閒話尤拉的絕招

張鎮華

本文作者現任職於本所

當我高中的時候，正值所謂「新數學」開始之際。「新數學」源於美國，當時蘇俄第一顆人造衛星升空，國際上爲之震驚不已，美國人派遣訪問團赴俄，研究俄國何以能以一鐵幕國家而在太空研究方面領先。他們得到的結論很多，其中有一點指出，美國在科學方面的基礎教育落伍，教材陳舊不敷實際，於是各處展開課程試驗，研究並出版新的教材。我國受此風之影響，改革遂起。我上高中的時候，「新數學」才開始不久，所採取的教材大致上取自 SMSG (School Mathematics Study Group)，其特色是引進這世紀或前世紀才發展出來的新理論，如集合、邏輯、近世代數等；最重要的一點是，不再光重視繁複的計算以及解難題的各別技巧，代之以理論的一貫性及嚴格性爲著眼點。

要求數學上的嚴密自有其深遠的歷史背景。數學上到處充滿的陷井使人們不得不採取嚴謹的態度。但是，過猶不及，過分強調嚴密一詞，往往使初學者不能領會，甚至望而生畏。除非我們對於所要討論的事物本身已經充份瞭解，否則嚴密推理沒有必要，這樣做不但不能讓我們知道更多，反而是一大阻碍。事實上，數學本身有許多是像物理一樣，需要靠經驗，透過許多特例，一再反映出其本質以後，抽象才是一個簡潔的工具，否則必徒然無用。

有時候，我們會發現數學上的一些證明事實上十分無用。舉例來說，課本上叫我們證明

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

這樣的式子幾乎是衆所周知，而且是常識般的需要記住。我還記得十分清楚，高中時的老師花了好長一段時間，很賣力的解釋數學歸納法，而且一再強調，除了用數學歸納法，絕對不能「嚴格」的證明這個式子成立。直到很久以後，我們大多數人還是不能十分瞭解數學歸納法的本質。我們只是習慣的先用 $n=1$ 代入，驗證沒錯，再從 n 成立，證明 $n+1$ 成立，這無非是在式子兩端各加 $(n+1)^2$，再把右邊湊成既定格式，於是根據數學歸納法，得證。我個人曾經花了很長一段時間去思考這個問題，自己問自己，如果題目是 $1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2=$? 那該怎麼辦？甚至如果將平方改成 m 次方，問 $1^m+2^m+\cdots\cdots+n^m=$? 又該如何？經過很長的一段掙扎，我不得不承認「證明無用論」，我所以如此說，並非不相信那些證明，只是深深的覺得，在我們眞正瞭解問題本質，也就是，在我們能嚴密證明之前，我們必已正式或非正式的思索過它，得到差不多足夠的證據，至於證明本身，有時候就像結婚證書一樣，用來使人更相信事情的眞實性罷了。數學本身，需要海闊天空的思想，異想天開的創造，只有當你有了一些粗略的原始構想以後，邏輯和嚴格才用來使理論本身更易於瞭解，或者說是換個方式加以驗證罷了。

這裏要舉的一個例子，是尤拉 (Euler) 計算 $1/1^2+1/2^2+\cdots\cdots+1/n^2+\cdots$ 的方法。並沒有多少人能有他這樣異想天開的思想，事實上，尤拉在數學的許多角落都有特殊的貢獻，他的許多神來之筆，在我們看來都極其「旁門左道」。

柏努利 (Bernoulli) 是尤拉的先輩，他對無窮級數極有貢獻，終其一生，許多級數都被他研究過，譬如，著名的柏努利級數就是因他而名。對於 $1/1^2+1/2^2+\cdots\cdots+1/n^2+\cdots\cdots=?$ 柏努利始終未能計算出其值，對此，他寫道：「如果有人能告訴我這個級數求和的方法，我將十分感激。」柏努利雖然不能親耳聽見有人告訴他這個級數的求和方法，但不久後，尤拉就給了一個極其富有幻想的解答。

