

西方文化中的數學

石厚高

克萊因 (M. Kline) 的名著 *Mathematics in Western Culture* 於1953年在美出版後，多次再版，深受西方文化界、數學界歡迎。九章出版社於民國84年9月推出中譯本，譯者張祖貴。譯作文字順暢、嚴謹，讀者也許會問，你看過原文嗎？我雖然沒有看過原文，我可以感受到它的嚴謹，譯者喜歡它所以十分用心。

數學對西方文化的影響是多方面的、深入各學門，數學基礎穩固；所以在十九世紀數學家人才輩出，數學成就光芒萬丈也就毫不足怪了。我要說明這是我的想法，我對中國古代數學史只有零零星星讀過一些文章，那是斷簡殘篇。憑感覺我國的數學發展雖然「不絕如縷」，可就沒有像西方那種表現「鼓動風潮、造成時勢」，當然「愛國數學家」不會作如是觀。

我看本書時邊看邊畫重點，重點有我覺得有趣部分、未之有聞部分與真知卓見等，看完又把畫線部分重讀一遍，深覺本書內容豐富，要作一介紹實感一部二十四史從頭說，實在是無從說起。譯者在卷首的「論莫里斯·克萊因的數學哲學思想」我讀了又讀十分喜歡，

這是本書內容最好的介紹。本文一萬七、八千字是篇力作，譯者不但翻譯用心，這篇介紹也一樣的投入。

「論」文從四方面介紹克萊因巨著，它們是 (1) 作為數學哲學出發點的數學史觀，(2) 數學與物理世界—數學本體論，(3) 喪失了確定性—數學真理論，(4) 數學：西方文化的重要組成部分。譯者說「克萊因以自己獨特的數學研究感受，對數學歷史的深入研究……在學界產生了深遠影響。」又說「讀完厚達500頁的「西方文化中的數學」時，人們就會情不自禁的感嘆，我們對數學了解得太少了，至少從文化角度是如此。在這本書中，克萊因按照歷史順序，從古埃及、古希臘開始詳盡的論述了數學與文化發展的關係，直到20世紀數學與社會文化的相互聯繫，其中不乏獨到的分析、精闢的見解。「科學的美國人」評價說：“這是一部激動人心的、使人深思的著作。”」。

「論」文也介紹了作者的另外三種著作：「古今數學思想」(*Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, 1972) 克萊因代表作，對數學哲學進行了深入研究，從多方面、多層次提出了許多新穎、獨特的

觀點。「數學與物理世界」(Mathematics and the Physical World, 1959) 展示數學在研究自然時的作用，從中人們可以看到數學是怎樣成為以及為什麼會成為科學理論核心。「數學與對知識的探索」(Mathematics and the Search for Knowledge, 1985)，本書可以說是代表了他對數學作用的最終定型的觀點，利用數學去探索知識是一個永無止境的活動。

看完了「論」文可以接著看第28章「數學：方法與藝術」，本章把克萊因思想作了提綱，其中有一段談純數學與應用數學間的區別的文字饒有趣味，我把它寫在下面：

克萊因提到羅素說過的一段看似無理、實則充滿睿智的話「數學可以定義為這樣一門學科，我們不知道在其中我們說的是什麼，也不知道我們說的是否正確」，克萊因的詮釋「當然，許多人不需要羅素這一番提示，就已經認識到了這一點。然而，他們可能不知道，這樣理解數學是何等的正確，而且也無法對這種正確性加以證明。數學家們不知道自己所說的是什麼，因為純數學與實際意義無關；數學家們從不知道他們所說的是否正確，因為作為一位數學家，他們從不費心去證實一個定理是否與物質世界相符，對於這些數學定理，我們只能問：它們是否是通過正確的推理得來的。」

譯者解說也很有可讀性「長期以來，我們總認為羅素的這段話是在宣揚不可知論，實際上是我們自己沒能理解這段話的背景，同時也由於沒有從數學喪失了真理性這一角度來認識這句話的實質。」

這本書讓我受用非常，所以把它推薦給大家。我教過三年初中，那時有學生問能不能看一本數學，就學會所有的數學？有這樣的數學書嗎？雖然沒有，看了本書，可就是對數學發展的全貌 (whole picture) 有整體認識，看看它的目錄

