# 認識連分數

林聰源

本文作者現任教於清華大學數學系

## §0. 動機

現在讀數學的學生以及一般的數學家，其中知道（或僅僅聽說過）「**連分數**」的，恐怕只佔很小的比例。我第一次聽說有這樣的東西是在大學畢業以後的事了；當時（在國外進修）系裏從中東地區來了個老頭兒，自費研究員，整天纏着人說他如何解決了四色問題，或者動不動就搬出一大串連分數，弄得大家不知其所云，不用說系裏的敎授他高攀不上，就連我們研究生也都對他敬鬼神而遠之；而心裏不禁對這樣一個過氣的「英雄人物」興起無限感悲。同時直覺地也認爲「連分數」一定也如其人，是現代數學中沒有地位，不被人所重視的東西。至於「連分數」到底是怎樣一個東西，倒沒有人想要去了解它。

後來在很多地方又看到連分數，知道它不僅歷史悠久，而且是一個有力的工具，解決了不少很深入的問題，更難能可貴的，它還和我們日常生活中的曆法有密切的關係，所以把所知稍加整理，藉以傳播此一歷史寶藏。至於它的將來發展，有誰知道呢？

## §1. 有窮連分數

人類最早探討的科學，不是有關人體本身的醫學或有關生活環境的生物學，而是天文學。而數學兩千多年來的進展，一直和天文學密不可分(直到本世紀才有所改變)。舉例來說，一次不定方程式 $ax+by=c$ 和某些星象的重要現象是相互對應的。在紀元五世紀中，有一位印度數學家成功地解出了上述的方程式；他所用的方法其實和歐几里德計算法（輾轉相除法）有貌異實同之妙，這就是「連分數」法。

現在我們先回想一下歐几里德計算法：

設 $a, b$ 爲兩整數，且 $b>0$，則

$$
(\text{甲})\left\{\begin{array}{lll}
a=ba_0+r_1 & 0<r_1<b & (a_0\ \text{爲商數，}r_1\ \text{爲餘數}) \\
b=r_1a_1+r_2 & 0<r_2<r_1 & \\
r_1=r_2a_2+r_3\cdots\cdots & & \\
\quad\cdots\cdots & & \\
r_{N-2}=r_{N-1}a_{N-1}+r_N & & \\
r_{N-1}=r_Na_N & & (r_N\ \text{整除}r_{N-1}\text{，程序終止})
\end{array}\right.
$$

這個計算法是在紀元前三世紀時由歐几里德發現的，記載在他不朽的「**原本**」裏第七卷上。它的主要目的在於求兩數 $a$ 與 $b$ 的最大公因數（即上式中之 $r_N$）。今天，如果我們要電子計算機爲我們設計解決最大公因數的問題的話，我們該爲歐几里德驕傲，因爲他兩千年前用的這個方法仍然是目前最棒的。

現在，我們把（甲）組裏的式子全寫爲分式，如下所示：

$$(乙)\begin{cases} \dfrac{a}{b}=a_0+\dfrac{r_1}{b} \\ \dfrac{b}{r_1}=a_1+\dfrac{r_2}{r_1} \\ \dfrac{r_1}{r_2}=a_2+\dfrac{r_3}{r_2} \\ \quad\cdots\cdots \\ \dfrac{r_{N-2}}{r_{N-1}}=a_{N-1}+\dfrac{r_N}{r_{N-1}} \\ \dfrac{r_{N-1}}{r_N}=a_N \end{cases}$$

再將乙組中第一式之 $r_1/b$ 以第二式之倒數代入，接着 $r_2/r_1$ 以第三式之倒數代入，依次類推，卽得

$$(丙)\quad \frac{a}{b}=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{r_2}{r_1}}=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{r_3}{r_2}}}$$

$$=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots+\cfrac{1}{a_N}}}\quad (其中\ a_0\ 爲整數，a_1, a_2, \cdots\cdots, a_N\ 爲正整數)$$

