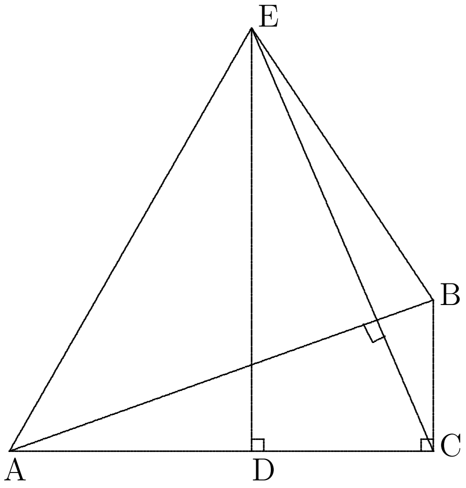
商高定理

陳國裕

商高定理:

一個無言的證明



$\triangle ABC \cong \triangle ECD$ 則 $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2$

1. 引言

商高定理在東方較早被發現, 後來西方人才發現了這個定理。以當時的交通狀況推想應該不是由東方傳到西方, 而是各自獨立發展出來的。或許在其他的地區曾發現過, 只是後人未加以注意。就好像十進位, 由於生活上的需求, 很多原始部落都是自行發展而不是由外面傳入, 以此推之, 商高定理應該也是如此, 不過, 歷史上即使沒有商高與畢達哥拉斯, 這定理還是會被發現, 只不過是他們比其他人更早發現罷了。從古到今有很多人對這定理有興趣, 到目前累積有數百種的證明方法, 在這些方法之中, 大多是利用拼圖或是一般平面幾何的方法, 簡捷易懂。

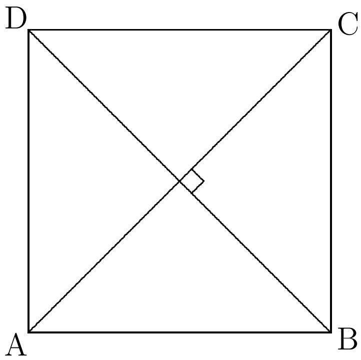
2. 思考過程與證明

對於一個正方形 ABCD, 如果$\overline{AB}=1$, 則此正方形的周長爲4單位, 面積爲1平方單位, 這是大家都很容易看到的, 如果再多注意看一下並且多想一想, 有的人會把對角線連起來, 因而聯想到這條對角線到底有多長? 對一個長方形而言, 也是會有相同的問題。既然想到問題, 下一個步驟很自然是要解決問題。因爲每個人想到的東西不見得一樣, 所以才會有各式各樣的證明方法。在數學問題中, 一題多解是大家常常思考的方向, 由於這個想法, 才使我想證明商高定理。

正方形面積的兩種計算: (1) 邊長平方 (2) 兩對角線乘積除以2。

符號使用說明: 以 $\square ABCD$ 表示四邊形 ABCD 的面積, $\triangle ABC$ 表示三角形 ABC 的面積等。

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90$度, 短股 $\overline{BC} = a$, 長股 $\overline{AC} = b$, 斜邊 $\overline{AB} = c$。

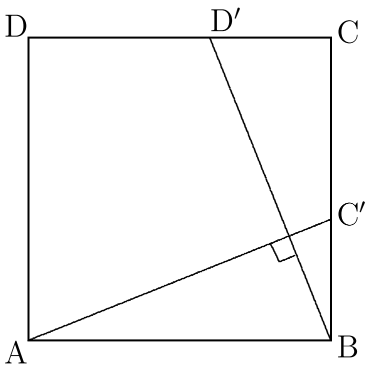


圖一

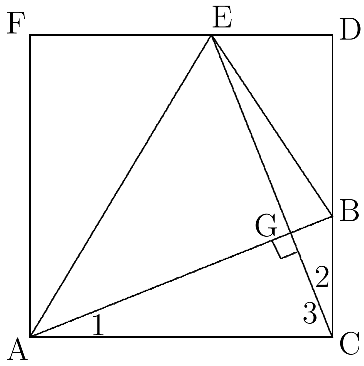
正方形 ABCD 中, (圖一) $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ 兩對角線互相垂直且 $\overline{AC} = \overline{BD}$, 如果 $\overline{AB} = 1$, 則 $1 = \square ABCD = \overline{AC} \times \overline{BD}/2 = \overline{AC}^2/2$, $\therefore \overline{AC}^2 = 2$, 又 $\overline{AC} > 0$, $\therefore \overline{AC} = \sqrt{2}$。用這個方法, 可以解決等腰直角三角形斜邊長的問題。