1. 導論：數學與文化——是與非的觀念
2. 數學中的經驗法則
3. 數學精神的誕生
4. 歐幾里德「幾何原本」
5. 天體測量
6. 自然獲得了理性
7. 停滯時期
8. 數學精神的復興
9. 世界的和諧
10. 繪畫與透視
11. 從藝術中誕生的科學：射影幾何
12. 方法論
13. 研究自然的定量方法
14. 宇宙定律的演繹推理
15. 領悟飛逝的瞬間：微積分
16. 牛頓的影響：科學與哲學
17. 牛頓的影響：宗教
18. 牛頓的影響：文學和美學
19. G 大調的正弦函數
20. 把握以太波
21. 關於人的本性的科學
22. 鮮為人知的數學理論：應用於人類研究中的統計方法
23. 預測與概率
24. 無序的宇宙：用統計觀點看世界
25. 無窮的悖論

26. 新幾何, 新世界

27. 相對論

28. 數學: 方法與藝術

就很明白了。第22、23、24三章統計與機率共55頁(佔全書482頁的11%), 篇幅很大是容易了解的, 它是近代產物材料多。歷史也有這種現象, 中國近代史卷帙浩繁, 至今仍未整理完成。

看了第11章「從藝術中誕生的科學: 射影幾何」這才了解人所觸覺到的世界與所看到的世界有區別, 它是兩種幾何學: 觸覺幾何學與視覺幾何學; 歐氏幾何是前者, 後者由藝術家吉拉德·德札格(Girard Desargues)由透視學研究中成了射影幾何開山祖師。他說「我坦率的承認, 我絕不對物理或幾何的學習或研究抱有興趣, 除非能通過它獲得有助於目前需要的某種知識……我看到好大一部份藝術根植於幾何……」大家都能理解。後來他寫了一本論透視的小冊子, 幾乎沒有引起注意。和他同時代的拉伊爾(Philippe de la Hire)把小冊子作了副本, 200年之後才引起了後人注意。(“根植”若作“植根”較妥, 本文作者)

全章主要在探討投影與截景的概念, 畫家有了它從而構造了滿意的光學透視體系; 數學家由此而得全新的研究領域—射影幾何; 地圖繪製者設計了全新的地圖投影。射影幾何一度打入冷宮, 19世紀又再度興旺起來, 成了多種新幾何學之母。正由於繪畫豐富了射影幾何的內涵, 使德札格創造的這門「誕生於藝術的科學」成了今天最美的數學分支之一。

第12章「方法論」娓娓道來二位大師的家居生活, 還有他們發展坐標幾何的心路歷

程。對笛卡爾(Descartes, Rene)來說, 數學是用來解決哲學、科學問題以及為把握自然服務; 對費馬(Fermat, Pierre)來說, 是數學問題展示了美妙、和諧和沉思的喜悅。笛卡爾建構尋找真理的規則, 一是拋棄感覺的證明, 二是把大問題分解成一些小的難點, 三是採取由簡到繁的方法, 四是列舉並審查推理的步驟, 以真正作到徹底、毫無遺漏。

坐標幾何未能如笛卡爾之願, 解決全部的幾何問題, 可就此比他想像中要解決的多得多。費馬對微積分的貢獻是第一流的, 雖然說某些工作被牛頓、萊布尼茨的光輝蓋過了, 他和帕斯卡(Pascal Blaise)共同創造概率的數學理論, 又獨自創立了數學重要分支之一的數論。

第15章「領悟飛逝的瞬間: 微積分」談到牛頓與萊布尼茨之爭, 兩國學界都仰慕自己的學者, 以致「在牛頓、萊布尼茨去世後的長達百餘年時間裡, 英國數學家和歐洲大陸的數學家們停止了思想和通信聯繫」, 又說萊布尼茨較為寬厚, 他說「如果我們把有史以來直到牛頓所生活的時代作為一個整體, 來分析數學的發展, 那麼可以說, 其中一半以上較好的成果都屬於英國人。」