上式之右邊卽所謂的「連分數」(更精確地說，有窮簡單連分數)。爲了節省篇幅及簡便起見，我們簡寫爲

$$a_0+\frac{1}{a_1+}\frac{1}{a_2+}\cdots+\frac{1}{a_N}\quad 或\quad [a_0, a_1, \cdots, a_N]。$$

## §2. 有窮連分數的基本關係式

現在考慮一般有窮連分數的幾個基本關係式。設

$$a_0+\frac{1}{a_1+}\frac{1}{a_2+}\cdots+\frac{1}{a_N}$$

爲任意一個**一般的**有窮連分數 (也就是說 $a_0, a_1, \cdots\cdots, a_N$ 爲任意非零之實數)，由計算易得

$$[a_0]=a_0=\frac{a_0}{1}$$

$$[a_0, a_1]=a_0+\frac{1}{a_1}=\frac{a_0a_1+1}{a_1}$$

$$[a_0, a_1, a_2]=a_0+\frac{1}{a_1+}\frac{1}{a_2}=\frac{a_2a_1a_0+a_2+a_0}{a_2a_1+1}=\frac{a_2(a_0a_1+1)+a_0}{a_2a_1+1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

一般地 $$[a_0, a_1, \cdots, a_k]=a_0+\frac{1}{a_1+}\frac{1}{a_2+}\cdots+\frac{1}{a_k}=\frac{p_k}{q_k}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$\dfrac{p_k}{q_k}$ 稱爲此連分數之第 $k$ 個漸近分數，我們有

**公式1:**

$$\begin{cases} p_k=a_kp_{k-1}+p_{k-2} & k\geq 2 \\ q_k=a_kq_{k-1}+q_{k-2} & k\geq 2 \\ p_0=a_0,\ p_1=a_0a_1+1 \\ q_0=1,\ q_1=a_1 \end{cases}$$

**證 明:** 利用歸納法

$$[a_0, a_1, \cdots, a_k, a_{k+1}]=\left[a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}, a_k+\frac{1}{a_{k+1}}\right]=\left[a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}, \frac{a_ka_{k+1}+1}{a_{k+1}}\right]$$

$$=\frac{\left(\dfrac{a_ka_{k+1}+1}{a_{k+1}}\right)p_{k-1}+p_{k-2}}{\left(\dfrac{a_ka_{k+1}+1}{a_{k+1}}\right)q_{k-1}+q_{k-2}}=\frac{(a_ka_{k+1}+1)p_{k-1}+a_{k+1}p_{k-2}}{(a_ka_{k+1}+1)q_{k-1}+a_{k+1}q_{k-2}}$$

$$=\frac{a_{k+1}(a_kp_{k-1}+p_{k-2})+p_{k-1}}{a_{k+1}(a_kq_{k-1}+q_{k-2})+q_{k-1}}=\frac{a_{k+1}p_k+p_{k-1}}{a_{k+1}q_k+q_{k-1}}$$

**公式 2:** $p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^{n-1}, \quad n\geq 1$。

**證 明:** 利用歸納法, $n=1$ 時,

$$p_1q_0-p_0q_1=(a_0a_1+1)\times 1-a_0\times a_1=1$$

又 $$p_{k+1}q_k-p_kq_{k+1}=(a_{k+1}p_k+p_{k-1})q_k-p_k(a_{k+1}q_k+q_{k-1}) \quad (\text{由公式 }1)$$
$$=a_{k+1}p_kq_k+p_{k-1}q_k-a_{k+1}p_kq_k-p_kq_{k-1}$$
$$=-(p_kq_{k-1}-p_{k-1}q_k)$$
$$=-(-1)^{k-1}$$
$$=(-1)^k$$

**公式 3:** $p_nq_{n-2}-p_{n-2}q_n=(-1)^na_n, \quad n\geq 2$。

**證 明;** 利用歸納法, $n=2$ 時,

$$p_2q_0-p_0q_2=(a_2a_1a_0+a_2+a_0)\times 1-a_0\times(a_2a_1+1)=a_2$$

又 $$p_{k+1}q_{k-1}-p_{k-1}q_{k+1}=(a_{k+1}p_k+p_{k-1})q_{k-1}-p_{k-1}(a_{k+1}q_k+q_{k-1})$$
$$=a_{k+1}(p_kq_{k-1}-p_{k-1}q_k)$$
$$=a_{k+1}(-1)^{k-1} \quad (\text{由公式 }2)$$