首先，尤拉注意到多項式根和係數的關係，如果多項式

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0 \qquad (\text{其中 } a_n\neq 0)$$

的根是 $r_1, r_2, \cdots\cdots, r_n$，則

$$\begin{aligned}P(x)&=a_n(x-r_1)(x-r_2)\cdots\cdots(x-r_n)\\&=a_nx^n-a_n(r_1+r_2+\cdots+r_n)x^{n-1}+\cdots\cdots+(r_1r_2\cdots r_n)\end{aligned}$$

比較係數可以得到 $r_1+r_2+\cdots\cdots+r_n=-a_{n-1}/a_n$，如果多項式

$$q(x)=a_{2n}x^{2n}+a_{2n-1}x^{2n-1}+a_{2n-2}x^{2n-2}+\cdots\cdots+a_0 \qquad (\text{其中 } a_{2n}\neq 0)$$

的根成雙以 $\pm r_1, \pm r_2, \cdots, \pm r_n$ 的型式出現，則類似上法

$$\begin{aligned}q(x)&=a_{2n}(x-r_1)(x+r_1)(x-r_2)(x+r_2)\cdots\cdots(x-r_n)(x+r_n)\\&=a_{2n}(x^2-r_1{}^2)(x^2-r_2{}^2)\cdots\cdots(x^2-r_n{}^2)\\&=a_{2n}x^{2n}-a_{2n}(r_1{}^2+r_2{}^2+\cdots+r_n{}^2)x^{2n-2}+\cdots\cdots+(r_1{}^2r_2{}^2r_3{}^2\cdots r_n{}^2)\end{aligned}$$

比較係數，則

$$a_{2n-1}=0\,,\qquad r_1{}^2+r_2{}^2+\cdots\cdots+r_n{}^2=-\frac{a_{2n-2}}{a_{2n}}$$

如果 $q(x)$ 沒有零根，則考慮

$$\begin{aligned}q\left(\frac{1}{x}\right)&=a_{2n}\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}+\cdots\cdots+a_2\left(\frac{1}{x}\right)^2+a_1\left(\frac{1}{x}\right)+a_0\\&=\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}Q(x)\end{aligned}$$

其中 $$Q(x)=a_0x^{2n}+a_1x^{2n-1}+a_2x^{2n-2}+\cdots\cdots+a_{2n-1}x+a_{2n} \qquad (a_0\neq 0)$$

其根恰爲 $q(x)$ 諸根的倒數，即 $\pm 1/r_1, \pm 1/r_2, \cdots\cdots, \pm 1/r_n$，仿照前論，亦得

$$a_1=0\,,\qquad \frac{1}{r_1{}^2}+\frac{1}{r_2{}^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{r_n{}^2}=-\frac{a_2}{a_0}$$

上面右邊的式子和所要求的 $1/1^2+1/2^2+\cdots\cdots+1/n^2+\cdots\cdots$ 有幾分相似之處，只差一個是有限項，一個是無限項罷了。考慮 $\sin x$，利用泰勒展開式

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots\cdots+(-1)^{2n+1}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots\cdots$$

尤拉把 $\sin x$ 視爲 $n=+\infty$ 的多項式，其根爲 $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots\cdots, \pm n\pi, \cdots\cdots$。將這個「多項式」除以 x，得到「無窮項」多項式

$$R(x)=1-\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{5!}x^4-\cdots\cdots$$

其根爲 $\pm\pi, \pm 2\pi, \cdots\cdots, \pm n\pi, \cdots\cdots$ 均不爲零，於是利用前述的理論，得到

$$\frac{1}{(1\pi)^2}+\frac{1}{(2\pi)^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{(n\pi)^2}+\cdots\cdots=-\frac{a_2}{a_0}=\frac{1}{6},$$

亦即 $$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

我猜想，如果在考試卷上這樣做答的話，大半的可能是得到零分。尤拉本人對這樣的解法顯然也並不滿意，他曾試過各種其他可能，想獲得一個較正式的證明；雖然眞正計算到小數點以後幾位，讓人有幾分相信其正確性，但是所有人，包括尤拉在內，都花精神去找更好的證明。尤拉本人更利用類似的方法，得

