畢達哥拉斯與泰利斯

賴漢卿

本文作者現任教於清華大學數學系

畢達哥拉斯 (Pythagoras)

——數學家，音樂家；公元前 580?～495?

打從國中開始，大家對畢氏定理就不陌生了。這個定理是說：一直角三角形中的斜邊平方等於兩直角邊之平方和。如設三角形 ABC 三個邊爲 a,b,c，其中 c 爲斜邊（如圖一），則其間的關係爲：$a^2+b^2=c^2$。

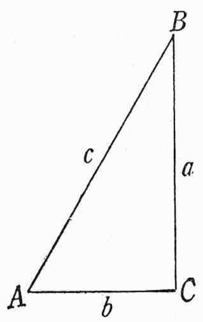


圖 一

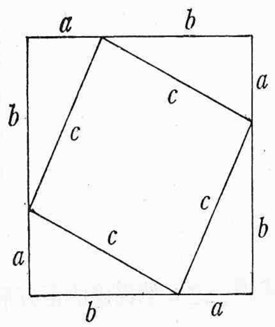


圖 二

這個定理的證明法至少有十幾種，其中最簡單的證法大概可說兼用代數的平方公式而得：如其相同之四個直角三角形，我們很容易看出可接成如圖二之圖形，而形成一正方形，此正方形恰好是由原四個相同之直角三角形及一邊長爲 c 的正方形所合成。當我們知道正方形的面積爲一邊長的平方時，則有下列關係。

$$(a+b)^2=4(\tfrac{1}{2}ab)+c^2$$

此處 $\frac{1}{2}ab$ 表原直角三角形之面積，化簡上式，結果得：

$$a^2+b^2=c^2。$$

畢氏定理就是紀念這一位**音樂家**兼**數學家**畢達哥拉斯而命名的。我國古代早在畢達哥拉斯以前就已有此定理，名曰商高定理，或稱勾股弦定理。現在我們就畢達哥拉斯的生平與數學、音樂有關之事跡做一介紹。

畢達哥拉斯（以下簡稱畢氏）於紀元前 580 年左右出生於希臘殖民地的沙莫斯島 (Samos)，正是希臘黃金時代的初期，也是羅馬帝國建國的時代。在我們東方來說，就是釋迦牟尼與孔子的道學，正流行

的時代。

畢氏早年受敎於泰利斯（Thales）（公元前 624?～546?），他爲要從泰利斯爲師，乃離其家鄉來到泰利斯住的麥爾塔斯（Miletus）地方就學。由泰利斯處畢氏獲益非淺，乃接納泰利斯的建議到埃及留學。在埃及停留了一段相當長的時間。相傳畢氏在此期間也曾訪問其他的地方，不論如何，畢氏留學國外回到其家鄉沙莫斯島，才創辦學校。遺憾的是當時學校辦理得並不太成功，也因此轉移到希臘殖民地之南意大利的庫羅洞（Croton）市重新開辦學校。於此畢氏將其留學期間所學之數學、哲學、自然科學拿來傳授給學生，與學生們共同開倡研究學問的風氣。在當時學校所學得之事，是嚴禁學生再口傳於外的。而且在此學校的弟子們發現的所有結果，都盡歸其師畢氏所有。因此後世所傳，畢氏所發現的事跡，宜以畢氏學派所發明，較爲正確而實在。故當時雖號稱學校，事實上卻具有敎團或學術合作團的特性。此後隨着該校之盛興，畢氏學派們，就逐漸變成能左右政治上之情事，因之反對派對畢氏敎團之反感，也就愈高熾。到後來學校乃遭反對派所燒毀。畢氏在當時雖得倖免於難，但後來據說死在麥塔龐頓（Metapontum）。