在實際應用中, 我們所遭遇的有窮連分數, 就像 (丙) 式一樣, 其中的 $a_0$ 爲整數, $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_N$ 皆爲正整數, 此種連分數特稱爲**簡單**有窮連分數。由以上公式, 我們可推論出有關此等簡單有窮連分數的幾個基本性質。

**推論 1:** 當 $k>1$ 時, $q_k\geq q_{k-1}+1$, 故 $q_k\geq k$。

**證 明:** 由公式 1, $q_1=a_1\geq 1$, 又

$$q_k=a_kq_{k-1}+q_{k-2}\geq q_{k-1}+1,$$

由歸納法卽得 $q_k\geq k$。

**推論 2:** $\dfrac{p_k}{q_k}-\dfrac{p_{k-1}}{q_{k-1}}=(-1)^{k-1}\dfrac{1}{q_kq_{k-1}}, \quad k\geq 1$。

**證 明:** 由公式 2, 兩邊除以 $q_kq_{k-1}$ 卽得。

**推論 3:** $\dfrac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}}>\dfrac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}, \quad \dfrac{p_{2k}}{q_{2k}}>\dfrac{p_{2k-2}}{q_{2k-2}}$。

**證 明:** 由公式 3, 兩邊除以 $q_{n-2}q_n$, 卽得

$$\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}=(-1)^n\frac{a_n}{q_nq_{n-2}}。$$

當 $n=2k$ 爲偶數時, 右式爲正, 故得

$$\frac{p_{2k}}{q_{2k}}>\frac{p_{2k-2}}{q_{2k-2}};$$

當 $n=2k+1$ 爲奇數時, 右式爲負, 故得

$$\frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}<\frac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}}。$$

**推論 4:** 對所有 $1 \leq n \leq N$，$p_n$ 與 $q_n$ 互質。
**證　明:** 由公式 1 立可得知。

從以上幾個推論，我們知道漸近分數的分母一直增大，而兩相隣漸近分數之差則愈來愈小。另外，偶數項部分形成單調嚴格上昇數列而奇數項部分形成單調嚴格下降數列，在第 4 節討論無窮連分數時，這些性質對收斂性非常重要。

## §3. 一次不定方程式 $ax+by=c$ 的解

印度人 Aryabhata 根據上述之連分數法則，於紀元 476 年成功地解決了一次不定方程式，這是史上最早使用連分數的記載。Aryabhata 的方法是這樣的: 我們可假設正整數 $a$ 與 $b$ 互質，而且 $a>b$，將分數 $a/b$ 展成連分數，如 §1. 所述，假設 $a/b=[a_0, a_1, \cdots\cdots, a_N]$。令 $p_{N-1}/q_{N-1}$ 與 $p_N/q_N$ 爲最後兩個漸近值，則其中 $p_N/q_N=a/b$，因兩者俱爲最簡分數，故 $p_N=a$，$q_N=b$，再由公式 2，$p_Nq_{N-1}-p_{N-1}q_N=\pm 1$，即 $aq_{N-1}-bp_{N-1}=\pm 1$，(爲方便計，可取正號)，代入方程式 $ax+by=c=c(aq_{N-1}-bp_{N-1})$，並展開、移項、化簡，得

$$\frac{cq_{N-1}-x}{b}=\frac{y+cp_{N-1}}{a}=t,$$

因而解得

$$\begin{cases} x=cq_{N-1}-bt \\ y=at-cp_{N-1} \end{cases} \qquad t=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots$$

## §4. 無窮連分數

古希臘之神殿 Parthenon 結構之美，嘆爲觀止，常謂之「黃金比」或「黃金分割」，其確實意義如下:

假定有一個長方形，截掉一正方形後，所剩之小長方形與原長方形相似（見圖一），則從此小長方形依樣再截掉一小正方形，所剩之圖形仍與原長方形相似，這種程序可無窮盡地做下去，這就叫做「黃金分割」，而具備此種特性之長方形之長寬比稱爲「黃金比」。

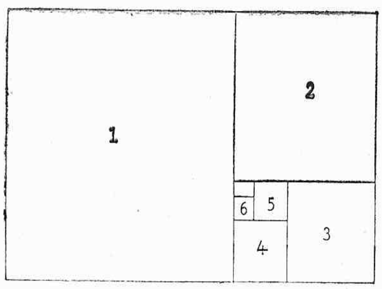


圖 一

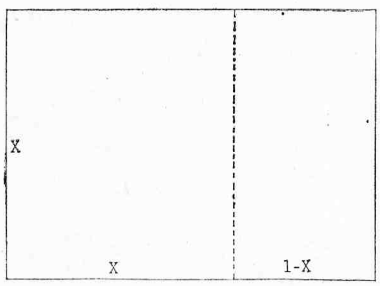


圖 二

那黃金分割又怎麼和連分數扯上關係呢?

讓我們先看一下黃金比的計算:

設圖二長方形之長邊爲單位長 1，而短邊長爲 $x$，則根據假設

$$1:x=x:(1-x),$$

即

$$x^2+x-1=0。$$

解出 $x=(-1+\sqrt{5})/2$ (另一根 $(-1-\sqrt{5})/2<0$ 不合)，此數即爲黃金比，爲一無理數，其近似值

爲 0.618。所以平常也有人說黃金比是 3 : 5=0.6 的。現在換一個角度來看 $x$ 的求法: 方程式 $x^2+x-1=0$ 可化爲

$$x=\frac{1}{1+x}$$

將此式帶入其本身右邊的 $x$ 中，便得

$$x=\cfrac{1}{1+\left(\cfrac{1}{1+x}\right)}$$

繼續不斷此步驟，則得

$$x=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}$$

這就是無窮連分數的一個例子。我們看一下它的頭幾個漸近分數:

$$\frac{1}{1}=1，\quad \frac{1}{1}+\frac{1}{1}=\frac{1}{2},\quad \frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}=\frac{2}{3}=0.666\cdots,\quad \frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}=\frac{5}{8}=0.625$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}=\frac{8}{13}=0.615\cdots,\quad \cdots\cdots$$

**由此可知利用連分數來求此種二次方程式的無理根是一個非常有價值的辦法。**

一般而言，一個型如

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots}}$$

的式子稱爲無窮連分數，簡寫成

$$a_0+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots \quad 或 \quad [a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots]。$$

通常我們只考慮 $a_0$ 爲整數而 $a_1, a_2\cdots$ 爲正整數的情形，這又特別叫做**簡單無窮連分數**。就像每一個**有理數**都可以用簡單**有窮**連分數表示（如§1. 所示）一樣，**每一個實數也都可以用簡單無窮連分數表示**，其法如下:

設 $\xi$ 爲任意一實數，則

$$\xi=a_0+\xi_1,\quad 其中\ a_0\ 爲整數而\ 0\leq\xi_1<1\ （此種表法爲唯一）。$$

若 $\xi_1\neq 0$，則

$$\frac{1}{\xi_1}=a_1+\xi_2,\quad 其中\ a_1\ 爲正整數而\ 0\leq\xi_2<1\ （此種表法爲唯一）。$$

這種步驟反覆進行，若 $\xi$ 非有理數，則程序不終止，而得一簡單無窮連分數。無窮連分數之漸近分數滿足 §2. 推論中所有的性質，我們有:

**命　題:** 設 $p_n/q_n$ 表無窮連分數 $[a_0, a_1, a_2, \cdots]$ 之第 $n$ 個漸近分數，則數列 $\{p_n/q_n\}$ 收斂。若其收斂值爲 $\xi$，則 $[a_0, a_1, a_2, \cdots]$ 即爲 $\xi$ 之無窮連分數表示。