性質甲: 任意凸四邊形中, 如果兩對角線互相垂直, 則此四邊形面積等於兩對角線乘積除以2。

以下證明的方法要利用這個性質, 因爲它很淺顯, 所以不再對它作太多的說明。



圖二



圖三

如果不是等腰直角三角形時, 把 D 往右移至 D', (圖二) C 往下移至 C' 且 $\overline{DD'} = \overline{CC'}$。$\triangle ABC'$ 全等於 $\triangle BCD'$ (SAS), 正方形的兩條對角線經過這樣的移動之後, 發現這兩條線的垂直特性並沒有改變, 也就是說 $\overline{AC'} \perp \overline{BD'}$, 再利用性質甲而得到證法一。

證法一 (圖三): 正方形 ACDF 中, $\triangle ACB$ 全等於 $\triangle CDE$。$\because$ $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 3 = 90°$, $\therefore \angle AGC = 90°$, $\overline{AB} \perp \overline{CE}$。

$\square ACDF = \triangle AEF + \square ACBE + \triangle BDE$

$\overline{AF}^2 = \overline{AF} \times \overline{EF}/2 + \overline{AB} \times \overline{CE}/2$

$+\overline{BD} \times \overline{DE}/2$,

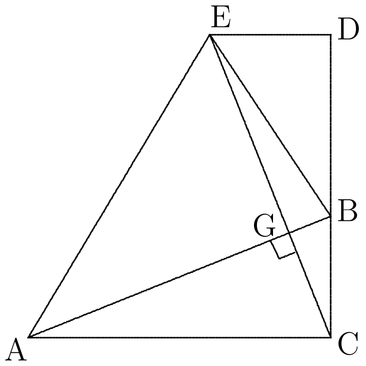
$b^2 = b\times(b-a)/2 + c\times c/2 + (b-a)\times a/2$,

$2b^2 = b^2 - ab + c^2 + ab - a^2$,

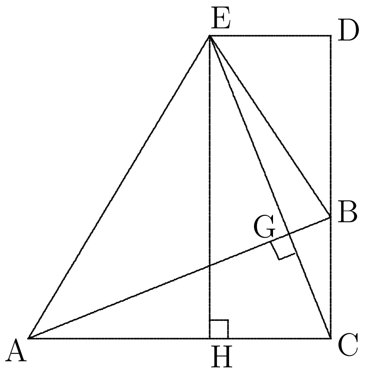
$b^2 = c^2 - a^2$,

$a^2 + b^2 = c^2$。

將證法一加以簡化 (圖三), 我們發現 $\triangle AEF$ 跟 $\triangle ABC$ 與 $\triangle CDE$ 並沒有重疊, 因此把它去掉就得到證法二。



圖四

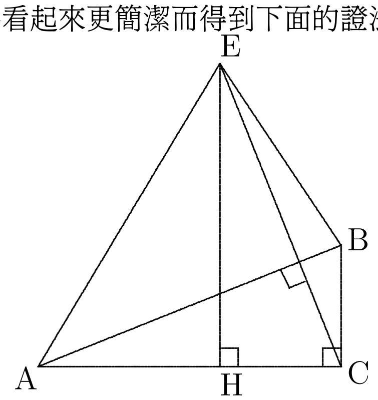


圖五

證法二 (圖四): 梯形 $ACDE = \square ACBE + \triangle BDE$

$$(\overline{DE}+\overline{AC})\times\overline{DC}/2=\overline{AB}\times\overline{CE}/2$$
$$+\overline{BD}\times\overline{DE}/2$$
$$(a+b)\times b/2=c\times c/2+(b-a)\times a/2$$
$$ab+b^2=c^2+ab-a^2$$
$$b^2=c^2-a^2$$
$$a^2+b^2=c^2$$

在證法二中 (圖四), 因爲 $\square ACBE = c^2/2$ 而我們想證 $c^2 = a^2+b^2$, 即 $c^2/2 = a^2/2+b^2/2$, 因此如果能把 $\square ACBE$ 分成 $a^2/2$, $b^2/2$ 的和, 則定理證出, 再看一下圖四, 可能會先看到 $\triangle ACE = b^2/2$, 剩下就是要看 $\triangle BCE$ 是否等於 $a^2/2$, 結果 $\triangle BCE = \overline{BC}\times\overline{DE}/2 = a\times a/2 = a^2/2$, 再看一下圖四, 發現 $\triangle BDE$ 可能也是多餘的, 先把它去掉試試看, 如果把 $\triangle BDE$去掉, 那就不容易做, 因爲 $\triangle ACE$ 中, 以 $\overline{AC}$ 爲底, 不容易看出它的高是 b, 所以把 $\triangle BDE$ 去掉不是一個很好的方法, 但是又希望它消失, 圖形看起來才會更簡潔。在前面提到 $\triangle ACE$ 中, 以 $\overline{AC}$ 爲底, 不容易看出它的高是 b, 那就不妨把 $\overline{AC}$ 的高 $\overline{EH}$(圖五) 畫出, 到這裡可以看出 $\triangle CDE$ 全等於 $\triangle EHC$, 有了 $\triangle EHC$ 就不必依賴 $\overline{BD}$ 與 $\overline{DE}$, 因此可以把這兩條線段擦掉, 使得圖形看起來更簡潔而得到下面的證法三。