下面我們來談談畢氏學派的貢獻。畢氏學派不論在數論、幾何學，甚致於音樂上也可目睹到他所遺留的許多事跡，現在就列舉十數種供大家見賞。

⑴ 數分成奇數與偶數

畢氏學派將奇數自 1 加到 $2n-1$ 得

$$1+3+5+7+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2$$

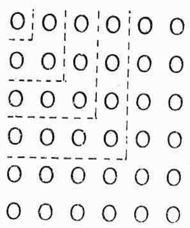


圖 三

之證法就用彈子排成圖三之 n 個爲邊的正方形來證明。

⑵ 三 角 數

數自 1 到 n 的順序相加起來得

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

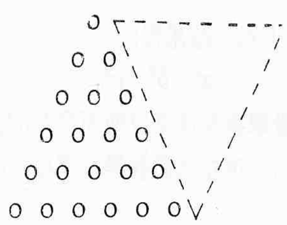


圖 四

是可用圖四之正三角形形式之彈子排成。這樣的數他們叫它爲三角數。

(3) 四角數

某數 n 的平方 n^2，因可用彈子排成正方形，故這種數就稱它爲四角數。

(4) 完全數

某數若除了本身之外，與其他所有因數之和相等時，就稱此數爲完全數。如

$$6 = 1 + 2 + 3 \qquad 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

爲完全數。

又與此相關的，某數若除了本身外之所有因數之和比原某數大時，則稱某數爲過剩數。反之除某數本身外之所有因數之和小於原某數時，則稱某數爲不足數。如

$$12 < 1 + 2 + 3 + 4 + 6, \qquad 8 > 1 + 2 + 4$$

所以 12 爲過剩數，8 爲不足數是也。

(5) 母和數

有兩整數，第一數除其本身外之所有因數之和與第二數相等，且第二數除其本身外之所有因數之和又與第一數相等時，此兩整數互稱爲母和數。如

$$284 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110$$

$$220 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142$$

所以 284 與 220 是互爲母和數。

(6) 畢氏數

如前述畢氏學派證明了直角三角形之斜邊平方等於兩直角邊之平方和，簡單的寫成 $a^2 + b^2 = c^2$。畢氏學派證明了滿足此式之整數組 a, b, c 有無限多存在。(但以同數乘之的結果除外來計算) 像這種整數組，現在都稱爲畢氏數。

有關此事實的證法，他們就依下面方式進行的。先就(1)所述之情形起，有

$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2, \qquad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$$

於是有

$$4^2 + 9 = 5^2, \quad \text{即} \quad 4^2 + 3^2 = 5^2。$$

故 4, 3, 5 是一組畢氏數。又如

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots\cdots + 23 = 12^2, \quad 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots\cdots + 23 + 25 = 13^2$$

於是有

$$12^2 + 25 = 13^2, \quad \text{即} \quad 12^2 + 5^2 = 13^2。$$

故 12, 5, 13 也是一組畢氏數。

同樣方式知

$$24^2 + 49 = 25^2, \quad \text{即} \quad 24^2 + 7^2 = 25^2。$$

所以 24, 7, 25 爲一組畢氏數。依同法可繼續至無限，故畢氏數有無數多組存在。

(7) 等差、等比、調和數列

畢氏學派以三數 a, b, c 滿足

$$a - b = b - c$$

時，稱 a,b,c 爲等差數列；若滿足

$$a:b=b:c$$

時 a,b,c 稱爲等比數列；若滿足

$$(a-b):(b-c)=a:c$$

時，a,b,c 稱爲調和數列。最後一式化簡得

$$bc+ab=2ac$$

於是得

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$$

又因

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$$

故當 a,b,c 成調和級數時，則其倒數 $1/a, 1/b, 1/c$ 成等差級數。

⑻ 無 理 數

在畢氏定理中若正方形的邊長爲 1，其對角線長爲$\sqrt{2}$。（如圖五）他們發現$\sqrt{2}$不能用整數之分數形表示。整數與整數之比所成之數稱爲有理數，而因$\sqrt{2}$不能寫作整數與整數之比，故稱它爲無理數。這個無理數的存在是畢氏學派首先認定的產物。