**證　明:** 由 §2. 之推論，已知

$$\frac{p_0}{q_0}<\frac{p_2}{q_2}<\frac{p_4}{q_4}<\cdots\cdots \qquad \text{(I)}$$

$$\frac{p_1}{q_1}>\frac{p_3}{q_3}>\frac{p_5}{q_5}>\cdots\cdots \qquad \text{(II)}$$

而且由推論 2，$p_{2k}/q_{2k}<p_{2k-1}/q_{2k-1}$，所以數列 (I) 有一上界 $p_1/q_1$，而數列 (II) 有一下界 $p_0/q_0$，

由單調數列之收斂性，(I) 與 (II) 皆收斂。再由推論 2，(I) 與 (II) 之收斂值是相同的，這就證明了漸近分數數列 $\{p_n/q_n\}$ 之收斂性。

命題後半之證明從略。事實上，漸近分數是所有分母不超過 $q_n$ 的分數中最接近者，也就是說它們是 $\xi$ 的**最佳**漸近分數。(參考「數論導引」 p. 270～272)。我們也明白地看出所有偶數次項皆比收斂值小，而奇數次項皆比收斂值大。

## §5. 連分數的應用（實例說明）

【例 1】$\pi$ (圓周率) 的連分數表示爲 $[3,7,15,1,292,1,1,\cdots]$，代入公式 1 得

$$p_0=3,\ p_1=7\times 3+1=22,\ p_2=15\times 22+3=333,\ p_3=1\times 333+22+355,\ p_4=103993$$
$$q_0=1,\ q_1=7,\ q_2=15\times 7+1=106,\ q_3=1\times 106+7=113,\ q_4=33102$$

故得出其頭幾個漸近分數爲 3/1, 22/7, 333/106, 355/113,……我國在紀元五世紀時，祖沖之卽以 22/7 爲「疏率」(比 $\pi$ 之實際值略大)，以 333/106 爲「密率」(比 $\pi$ 之實際值略小)。由推論 2,

$$\left|\pi-\frac{355}{113}\right|\le\left|\frac{103993}{33102}-\frac{355}{113}\right|\le\frac{1}{113\times 33102}<\frac{1}{10^5},$$

可知以 355/113 爲 $\pi$ 的近似值時準到小數點後面 6 位。事實上，祖沖之求出

$$3.1415926<\pi<3.1415927,$$

這是數學史上極光輝的貢獻。

【例 2】16世紀的時候，義大利數學家 Bombelli 利用連分數求 $\sqrt{2}$ 的近似值，他的做法如下:

令 $\sqrt{2}=1+\dfrac{1}{y}$，則 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$，今以 $x=\sqrt{2}-1$ 代入，則

$$x=\frac{1}{y}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{1}{2+x}$$
$$=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+x}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}}=\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\cdots\cdots$$

它的頭幾個漸近分數爲

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{5},\ \frac{5}{12},\ \frac{12}{29},\ \frac{29}{70},\ \frac{70}{169},\ \frac{169}{408},\ \frac{408}{985},\ \cdots\cdots$$

而

$$\left|(\sqrt{2}-1)-\frac{169}{408}\right|\le\frac{1}{408\times 985}<\frac{1}{4\times 10^5},$$

這就說明了以 $1+(169/408)$ 做爲 $\sqrt{2}$ 的近似值時，誤差小於四萬分之一。

【例 3】**閏年的算法** 現在通行的辦法是每四年一閏，每逢百年免閏一次，而每逢四百年又恢復一閏，另外還有「閏秒」的鮮事。用連分數的方法來看就清楚了:

地球繞日一周需時 365 天 5 時 48 分 46 秒，以天爲單位化成分數卽

$$365+\frac{5}{24}+\frac{48}{24\times 60}+\frac{46}{24\times 60\times 60}=365\frac{10463}{43200},$$

將分數部分 10463/43200 展成連分數。(下面右邊之算式爲輾轉相除法的簡寫型式)

