 0\\ \triangle k\to 0}} \frac{\triangle k}{\triangle h} \cdot \frac{F(x_0+\triangle h, y_0)}{-F(x_0+\triangle h, y_0)}$$

$$=+\lim_{\substack{\triangle h\to 0\\ \triangle k\to 0}} \frac{\triangle k}{\triangle h} \qquad (3)$$

我們再強調一次，上述的計算中，$\triangle h$，$\triangle k$ 是能夠使得 $F(x_0+\triangle h, y_0+\triangle k)=0$ 的。也就是說，$(x_0+\triangle h, y_0+\triangle k)$ 是 $F(x, y)=0$ 所定義的曲線上的點。因此，⑶式中之右邊卽爲 $F(x, y)=0$ 在 (x_0, y_0) 處的斜率 m。因此，本定理得證。

ii) 若是上式中 $\partial F(x_0, y_0)/\partial y=0$，而 $\partial F(x_0, y_0)/\partial x \neq 0$，則可知 $F(x, y)=0$ 在 (x_0, y_0) 處的切線是鉛直的。

iii) 若是 $\partial F(x_0, y_0)/\partial x=\partial F(x_0, y_0)/\partial y=0$，我們將如下處理：

令 $\partial F/\partial x=f$，$\partial F/\partial y=g$，$\triangle t=\sqrt{(\triangle h)^2+(\triangle k)^2}$。(這邊所提之 $\triangle h$, $\triangle k$ 均爲能使得 $F(x_0+\triangle h,\ y_0+\triangle k)=0$ 的。) 令

$$\lim_{\triangle t\to 0} \frac{\triangle h}{\triangle t}=\cos\alpha, \quad \lim_{\triangle t\to 0} \frac{\triangle k}{\triangle t}=\sin\alpha$$

則斜率

$$m=\lim_{\substack{\triangle k\to 0\\ \triangle h\to 0}}\frac{\triangle k}{\triangle h}=\tan\alpha\quad 。$$

取 α 方向之導數得

$$\lim_{\substack{\triangle h\to 0\\ \triangle k\to 0}}\frac{f(x_0+\triangle h,y_0+\triangle k)-f(x_0,y_0)}{\triangle t}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\sin\alpha,$$

$$\lim_{\substack{\triangle h\to 0\\ \triangle k\to 0}}\frac{g(x_0+\triangle h,y_0+\triangle k)-g(x_0,y_0)}{\triangle t}$$

$$=\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)\cos\alpha+\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)\sin\alpha\quad 。$$

兩式相除得

$$\lim_{\substack{\triangle h\to 0\\ \triangle k\to 0}}\frac{f(x_0+\triangle h,y_0+\triangle k)}{g(x_0+\triangle h,y_0+\triangle k)}$$

$$=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\sin\alpha}{\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)\cos\alpha+\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)\sin\alpha}$$

$$=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot m}{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)+\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot m}\quad 。$$

因此得到

$$-m=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}m}{\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}m}\quad 。$$

這是一個關於 m 的二次方程式，因此，可以很容易的求得答案。