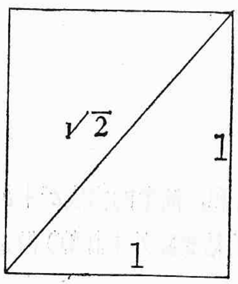


圖 五

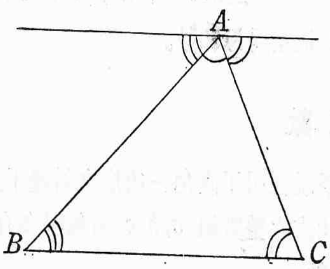


圖 六

⑼ 三角形之內角和

一三角形之內角和等於 2 直角的事實，據說泰利斯也知道，但經過一頂點作對邊之平行線，利用內錯角之性質，將三個內角集於一處，則三內角和成爲兩直角的事實是畢氏學派最初證明的。（如圖六）

⑽ 畢氏定理

本文開始所敍述的直角三角形斜邊的平方等於兩直角邊的平方和。這是畢氏學派最著名之一定理。

⑾ 黃金分割

畢氏學派的人們出了一個讓人思考的問題：即給一線段 AB，欲在 AB 上找到一點 P 使該線段分成

$$AB:AP=AP:PB。$$

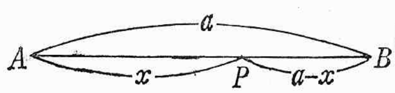


圖 七

這個線段 AB 能如此分割，是最爲藝術美的分割，後世的人乃稱之爲黃金分割 (Golden Section)。今設 AB 的長爲 a，$AP=x$，則 $PB=a-x$。（如圖七）於是上述比例的條件爲

$$a : x = x : a-x,$$
$$x^2=a(a-x),$$

即 $x^2+ax-a^2=0$，其二次方程式之正根爲

$$x=\frac{\sqrt{5}}{2}a-\frac{1}{2}a。$$

此公式利用畢氏定理，可行下面作圖：（如圖八）

先由線段 AB 的 B 端作垂線，於其上取 $BC=a/2$，則由畢氏定理得 $AC=\sqrt{5}\,a/2$；其次在 CA 上取 $CD=a/2$ 的點 D，則

