數 學 的 本 質

李國偉

作者現任職於本所，本文即爲作者於去年 12 月 11 日在臺中市省立圖書館主持「大衆科學講座」之講稿。

第一節：現代數學在方法上的特徵

現代數學在方法上最明顯的特色是它的演繹性，就是由基本定義與公理出發，經邏輯推論到所有定理的發展方式。採取這種方法並非偶然，而是有內在的需求。我們要把一套概念講清楚，必須用比較簡單的概念來解釋，但是這些概念又需要再加澄清，如此繼續下去，如果不曾周而復始得到一個什麼也說不清的惡性循環，便會無限延伸下去，達到一個不可知的前端。人類尋求知識的目的在組織自己對外在的認識，而去了解事物的表象與本質，因此在沒有墜入不可知的深淵前，必定會在某些我們直覺已認爲意義相當清晰的概念處停住。我們把這些概念作爲理論發展的基礎，不再去解釋它們的意義，也就是說暫時拋開它們的具體內容。這些概念我們稱爲**基礎概念**。從此以後在我們理論發展的過程中，一切的概念都要由這些基礎概念定義出，否則便不能採用。基礎概念間如果彼此毫無關聯，顯然無法用來建立起一套有意義的理論，那麼在聯繫起基礎概念的敍述中，我們又必須挑出一些在認識上感覺最明白的作爲出發點，這些敍述我們稱爲**公理**。自此我們便用邏輯的方法，由基礎概念與公理演繹出所有的定理，而一切不能由這個程序推得的敍述，我們便不認爲它是這套理論裏正確的命題。現代數學中各門理論，基本上都是由這個演繹方法組織起的。不過比較複雜的理論，除了自己的基礎概念及公理外，常常要引用別的理論的結果。所以嚴格說起來，那些理論的基礎概念及公理也必須包括進來。但是爲表達的簡明，我們通常不這樣全套寫出。譬如大部分的理論都引用集合論的概念與定理，而一切數學理論系統必須立足於邏輯系統上，否則便無法作推論了。

現在我們來看一個極簡單的演繹系統。

倘若我們想了解線段全等的一般性質，我們可用兩個基礎概念：S（所有線段的集合），$\equiv$（全等關係）。我們有兩條公理：

公理一： 對於 S 中任何元素 x 而言，$x\equiv x$。

公理二： 對於 S 中任何元素 x,y,z 而言，若 $x\equiv y$ 且 $y\equiv z$，則 $z\equiv x$。

這套小理論當然已引用了邏輯與集合論中的概念，所以嚴格說起來已相當繁雜了。現在我們來證明一個小定理：

定理： 對 S 中任何元素 x,y 而言，若 $x\equiv y$ 則 $y\equiv x$。

證明： 若令公理二中的 z 爲 y，便知 $x\equiv y$ 且 $y\equiv y$，則 $y\equiv x$。但是公理一告訴我們 $y\equiv y$，已有的假設告訴我們 $x\equiv y$，故可證得 $y\equiv x$。

由上面的簡單證明可看出，事實上 S 是不是所有線段的集合，「$\equiv$」是不是線段全等的關係並不要

緊。對於任意給的集合S及其上的二元關係「$\equiv$」，只要它們滿足公理一、二，則定理自然成立。例如我們可令S爲所有自然數的集合，「$\equiv$」是同餘於某個模數的關係。

前面說過在演繹系統中，基礎概念原來的具體內容已抛棄，所以我們可用其他的具體事物來解釋它，任何這種解釋如果又滿足所有公理，則我們說這套解釋構成原來理論的一個模型。上面的觀察告訴我們一旦定理得證，則此定理在任何模型中也成立，我們就不需要在各個具體的系統中重複同樣的證明了。

總結來說，演繹方法是組織起數學知識的最好方法。因爲他可以極大程度的消去我們認識上的不清與錯誤，如果有懷疑的餘地，也都回歸到對基礎概念及公理的懷疑。而且定理函蓋了種種的具體特例，精簡與組織了我們對外在世界的認識。〔註〕

第二節：現代數學在內容上的特徵

現代數學因內在的需求而採取了演繹方法，於是演繹方法的特性也反映了數學在內容上的特色:

一、抽象性: 數學的抽象性有異於其它科學的抽象性，可分三點說明:

1. 數學基本上處理物體間量的關係以及空間的樣式，而與物體實際的物理性質無關。例如 1, 2, 3……都是抽象的數，並不代表一個人、二頭牛、三把刀等等。幾何裏的直線也是一種抽象概念，實際物體的稜線嚴格說都是不平直的，至少，當觀察進入原子範圍時是如此。

