數學在音樂上的應用

戴久永

本文作者現任教於交通大學運輸管理系

（前　言）

數學和自然科學如物理、化學以及工程方面關係密切是衆所周知的事實，然而數學和音樂的相關性卻不爲大家所熟知。本文在說明數學在這表面上看來似乎毫無關聯的學科上所扮演的角色，表明數學的「無孔不入」的特性。

有關數學與音樂之間關係的研究始於古希臘時代對樂音的數學分析。畢氏集團曾研究振動的弦，而發現它所發出聲音間基本數學關係。他們發現音樂的音程（musical interval）全受整數比的支配。例如彈撥一根緊張的弦，使他發出一個音後，我們可依簡單的整數比值，加長弦長得到較該音爲低的任一音調。例如以C調的弦爲標準，增長至 16/15 倍，則可得到 B 調；增長至 6/5 倍可得A調；增長 4/3 倍可得到G調；增長 3/2 倍可得到F調；增長至 8/5 倍可得E調；增長至 16/9 倍可得D調；增長至兩倍則可得到C調；但這C調較前C調恰低八度。

畢氏發現C調、F調、G調與低C調間的整數比關係能應用到任何音階的等值部份，因而確信凡所有的調和，所有的美，所有自然現象，均可用簡單的整數比表示出來。

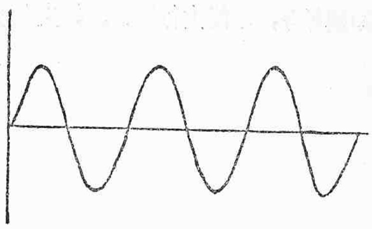
在中古時代，七藝中的四藝（quadrivium），包括算數、幾何、天文和音樂。到了十七和十八世紀，數學家和科學家還繼續研究振動的弦，得到了有關樂音學（theory of musical sounds）重要的結論。

通常聲音是由物體的振動所引起，最簡單的例子是一個被輕彈的音叉（tuning fork）振動而發出聲音。當它的尖端振動，在它附近的空氣分子受到波及，這種干擾非常類似丟一粒石子在池塘中所引起的干擾。這受振動音叉的干擾傳到耳膜引起耳膜的振動，因而產生了聲音的感覺。

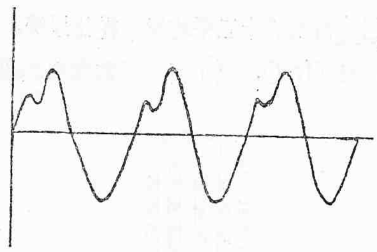
聲音有三個基本的性質：音調（pitch），音響（loudness）和音品（quality）。一個樂音音符（musical note）的音調，簡單說就是那音符在音階（musical scale）上的值。例如在鋼琴上，高音符有高音調，是由短且細的弦所發出，低音符有低音調是由長而粗的弦所發出。高調的性質相對於振動的頻率（frequency）。如果一音叉振動得很快，我們稱它振動次數高，因此它的音調高。以鋼琴來說，中C調每秒振動 256 次，而比這音符高八階（one octave higher）則每秒振動 512 次。

樂音的音響就是那聲音的振幅或強度。輕彈或重彈同一根吉他的弦會發出同樣的音調，但是它們的聲音強度不同。

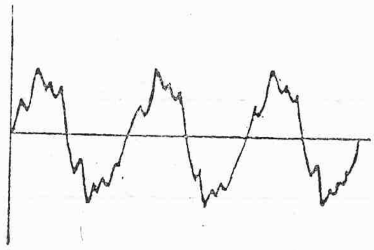
聲音的音品就是某種聲音的特性，使得我們能辨別出即使是同音調同音響的不同聲音。例如吉他和鋼琴能發出兩同音調同音響的樂音，但是我們仍然可以分別出它們的不同，因爲它們的音品不同。



音　叉



小提琴



豎笛

圖　一

圖一是由音叉，小提琴和豎笛所發出聲音的圖形比較。這些聲音的音調和音響都相同，但是音品不同。

我們可以寫出方程式來代表圖一中各圖形。這些方程式必須用到三角函數。每一個樂音都可以用一個相對的數學方程式表達那聲音的音調、音響和音品。因此，我們能以數學化的方式來分析樂音。這種分析對於樂器的製造，尤其是像電子琴之類的電子器具（electronic instrument）非常有用。

大多數人顯然都知道高深的樂音學的理論並非是好音樂家或歌曲作家的必備條件。然而，讀和寫樂章牽涉到很多像做代數的類似過程。代數允許解題者用到很多的符號來表示數量，音樂家也是在五線譜上畫符號來代表數量（音符），看和寫樂章時也同樣應用到同餘（congruence）的概念。