$$AD=\frac{\sqrt{5}}{2}a-\frac{1}{2}a$$

於是在 AB 上取 $AP=AD$ 之點 P，則 P 爲所求之點。

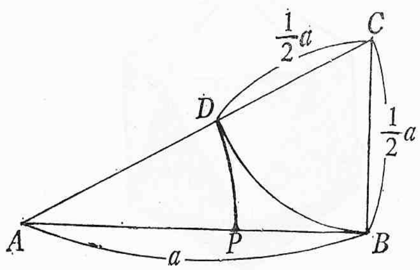


圖 八

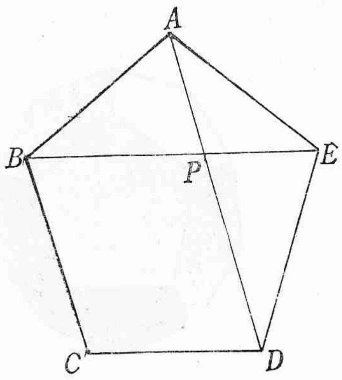


圖 九

(12) 正五角形之作圖

畢氏學派們，在正五角形 $ABCDE$ 的對角線 AD 與 BE 的交點 P，發現該點 P 就是將 BE 作黃金分割的點。（如圖九）

(13) 平面以全等的正多角形舖滿的情形

畢氏學派們證明了平面可用全等的正三角形，正四角形，正六角形舖滿。（如圖十）

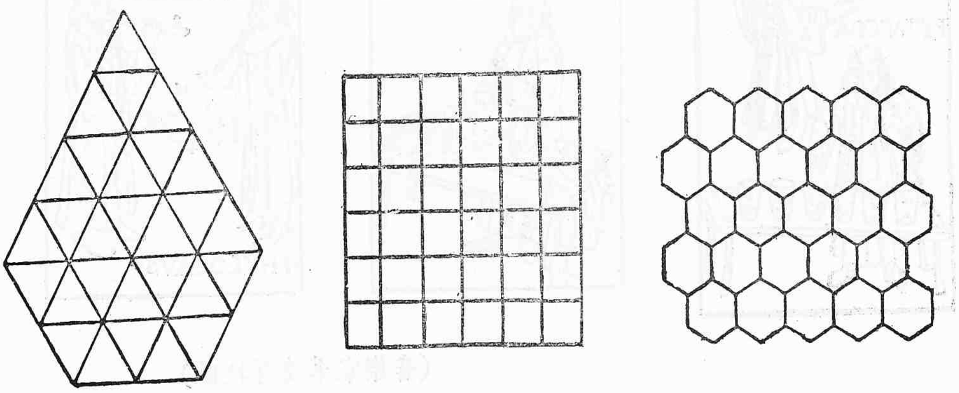
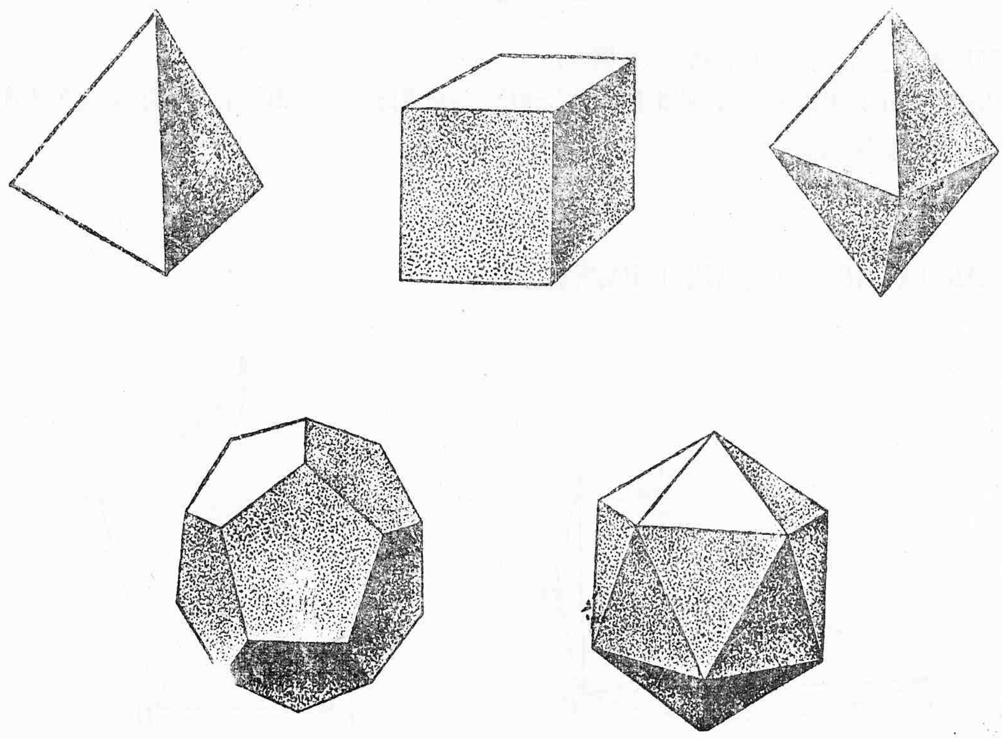