2. 抽象的程度是不斷增進的，因此最後抽象的結果遠較一般科學更爲遠離日常生活中的具體經驗。

3. 數學只在抽象的概念與它們間的關係中發展。正如前面說明演繹方法時提過，一切我們所接受的數學事實，必須是由基礎概念、公理、推論而來。數學的論斷不能由作實驗中得到，就是量上一千萬個三角形，也不能因而斷言所有三角形三內角和是一百八十度。

二、嚴謹與精確性: 自然科學雖然也有相當的嚴謹與精確性，但是它的理論通常都有一定的適用範圍。例如物體在遠低於光速的速度運動時，它的質量可看爲常數，但是一旦加速到近於光速時，質量便有顯著的增加，這些是可由實驗證明的。也就是說牛頓力學雖然自成一個系統，但它的正確性只能達到某個特定的程度，再深入必須改用相對論力學。如果將來有一天另一種力學再改良相對論力學，我們也不會感覺異外。然而數學的基本眞理一旦建立便不再動搖，因爲演繹法的每一步推理都在嚴格的邏輯條件管制下，而又不能引用不曾從基礎概念定義來的概念，所以數學的系統脈絡分明，結論精確不移。唯一還可以有懷疑的地方，便是基礎概念與公理。但是我們也說過，人要不落入不可知的深淵，必須接受一些自明的眞理，否則便無知識可言，因此數學的基礎是穩固的。

三、廣泛的應用性: 數學的應用又分三個層面:

1. 日常的計數: 包括了數量與空間的度量，例如五十塊能買幾斤小白菜？三十坪的公寓要賣多少萬? 雖然它們所用的數學法則極爲簡單，但是我們不要忘了，在遠古時這些簡單法則都經過漫長而艱辛的步驟得到的。

2. 工技的運算: 現代工技日趨精密，再加上電算技術的進步，使得數據的計算更加繁雜更需精確。譬如在核子工程的設計上，有時小數點後十二位的誤差，都會導致荒謬的結論。在這種應用上，數學成爲一種工具，不亞於築橋的水泥，造船的鋼鐵，只不過它是一種無形的工具罷了。

3. 理論的架構: 在理論科學方面，大量實驗的資料必須整理、簡化、歸納成一般性的原則，以便人了解與掌握物的本性，才有可能擴充應用的幅面，增加控制自然的本領。在敍述一般性原理時，最精確的語言便是數學的語言。在這種應用上，數學成爲一切理論知識的語言部分，沒有它我們的思想無法組織

〔註〕本節所強調的是把已有數學知識組識起的方法，如果是探求與創發的數學概念時，歸納法便占有絕對的重要性。這個時候，數學處理它研究的對象，也要用嘗試、猜測等手段，與其他自然科學方法相當類似。限於篇幅本文未對歸納研究法深入討論，但希望以後各節中的闡述，能加強讀者對抽象與現實關聯的認識，不致落入數學的形式主義。

起，也無法彼此溝通。

數學應用最令人驚嘆的是，經常表面上看來毫無關聯的事，使用適當的數學工具加以分析，便發現了它們內在深刻的關係。

第三節：有關數學本質的基本問題

從方法上，從內容上，我們對現代數學的特徵已有了基本的掌握，但是事物的表象只反映了事物的本質，而非本質的自身。於是面對著數學的演繹系統，它的抽象性、嚴密性、應用性，我們還有幾個更基本的問題有待深入了解。

1. 數學的概念既然是抽象的，它們到底反映了什麼？也就是數學眞正研究的對象是什麼？

2. 數學的基本觀念極淺顯，而它的抽象推論結果又不容人懷疑，這種權威性從何而來？也就是數學方法的基礎是什麼？

3. 爲什麼抽象的數學卻有這麼多具體的應用，這種看似矛盾的現象如何解釋？

4. 這樣一種抽象的東西，爲什麼從古到今不斷發展愈來愈興盛？也就是數學發展的基礎是什麼？

現代數學的內容愈來愈豐富，因此要了解與掌握數學的本質，我們比古代人更加迫切需要解答以上的問題。本世紀以來很多出色的數學家都對這些問題發表過意見，提過許許多多的解答。在歐美，基本上滙集成所謂邏輯主義，形式主義，直觀主義三種鮮明的主張，以及形形色色的騎牆派。經過半世紀多的爭論，我們現在綜合各家的長短，發現邏輯學派想把人的抽象認識回歸到原始的邏輯概念，但是無法說淸邏輯觀念的本原。形式學派避開本原的問題，認爲數學純粹是符號的遊戲，因而不能解釋數學的意義及應用性。直觀學派想把數學中過分抽象推論法，換成比較不太抽象的法則，但因方法的局限性又陷入另一個泥淖，始終無法由他們的系統建立起適於應用的數學系統。總而言之，如果我們片斷的割離某些數學的特性，把它孤立起來作爲整個數學的發展點或基礎，便遲早會鑽進死犄角，建立不起活潑生動妙用無窮的數學理論。因此要了解數學的本質，必須捨棄靜觀的方法，而從人類認識的歷史發展上求動態的解答。也就是說數學的眞理性是無法由任何空洞的理論來保險的，而必須從人類生存的歷史經驗中獲得證實。這一點我們將以算術學的發展爲例，加以闡述。