克萊因指出「牛頓、萊布尼茨的微積分, 與現代被認為是使人滿意的微積分, 這二者之間的空白和鴻溝, 也是由數百名偉大的數學家和名不見經傳的數學家的工作才填補起來的。經過了大約150年, 才產生出一門邏輯上完備的微積分。」又說「與一般的看法相反, 微積分並不是所謂的“高等數學”的頂峰。事實上, 它僅僅是其開始。」。前者教師與學子都應該知道, 後者學子必須知道。

本書對牛頓著墨很多，全書 28 章，專論牛頓的就有三章，他們是第 16、17 與 18 章，分論牛頓對科學與哲學、宗教、文學與美學的影響；以頁數論在全書 482 頁裡這三章就佔了 54 頁 (11%)，若以書後所附「英漢人名與名詞對照表」所列牛頓出現頁數計算，竟佔 85 頁 (18%)。原來牛頓在西方文化與科學中的地位是這樣的崇高。探索頻道「科學的足跡」共 76 集，這個節目作得好，對牛頓十分推崇，主持人 Dr. David L. Goodstein 表現傑出。第二集談牛頓饒有趣味，一般科學書籍甚是少見。牛頓 85 歲臨死之前宣稱，此生最大的成就是終生保有處子之身 (He claimed the greatest triumph was to die a virgin)，一直以爲 virgin 是處女，原來處男也是 virgin。既然窮畢生之力都在作學問，完全沒有俗事困擾，成就當然無人能及。這個「對照表」作得不容易，它是在中文打字排版完成之後，參照頁數才能作業，當然花了很多時間。(Leibniz 本書作萊... 茨，台灣作... 茲)。

第二集也提到牛頓指控萊布尼茲抄襲，萊布尼茲異常憤怒要求舉行正式公聽會，牛頓身為皇家學會的主席，萊布尼茲此舉十分不智，甚至在申訴之前他已被判有罪。這位樂觀的學者以苦澀的心情結束了他的事業。聽到這個德國人的死訊時，牛頓得意洋洋的說，我粉碎了萊布尼茲的心。

諷刺的是雖然牛頓的曲線流數理論主導了英國數百年之久，萊布尼茲的學說仍略勝一籌，他的積分符號傳達了精巧的概念，而且成了全球通用的數學語言。始於古希臘的一場微積分競賽，最後卻打成爭議性的平手，其

實這項榮耀二人平分仍有餘；榮耀雖未被平分，但是獎品還是被平分了，不是被牛頓和萊布尼茲所平分，而是分給世世代代的人類。萊布尼茲和牛頓的洞察力，發現了微分和積分間的關聯，發展出一項工具，這在數學的領域中是無價的，多虧了萊布尼茲和牛頓，微積分成了科學的共同語言。

Goodstein 說：牛頓和萊布尼茲間的爭執，不是他一生中與人恰有一次的衝突，牛頓不是個好相處的人，他的名言之一是「如果我比別人看得遠，這是因為我站在巨人的肩膀上」，但他也把不少人踩在腳下。

這一章教師與學子都應該看看，尤其是 237 開始的五頁。教師看了這一章應該不會對學子要求嚴格，學子看了更增加學習的興趣與意願。微積分的發展與成長成熟經歷了那麼漫長的歲月，所以 ϵ, ξ 與 infinitesimals 實在不宜對初學者多作強調，有點概念就成了。

第 26 章「新幾何，新世界」與 27 章「相對論」要當作一章來讀，前者談非歐幾何而後者談相對論。歐氏幾何自推出以來，雖然受到推崇，並且直到 1800 年時，受過良好教育人士願意對著歐幾里得定理發誓，而不願意對著「聖經」發誓。這段話有人覺得不可思議，其實在筆者讀中學時代 (41-47) 直至民國五十四年左右，那時很多學子是為平面幾何著迷、瘋狂的，很能瞭解這種情況。可是包括歐幾里得在內有少數人一直為平行公理所困惑，直至 G. 薩凱里 (Girolamo Saccheri) 才有值得大家注意的作法。他的三段論法去其二，肯定了平行公理 (p.422)。