得出

$$\frac{10463}{43200}=\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{64}}}}}}$$

| 被除數或除數 | 商數 | 被除數或除數 | |
|---|---|---|---|
| | | 43200 | |
| 10463 | 4 | 41852 | (兩數相減) |
| 9436 | 7 | 1348 | |
| 1027 | 1 | 1027 | |
| 963 | 3 | 321 | |
| 64 | 5 | 320 | |
| (整除) 64 | 64 | 1 | |

其中

$$a_0=0,\ a_1=4,\ a_2=7,\ a_3=1,\ a_4=3,\ a_5=5,\ a_6=64。$$

由公式 1

$$p_0=0,\ p_1=1,\ p_2=7,\ p_3=8,\ p_4=31,\ p_5=163,\ p_6=10463$$
$$q_0=1,\ q_1=4,\ q_2=29,\ q_3=33,\ q_4=128,\ q_5=673,\ q_6=43200$$

其最佳漸近分數依次爲

$$\frac{1}{4},\ \frac{7}{29},\ \frac{8}{33},\ \frac{31}{128},\ \frac{163}{673},\ \frac{10463}{43200}$$

（愈後愈佳），頭一個漸近分數 1/4 告訴我們每四年一閏，第三個漸近分數 8/33 告訴我們每三十三年八閏，換句話說，每九十九年二十四閏，而與我們現行的辦法，爲方便計，定爲每一百年二十四閏相差極微，若每四年一閏，則每百年有二十五閏，故需略作調整，這就是逢百不閏的道理。每四百年間，有三段 128 年，另加 4 段 4 年，故閏年的總數該爲 $3\times31+4\times1=97$，若每百年 24 閏則 400 年有 96 閏，比實際需要的少了一次，故需再作調整，這就是逢 400 年恢復閏年的理由。

以上所述，牽涉的數字像 100，400 是人爲的（爲了方便記憶），按學理講，更正確的閏年表應如下列：（圈表示閏年，請注意逗點的位置與漸近分數分母的關係。）

1 2 3 4, 5 6 7 8, 9 10 11 12, 13 14 15 16, 17 18 19 20,
21 22 23 24, 25 26 27 28, 29,, 30 31 32 33,,, 34 35 36 37 38 39 40
41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60
61 62 63 64 65 66,,, 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80
81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99,,, 100
101 102 103 104 105 106 107 108 109 110 111 112 113 114 115 116 117 118 119 120
121 122 123 124 125 126 127 128,,,

讀者可從上圖明顯看出它與習俗上曆法之差別處；在現行曆法中，夏至、冬至的日子常因年份而提前或挪後一天（通常冬至爲 12 月 22 日），如果採用上圖，就可大大省略這種麻煩，但上圖的規則不便記憶，所以不太可能實行。

【例 4】陰曆閏年的由來是因爲月球繞地球一周需時 29.5306 天（卽朔望的週期），而一年（地球繞日的周期）是 365.2422 天，兩數相除得 365.2422/29.5306=12.37，所以一年該有 12.37 月，此數非整數，只得以 12 個月爲一年，而將尾數 0.37 累積成閏月。今將 0.37 展成連分數

$$0.37=\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}$$

其漸近分數依次爲：

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{8},\ \frac{7}{19},\ \frac{10}{27}$$

而閏年（即有閏月之年）應如下安排：（圈表示閏年）

1 ②, 3,, 4 ⑤ 6,, 7 ⑧,,, 9 ⑩ 11 12 ⑬ 14
15 ⑯,,, 17 ⑱ 19,,,,20 ㉑ 22 23 ㉔ 25 26 ㉗,,,,,

我們可從上圖清楚地看出來，每隔兩年或三年出現一次閏月。

【例 5】陰曆月大月小的由來是因爲月球繞地球一周需時 29.5306 天，此數非整數，若以 29 天爲一個月，則顯太少（是爲小月），若以 30 天爲一個月則顯太多（是爲大月），至於其間安排的規則，也可根據連分數理論找到線索，其法如下：