第四節：算術學發展史鳥瞰

一、數的概念：當一羣物體呈現在眼前時，我們所覺察的是物的整體，如果要淸晰的分開它的各種屬性及相互的關係，必須經過意識的加意整理。譬如我們不懂音樂的人聽到一首交響曲只是整體的感覺美與不美，但是一位音樂家聽到了，馬上可以察覺到曲子的調性、主題、配樂等等細節。因此任何概念成立的最原始狀態只是籠籠統統的感覺事物的存在。第二步就會拿具體的事物來排比。好像還沒有完全抽象出「黑」這個概念時，人會說：「像隻烏鴉」「像塊炭」等。再進一步，概念已與事物結合著出現，但是未曾獨立出來，例如波羅的海小國立陶宛語言中，有各種形容詞用來說「灰鴨」「灰馬」，但是就是沒有單獨的「灰」字。認識到最高的階段人就會有單獨的抽象的概念了。

我們目前只討論自然數概念的演化，這個過程也經歷了上述的各階段。

據一位十八世紀的傳教士報導，南美的 Abipone 印地安人的數目只有一，二，三，但他們遷移時，大羣大羣的狗，就是少了一隻，他們也會立刻發覺。這還是認識數的第一階段。在第二階段中，最常見的是許多原始文化用代表「手」的字來代表「五」。第三階段明顯的例子有飛支羣島人說十條船 bola，十個椰子 koro，一千個椰子 saloro，數與名詞整個融合在一起，而不曾形成完整的數列。在比較發達的文化中，代表數的字有時和其他形容詞一樣有語尾變化，例如：「二」字：

希臘語	拉丁語	哥德語
dŷo	duo, -ae, -o	twai, twōs, twa
dyoîn	duorum, -arum	twaddje
dyoîn	duobus, -abus	twaip
dýo	duos, -as, -o	twas, twōs, twa

到了第四階段當然我們就有了 1, 2, 3, ……這一系列的抽象數了。

從第三階段到第四階段其實是很困難的一步。因爲數雖然是一羣物體的屬性，但卻與其它屬性本質不同。例如「五頭牛」這個集合有「五」這個屬性，但是如果我們拿出一頭牛，它就沒有「五」這個屬性。又如果我們把「五頭牛」這個集合，看成一個整體，在這個整體的概念中「五」也消失了。那麼抽象的「五」到底從何而來呢？事實上「五」這個屬性是一切與我們一隻手上指頭能建立起一一對應的集合的通性。任何不能有這種一一對應的集合就不具有「五」這個屬性。所以要確切掌握一個抽象數的概念，人必須作過無數次的比較，也就是必須累積無數世代的歷史經驗。

二、數的關係及記數法：當概念脫離具體的物體獨立出來時，它已經沒有任何實質內容。我們所以還能了解與掌握它，是因爲我們知道控制它的法則，以及概念與概念間的關聯。完全與別的概念不發生關係的獨立抽象概念，只是很無聊的遊戲罷了。因此當數的概念逐漸產生時，數與數之間的運算關係也逐漸明瞭。這類關係正反映了具體物件的加、減、乘、除的運算。在某些語言中，數字本身的名字也提供了數與運算並生的歷史。例如法文中 80 是 quatre-vingts（四個二十）。更原始的某些南太平洋島民記數法是 urapun, okasa, okasa urapun, okasa okasa, okasa okasa urapun, ……。

如果數與運算的觀念一直局限在小數目中，算術學還是無法成立的。人的社會隨著歷史的發展愈來愈需要運算較大的數目，政府需要稅收，牧人需要計數牲口，買賣需要計價等等，例子不勝枚舉。首先感到壓力的便是記數法必須改良。數既然是抽象的概念，如果沒有具體的名字與符號代表它，便難以運用。小的數目我們還可以用具體的同數物件來想像，一旦數目大了譬如 15674，就很難用一堆小石子來想像它的確切大小了。好的記數法可以使我們的心智脫離具體物件的羈絆，向更高的數的領域前進。不僅如此，好的記數法能方便運算，促進算術的發達。例如羅馬人的記數便很笨拙，372 寫作 CCCLXXII，會用這種符號算出 372 的平方恐怕都很天才了，所以羅馬人雖然建立過龐大強盛的帝國，但在數學的貢獻上卻近乎空白。在社會環境的需求下，人類最後總算發展出現在所謂的阿拉伯數字系統。這種記數法有兩大特色：第一它是十進位的，第二它是位置法的。第一特色顯然和人有十指有關，但是到底幾進位並沒有根本的不同。比較重要的是第二個特點。所謂位置法就是說雖然數字只有 0, 1, 2, ……, 9 十個，但因它的位置不同，代表的意義也不同。例如 375 中，3 代表百的數目，7 代表十的數目。這種記法使得有缺位時必須用一個符號代替空掉的位置，否則 3　2 與 32 的意義會發生混淆。這種代替因而刺激了人逐漸認識了數目 0。