非歐幾何的出現得力於三位大師，高斯宣稱「確實能夠存在類似歐氏幾何的其它幾何」，非歐幾何一聽名字幾就讓大家不能接受，所以高斯的研究成果只有在他去世之後才在他的論文裡找到；第二位是 N. 羅巴切夫斯基 (Nicholas Lobatchevsky) 他宣佈「有不同於歐幾里得的幾何學，其真實性與歐氏幾何是一樣的」；第三位是鮑耶 (John Bolyai)，他堅決主張「存在著與歐氏幾何矛盾的能被作為幾何學基礎的公理」。這一章是極好的非歐幾何入門介紹，娓娓道來不覺得是專門著作。

歐氏幾何的發展，是因為我們住在一個很有限的區域內，地球看來很平坦，由其設定的公理以至導出的定理，都讓人能欣然接受。可是大家都沒想到去設計一套適用於球的幾何，雖然人類一直都是生活在一個非歐幾何的地球上，都不可能想像除了歐氏幾何之外還有其它的幾何學。在大家都認識到非歐幾何可能正確的描述物理世界時，它就成了不可避免的事實。非歐幾何的創立，大家明白認識了數學空間與物理空間的區別，以往大家以為二者是相同的；所以非歐幾何的創立史，就是人類判斷力不斷喪失的歷史。為了建立新的幾何學，思想必須摧毀和戰勝習慣、直覺和感覺。

克萊因談非歐幾何蘊釀發萌時代頗具意義，那就是「數學史上這一階段，使得數學擺脫了與現實的緊密聯繫，使數學自身從科學中分離出來了，就如同科學從哲學中分離出來，哲學從宗教中分離出來，宗教從萬物有靈論和迷信中分離出來一樣。現在，可以使用

G. 康托爾 (Cantor, Georg) 的話了：“數學的本質就在於它的充分自由。”

第27章是相對論，記得民國46-47筆者讀高三時，物理名師後來是名教授的吳友仁老師說「據說相對論全世界只有七個半人(六個半人?)懂」，當然是很深奧的理論；就本章而言寫得還不算艱深，原來相對論奠基於非歐幾何。

愛因斯坦對傳統物理學中，長期為人們接受的又牢不可破的概念和假設提出挑戰；那時非歐幾何已存在75年了，可是大家仍然堅信物理空間是歐氏空間。1908年一位俄國數學家閔可夫斯基 (Minkowski) 指出「世界是一個四維時—空連續體」，愛因斯坦利用了閔可夫斯基的觀點，創立和公佈了他的廣義相對論。相對論是20世紀對形成我們文明和文化起著決定性作用的數學成就之一。

我對非歐幾何很陌生，相對論更是碰都不敢碰。看了27、28二章頗有概念，所以著墨較多。

本書妙聞有三項，開卜勒斷絃後擬再婚，把看得順眼的女士列出來，以數學規則作綜合評分，得分最高的女士“居然”拒絕了作數學家夫人的“榮譽”，他真是典型的數學中人；牛頓作了教授，他教書比起作研究差多了，有時上課會一個學生都沒有，大師怎麼混呢？一位心理學家發現戀愛方程式「男女之間的愛情，與在一起的時間的平方成正比，與兩人之間距離的立方成反比」，三項妙聞分別出現於115、204、347頁。最後一項是陳腔爛調大家都知道，時間與空間改變了人際關係。

我在436頁找到一個錯字，「大圓 ABC

DE 和 MNPD 在 C,D 處相交」應為「大圓 ABCDE 和 MNPD 在, N,D 處相交」。而 25 頁「... 透雨對農作物是有利的...」,「透雨」我可以體會它的意思,這種用法未之有聞。此外第 372 頁第七行「... “安全穿過”與“沒有安全穿過”這兩種可能性,並不是等可能的...」的「等可能」再版時若更正為「同等可能」就比較像中文,本頁第 19、25 行與 373 頁第 7 行亦出現過。442 頁第 2 行“... 宗教中分離出,”應為“... 宗教中分

離出來,”。本書談統計使用的“正態曲線”在台灣是“常態曲線”,當然不算缺失,有些句子太長,宜分成數句。

這是一冊四十多萬言的鉅著,我只寫下讀後感也介紹了少數幾章,再多寫就不如讀者自己去看;它兼具知識性與歷史性,至於是否有趣味性,當然是見人見智的事。

—本文作者任教於建國中學—