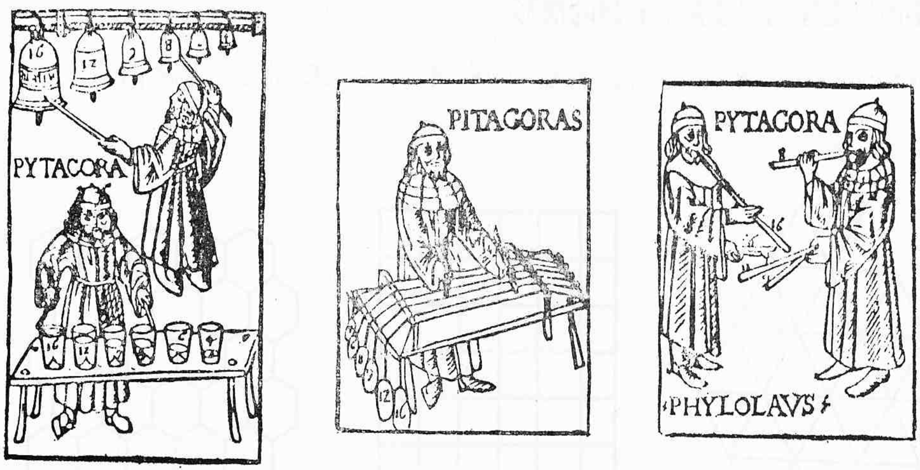
圖 十

⒁ 正多面體

畢氏學派的人們，已經知道正多面體有正四面體，正六面體，正八面體，正 12 面體，正 20 面體等五種類。



⒂ 畢達哥拉斯以一絃長之 2/3，得比原長高 5 度之音，絃長之 1/2 時，得比原長高 8 度之音。這就是現在所稱畢氏音階，這種音階是畢達哥拉斯想出的傑作。

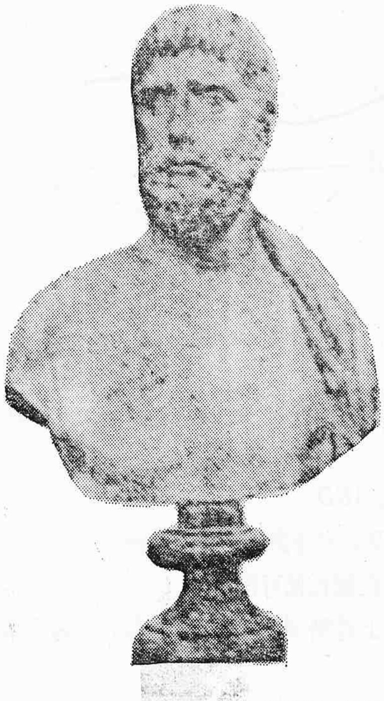


（音樂家畢達哥拉斯）

泰利斯 (Thales)

——天文學家，數學家；公元前 624?～546?

泰利斯生於希臘麥爾塔斯，青少年時代他過的是商人的生活，曾經南渡埃及做生意，在留居埃及期間，由埃及神官處獲得許多數學與天文的知識。不久，其知識就遠超過神官了。泰利斯以此知識用來測量金字塔的影長，得出金字塔的高度。在當時曾驚動國王阿馬西斯 (Amasis) 而著名。他在埃及的時候，對於數學、天文學均極感興趣。回到希臘後仍繼續此研究，隨着成爲世界上最早的大數學家。據傳說他曾預言公元前 585 年5月 28 日有日蝕，他說：「5月 28 日雖在晝間，陽光卻會消失，而突然變成黑夜，且天空將有星星閃爍。」當時沒人相信他的話，等到5月 28 日，事實證明了他預言的正確；當日太陽懸空，由逐漸起缺口，而到其光全失。人們才發現泰利斯是對天文學知識最豐富的一個人。



還有一故事說，當時正有兩國在交戰，戰爭正進行得如火如荼的時候，依泰利斯的預言，太陽的光輝，在白晝間突然消失，隨着有人說：「我們因戰爭在持續，大概引起神發怒了，宜及早停戰向神陪罪才行」，因而鳴金收兵言和，訂定和平條約。

有一次的晚上，泰利斯在天晴月當空之際，遙望天際閃爍的星星，渾然不知自己，而掉進水溝裏去。此時有位老婦人說：「泰利斯先生自己都不知算其脚步，爲什麼會知道那麼遙遠的星球呢？」