綜合這節所說我們可知，人腦反映具體事物的運算發展了抽象的數與其運算，但是抽象的概念又必須藉具像的符號來固定住，而這種具體的符號又刺激了抽象的成長與深入，終於使人的算術知識豐富起來。

三、抽象算術學的誕生：到此爲止人雖然累積了大量各別算術經驗，但仍然沒有抽象的一般的算術學。埃及，巴比倫，以及我國的數學古典中，已有許多具體的算術問題和解法，然而控制一般數的普遍規律還沒有說淸楚。從世世代代運算累積的經驗中，人自然而然意識到某些規律的存在。例如把一組數加在一起，加的次序不會影響到最後的總和。另一方面人由一個個接續下的單獨數，意識到每次加 1 的構數法則，而產生了無限數列的概念。於是關於個別數的性質就有可能推廣到關於一般數的性質。抽象的算術學便在這個由個別達到一般的步驟中誕生了。西元前三世紀，希臘人已成功的邁了這最重要的一步，歐幾里德「原本」中證明質數無窮多是最有名的例子。證明關於任意數的普遍性定理，事實上已經

包括了無窮多個特例。它在內容上是豐富多了。從此算術學由處理給定的各別的數量關係，進昇到處理一切的數量關係。

第五節：數學的本質

算術學是數學中歷史最悠久的一支，從以上的發展簡史中，我們可看出它的基本性質，它們也就充分代表了一般數學的基本性質。現在我們可以嘗試回答第三節中提出的問題了。

一、數學的研究對象是什麼? 數學的概念不是無中生有故意造出來的，也不是人類天生就有的，而是客觀世界的活動不斷在人腦留下痕跡，人腦逐步主動反映外在具體事物，分析並推廣無數量的具體經驗，經過漫長歲月發展出來的。然後人因爲日漸熟練的運用已經有的抽象概念，便再一步推廣與抽象，得到更加深刻的觀念。 如此繼續不斷， 發達到今天高深的各種數學部門。 現在看起來數學裏五花八門的名堂好像與現實世界無關，但它們的本原都是由反映現象世界而來。 數學絕非空洞的符號遊戲，它的最終研究對象就是客觀的世界。

二、數學方法的基礎是什麼? 從歷史的經驗中，我們可知數學與邏輯的法則不是任意規定的，它們反映了無數代累積的運算具體事物，思考具體關係的經驗。因此它們的意義在人的心智上變得十分明確清晰而有權威性。並且因爲客觀世界的均勻穩定性，使得這些規則不會有異動 。於是具體與實質世界的眞理性，也就是數學方法的基礎。

三、數學爲什麼有那麼廣泛的應用性? 因爲數學不僅抽象出個別事物的概念，並且進一步抽象出一般概念的公通性質。這類性質是不受物體普通物理性質所局限的，因此它有更普遍的眞理性。只要這一系列的抽象不是從空洞的事物出發， 它的抽象性就必然保證了它的廣泛應用性。 數學抽象的基礎是客觀世界的量與形，因此數學的作用雖然不像螺絲刀、老虎鉗這一類工具，但是一旦涉及事物間的深層關聯，自然要用到數學。

四、數學繼續發展的基礎是什麼呢? 從人類歷史的經驗中也可找到解答。 社會生活的實際需求便是數學發達的基本動力。 這並不是說所有數學都是爲解答已有的實際問題所產生，有時候抽象的數學概念會跑得快一點，暫時不好應用，等到工技夠發達後才有用處。譬如複數原來被認爲是虛幻的數，後來卻成爲電學理論最基礎的磐石。然而無論如何在解決實際問題的過程中，人發展了新的技巧，新的概念，提供了一個比較成熟比較更完善的知識背景， 使得人能解決一些暫時看來與實際問題無關，純粹數學興趣的問題。總之，因爲人類社會生活的不斷繁雜，人類控制自然的能力日漸加強，人類對客觀世界的認識繼續深入，新的數學問題才會層出不窮，提供了更豐富的數學素材。