到許多其他的式子。

我想說的一點是，有了答案，再湊著去證明其正確性，就顯得比原來更容易，更有頭緒了。在這裏我想提供一個基本的方法，僅需懂得一些三角的計算就夠，而且適當的修飾以後，更可以求得一般 $P(2k)=1/1^{2k}+1/2^{2k}+\cdots\cdots+1/n^{2k}+\cdots\cdots$ 之值。在這篇短文裏不提及此繁複的計算，有一點很有趣的是，這一般式子的和與柏努利級數極有關係。

和尤拉的解法相反，我們想用 $\pm1/k\pi$ 本身來構成多項式的根，而非 $\pm k\pi$。當然這中間有困難存在，利用三角函數我們可以繞圈避過這個困難。

由 De Moivre 定理可得

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^{2n+1}=\cos(2n+1)\theta+i\sin(2n+1)\theta$$

如果選定特別的角度 $\theta=\pm\pi/(2n+1),\pm2\pi/(2n+1),\cdots\cdots,\pm n\pi/(2n+1)$（均爲銳角），則

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^{2n+1}=\cos k\pi+i\sin k\pi=\pm1。$$

另一方面利用二項式定理展開可得

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^{2n+1}=(\cos\theta)^{2n+1}+i\binom{2n+1}{1}(\cos\theta)^{2n}\sin\theta$$
$$-\binom{2n+1}{2}(\cos\theta)^{2n-1}(\sin\theta)^2-i\binom{2n+1}{3}(\cos\theta)^{2n-2}(\sin\theta)^3+\cdots\cdots$$

比較兩式的虛數部份，可以得到

$$\binom{2n+1}{1}(\cos\theta)^{2n}\sin\theta-\binom{2n+1}{3}(\cos\theta)^{2n-2}(\sin\theta)^3+\binom{2n+1}{5}(\cos\theta)^{2n-4}(\sin\theta)^5-\cdots\cdots=0$$

在上面的特別選定角，$\sin\theta\neq0$，可以將上式除以 $(\sin\theta)^{2n+1}$，得到

$$\binom{2n+1}{1}(\cot\theta)^{2n}-\binom{2n+1}{3}(\cot\theta)^{2n-2}+\binom{2n+1}{5}(\cot\theta)^{2n-4}-\cdots\cdots=0$$

換句話說，多項式

$$P(x)=\binom{2n+1}{1}x^{2n}-\binom{2n+1}{3}x^{2n+2}+\binom{2n+1}{5}x^{2n-4}-\cdots\cdots$$

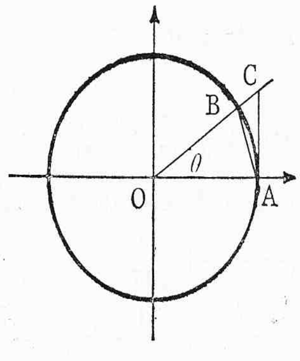
的 $2n$ 個非零根爲 $\pm\cot(\pi/(2n+1)),\pm\cot(2\pi/(2n+1)),\cdots\cdots,\pm\cot(n\pi/(2n+1))$，而根與係數的關係再度保證

$$\left(\cot\frac{\pi}{2n+1}\right)^2+\left(\cot\frac{2\pi}{2n+1}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\cot\frac{n\pi}{2n+1}\right)^2=\frac{\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}}=\frac{n(2n-1)}{3}\qquad(*)$$

從另一角度估計銳角和其三角函數值間的誤差，可以得到

$$\sin\theta<\theta<\tan\theta,\quad \text{其中 }\theta\text{ 爲銳角。(i.e. } 0<\theta<\pi/2)$$

這一點可由下圖單位圓內扇形面積看出來:



$\triangle OAB$ 之面積<扇形 OAB 之面積 $<\triangle OAC$ 之面積

$$\frac{1}{2}\sin\theta<\frac{1}{2}\theta<\frac{1}{2}\tan\theta$$

$$\sin\theta<\theta<\tan\theta$$

平方後，再倒數，得

$$\csc^2\theta > \frac{1}{\theta^2} > \cot^2\theta \qquad \text{i.e.} \quad 1+\cot^2\theta > \frac{1}{\theta^2} > \cot^2\theta$$

將上式用 $\theta = i\pi/(2n+1)$ $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ 代入，並將 n 個不等式相加，得到

$$n+\left(\cot\frac{\pi}{2n+1}\right)^2+\cdots+\left(\cot\frac{n\pi}{2n+1}\right)^2 > \left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^2$$
$$+\cdots+\left(\frac{2n+1}{n\pi}\right)^2 > \left(\cot\frac{\pi}{2n+1}\right)^2+\cdots+\left(\cot\frac{n\pi}{2n+1}\right)^2$$

並由（＊）得

$$n+\frac{n(2n-1)}{3} > \left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^2\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right) > \frac{n(2n-1)}{3}$$

亦即

$$\frac{\pi^2(2n^2+n)}{3(2n+1)^2} > \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2} > \frac{\pi^2 n(2n-1)}{3(2n+1)^2}$$

當 $n \longrightarrow \infty$ 時

$$\frac{\pi^2(2n^2+n)}{3(2n+1)^2} \longrightarrow \frac{\pi^2}{6}, \qquad \frac{\pi^2 n(2n-1)}{3(2n+1)^2} \longrightarrow \frac{\pi^2}{6}$$

所以

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2} \longrightarrow \frac{\pi^2}{6}, \quad \text{i.e.} \ \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

〔後　註〕

「數學傳播」季刊第四期葉招定先生「排容原理」一文，第86頁，有一有趣題目：「設 n 是自然數，二整數滿足 $1 \leq a, b \leq n$；s_n 表示 a, b 互質的機率，試證 $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ 存在。」事實上 $\lim_{n\to\infty} s_n$ 不但存在，而且

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{p_1{}^2}\right)\left(1-\frac{1}{p_2{}^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_n{}^2}\right)=\left(1-\frac{1}{p_1{}^2}\right)\left(1-\frac{1}{p_2{}^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_n{}^2}\right)\cdots$$

從另一個角度看

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{p_1{}^2}\right)} = 1+\frac{1}{p_1{}^2}+\frac{1}{p_1{}^4}+\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{p_2{}^2}\right)} = 1+\frac{1}{p_2{}^2}+\frac{1}{p_2{}^4}+\cdots\cdots$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{p_n{}^2}\right)} = 1+\frac{1}{p_n{}^2}+\frac{1}{p_n{}^4}+\cdots\cdots$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

將各式相乘（再加以極限的概念）得到通項爲 $1/p_{i_1}{}^{2n_1}\, p_{i_2}{}^{2n_2}\cdots\cdots p_{i_m}{}^{2n_m}$，每一項均是 $1/1^2+1/2^2+1/3^2+\cdots\cdots+1/n^2$ 之一項，反之後式的任一項也可以表示成前者的通項形式。（利用算術基本定理，每個自然數可以唯一分解成質因數乘積。）所以

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p_1{}^2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{p_2{}^2}}\cdots\frac{1}{1-\frac{1}{p_n{}^2}}\cdots=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

倒數得 $\lim_{n\to\infty} s_n = 6/\pi^2$，是爲正確值。

〔**習題**〕利用各種方法，正式或非正式的，求 $1/1^4+1/2^4+\cdots+1/n^4+\cdots\cdots$ 之和。

$$\left[\text{提示:} \quad x^4-\frac{1}{a^4}=\left(x-\frac{1}{a}\right)\left(x+\frac{1}{a}\right)\left(x-\frac{i}{a}\right)\left(x+\frac{i}{a}\right)\right]$$ （答案是：$\pi^4/90$）