將 0.5306 展成連分數，則得（其算式如右圖）

$$0.5306=\frac{5306}{10000}=\frac{2653}{5000}$$

$$=\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{7+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{33+}\cdots\cdots$$

| | | |
|---|---|---|
| | | 5000 |
| 2653 | 1 | 2653 |
| 2347 | 1 | 2347 |
| 306 | 7 | 2142 |
| 205 | 1 | 205 |
| 101 | 2 | 202 |
| 99 | 33 | 3 |
| 2 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 1 |

由此可直接寫出下表（圈表示月大，請注意同一逗點符號出現之次數與 $a_k$ 間的關係）

①, 2,, ③ 4,, ⑤ 6,, ⑦ 8,, ⑨ 10,, ⑪ 12,, ⑬ 14,, ⑮,,, ⑯ 17,,,,
⑱ 19 ⑳ 21 ㉒ 23 ㉔ 25 ㉖ 27 ㉘ 29 ㉚ ㉛ 32 ㉝ 34,,,,
㉟ 36 ㊲ 38 ㊴ 40 ㊶ 42 ㊸ 44 ㊺ 46 ㊼ 48 ㊾,,,,,

讀者不難看出前 12 個月大小月間隔整齊，六大六小，其次的 12 個月則爲 7 大 5 小等等。我曾拿這個表和今年的月曆對照，發現它上面居然有連續兩個大月，也有連續兩個小月的情形，令我困惑不已，難道說其中另有人爲的因素嗎？讀者不妨驗證一下。

（**註**：漸近分數爲 $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{8}{15}, \frac{9}{17}, \frac{26}{49}, \cdots$）

## §6. 補 語

**1.** 由公式 1，$p_k=a_kp_{k-1}+p_{k-2}$，$q_k=a_kq_{k-1}+q_{k-2}$，當所有的 $a_k$ 都等於 1，而且 $p_0=0$，$q_0=1$ 時，則得 $p_k, q_k$ 的數列如下：

$$\{p_k\}=0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\cdots\cdots$$

$$\{q_k\}=1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\cdots\cdots$$

這就是習稱的 Fibonacci 數列，在整數論中常被提及。一般而言，只要 $a_k$ 恒等於某一定正整數時，都可稱爲 Fibonacci 數列，它們具有類似的性質。

**2.** 我們在 §4. 談到的黃金比 $(-1+\sqrt{5})/2$，及 §5. 例 2 中的 $(\sqrt{2}-1)$，其無窮連分數表法有一特徵，那就是它們有循環節：

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=[0,1,1,1,\cdots],\quad \sqrt{2}-1=[0,2,2,2,\cdots]。$$

事實上有一個定理說，二次方程式的無理根，其連分數表法必爲循環的，反之，具有循環節的連分數，其

收斂值必滿足一個二次方程式。

3. 英國數學家 Brouncker 爵士（1620～1684）曾導出如下連分數:

$$\frac{4}{\pi}=1+\frac{1}{2+}\frac{9}{2+}\frac{25}{2+}\frac{49}{2+}\cdots\cdots$$

十八世紀世界級的數學家尤拉（Euler）也曾導出

$$e-1=1+\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{4+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{6+}\cdots\cdots$$

因而證得 $e$ 爲無理數，後來尤拉在柏林科學院的同事 Lambert（1728-1777）利用他們的結果證明了 $\pi$ 是無理數。近代也有人利用連分數理論來研究超越數並獲得顯着成果的。

4. 王九逵教授 64 年回國在清華大學數學系客座時，曾提出一個問題“如何利用電子計算機製作一個陰曆的萬年曆？”如果所有的數據夠精確，連分數也許就是夢寐以求的好方法吧?!

5. 最後講一點哲學的話。我們都知道實數有小數點表示，而某些函數也可展爲冪級數，利用這些表法，我們得到了不少深遠的結果。如果我們把連分數也想像成一個類似以上的表法，給它一點地位，那就不難理解，爲什麼連分數在歷史上對數學會有如此大巨的貢獻和深遠的影響了。

66年12月19日脫稿於新竹 清華大學