泰利斯在年輕行商的時候，最著名的一則小故事是這樣的：有人訂購食鹽，泰利斯每次都將食鹽裝載在一隻驢背上送去，途中需經過一條小河，有一天當他們行將渡小河之際，不意此驢脚被石頭絆了脚，而跌入水中，食鹽也因而有一大半流失。泰利斯雖受損失，但驢子卻覺得比絆倒前之行李輕得多而暗自高興，這隻驢子體會到此法還管用，乃每次一到此小河，就重施故技，以期減輕它的負荷，因此泰利斯乃心生一計，以海棉置於驢背上，等驢子故意摔跤時，因海棉吸水，負荷就比原來帶的食鹽更重了，此後驢子就不敢貿然地再故技重施了。

泰利斯發見不少幾何的定理。如下列

(1) 對頂角相等。

(2) 等腰三角形的兩底角相等。

(3) 兩三角形若有一內角及夾此角之兩邊分別對應相等，則兩三角形全等。

(4) 兩三角形若有二內角及此兩角所夾之一邊分別對應相等時，則兩三角形全等。

(5) 在圓上一點，連直徑之兩端所成之二弦互相垂直。

泰利斯利用定理(3)，測量兩點間，隔有山或池塘而無法直接量的距離。（如圖十一）他的方法是由 A, B 望一可通的一點 O，連 AO 並延長至 C 使 $AO=OC$，其次連 BO 並延長至 D 使 $BO=OD$。此時兩三角形 AOB 與 COD 中 $\angle AOB=\angle COD$（對頂角，定理(1)），且作圖 $AO=OC$，$BO=OD$，故 $\triangle AOB$ 與 $\triangle COD$ 全等，而得實測 CD 便知 AB 之長了。

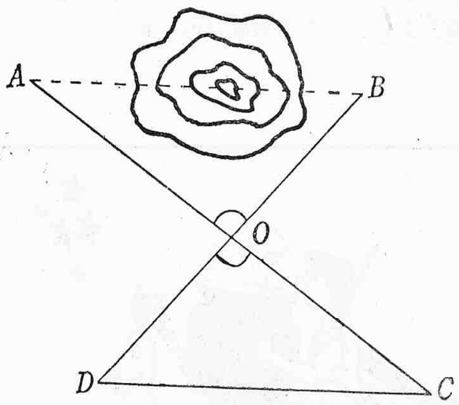


圖 十一

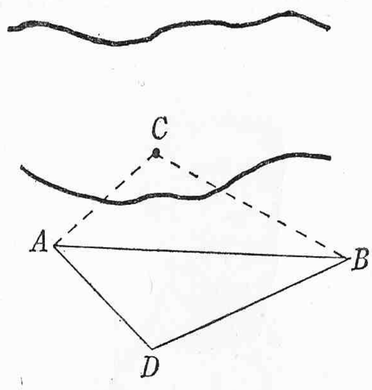


圖 十二

泰利斯用定理(4)，從岸上一點 A 欲測河中一船 C 的位置時，他就先取岸上另一點 B，並由 A, B 觀測船 C 所得的角 $\angle BAC$ 與 $\angle ABC$，再於岸上作

$$\angle BAC=\angle BAD, \quad \angle ABC=\angle ABD$$

來決定點 D。（如圖十二）此時 $\triangle CAB$ 與 $\triangle DAB$ 有兩內角及其夾邊對應相等，故兩三角形全等，於是得 $AC=AD$。但 AD 在岸上可實測，故由點 A 望船 C 位置的距離也就可得了。

又利用定理(5)可由直線 l 上一點 A 引一直線與 l 垂直，事實上過點 A, B 可任作一圓，連直徑 BC 之另一端 C 與點 A 所得之直線就是與 l 垂直之線。（如圖十三）

定理(5)雖說是泰利斯發明，但也有人認爲是畢達哥拉斯所發現。

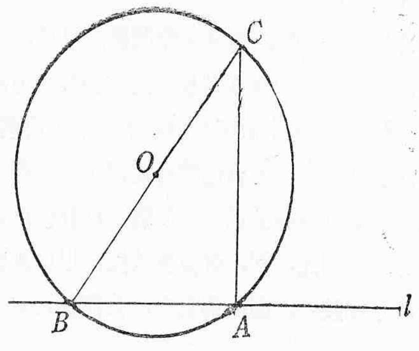


圖 十三