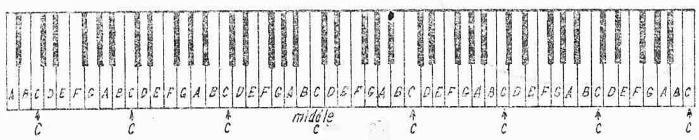


圖　二

C音符總是出現在一對黑鍵的右方。向左增加七音符，就可得另一個高八度的C。音符的次序類似一個七小時轉一週的「鐘」的計算系統。

音符　$A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,A\,B\,C$……等等。

鐘數　0 1 2 3 4 5 6 0 1 2 3 4 5 6 0 1 2……等等。

如果我們把一個八度的音程內半高音（即#號）也算在內的話，則其間有十二個音符。它們的頻率如下表所示：

表　一

音　符	$C\#$	D	$D\#$	E	…	A	$A\#$	B	C(八度)
設C調音符頻率爲1，則音符的頻率爲C調頻率的倍數	$\sqrt[12]{2}=1.0595$	$(\sqrt[12]{2})^2$	$(\sqrt[12]{2})^3$	$(\sqrt[12]{2})^4$	…	$(\sqrt[12]{2})^9$	$(\sqrt[12]{2})^{10}$	$(\sqrt[12]{2})^{11}$	$(\sqrt[12]{2})^{12}=2$

這就是巴哈首創的十二平均律。從此以後，鍵盤樂器，如鋼琴等，才能大行其道。如果上述關係應用於吉他頸上音柱 (fret)，則可得一指數曲線如圖二所示。

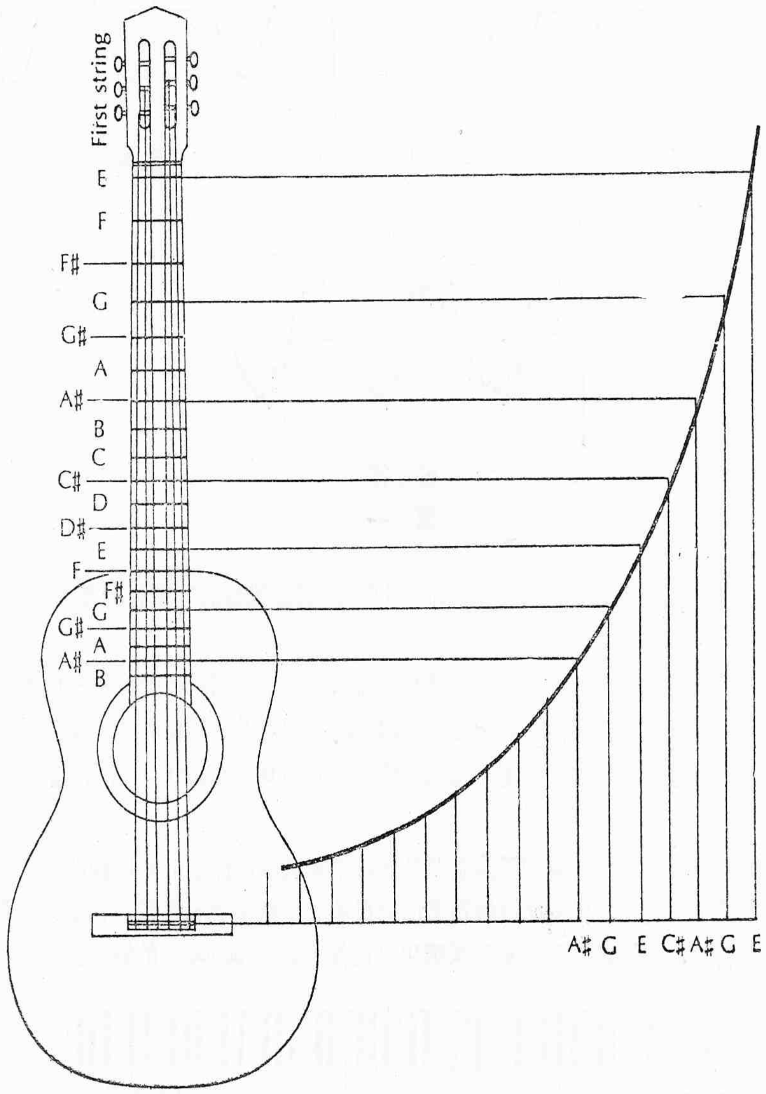


圖 二

以上所敍和其他例子表明了數學與音樂之間的類似和交互影響。用數學式子描述樂音能協助音樂家發展和設計樂器。反過來說，對於樂音的數學分析所得的知識已應用到電話、收音機、錄音和音響系統 (Stereo system)。

參考資料

1. Mario F. Triola, *Mathematics and the Modern World*, Cummings Publishing Co., 1973.

2. *Mathematics*, Life Science Library, 1970.

3. Charles D. Miller and Vern E. Heeren, *Mathematical Ideas*, Scott Foresman and Co., 1973.