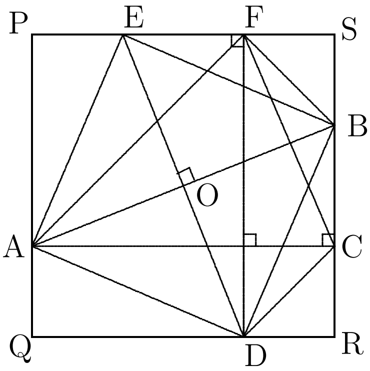
圖六

證法三 (圖六):

$$\triangle ABC \text{ 全等於 } \triangle ECH$$
$$\square ACBE=\triangle ACE+\triangle BCE$$
$$\overline{AB}\times\overline{CE}/2=\overline{AC}\times\overline{EH}/2+\overline{BC}\times\overline{CH}/2$$
$$c^2/2=b^2/2+a^2/2$$
$$c^2=b^2+a^2$$

因爲在定理中要有斜邊的平方, 而平方的產生是要互相垂直才能用到面積, 聯想到

如果把三角形旋轉90度也一樣會有斜邊互相垂直的情形出現, 而旋轉中心要定在那裡, 考慮這個問題之後, 又有好幾種的證明方法。旋轉中心可能在直角三角形的頂點或是斜邊的中點, 計算面積時, 用到全部圖形的面積或是只利用部分面積, 都是可以思考的方向。



圖七

以斜邊中點爲旋轉中心。

證法四 (圖七):

$\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90°$, 以斜邊 $\overline{AB}$ 中點 O 爲中心, 把 $\triangle ABC$ 按逆時針旋轉 $90°$至 $\triangle DEF$, 則 $\square AEBD$ 爲正方形。作正方形 PQRS, 我們看出 $\triangle AEP$, $\triangle EBS$, $\triangle BDR$, $\triangle DAQ$ 均全等 (AAS)

$\overline{PE}=\overline{BS}=\overline{DR}=\overline{AQ}$, 又 $\overline{DR}=\overline{FS}$,

$\therefore \overline{PE}=\overline{FS}$。

$\overline{EF}=\overline{BC}=a$,

$\overline{PS}=\overline{AC}=\overline{DF}=b$,

$\therefore \overline{PE}=\overline{FS}=(b-a)/2=\overline{BS}$。

$\overline{ES}=a+(b-a)/2=(b+a)/2$,

$\triangle EBS=\overline{ES}\times\overline{BS}/2=((b+a)/2)$

$((b-a)/2)/2=(b^2-a^2)/8$,

$\triangle AEP+\triangle EBS+\triangle BDR+\triangle DAQ$

$+\square ADBE=\square PQRS$,

$4\triangle EBS+\square ADBE=\square PQRS$,

$\overline{AB}=\overline{DE}=c$,

$4(b^2-a^2)/8+\overline{AB}\times\overline{DE}/2=\overline{PS}^2$,

$(b^2-a^2)/2+c^2/2=b^2$,

$b^2-a^2+c^2=2b^2$,

$c^2=a^2+b^2$。

證法五 (圖七): $ADCBFE$ 的面積$=\square ADBE+\triangle BCD+\triangle EFB=\triangle AEF+\square ADCF+\triangle BCF$, $\because \triangle BCD=\triangle BCF$ (同底等高) $\therefore$ $\square ADBE+\triangle EFB=\triangle AEF+\square ADCF$。

$\overline{AB}\times\overline{DE}/2+\overline{EF}\times\overline{BS}/2$

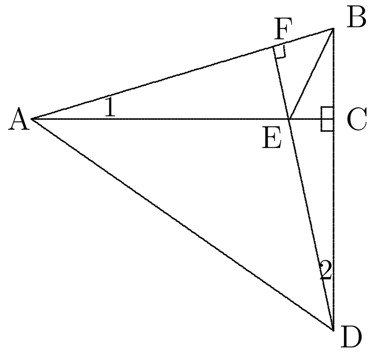
$=\overline{EF}\times\overline{AP}/2+\overline{AC}\times\overline{DF}/2$,

$c^2/2+\overline{EF}\times\overline{BS}/2=\overline{EF}\times\overline{CS}/2+b^2/2$,

$c^2=b^2+\overline{EF}\times(\overline{CS}-\overline{BS})$,

$c^2=b^2+\overline{EF}\times\overline{BC}$,

$c^2=b^2+a^2$。



圖八

以直角點爲旋轉中心。

證法六 (圖八): 以C為頂點, 把$\triangle ABC$旋轉$90°$至$\triangle DEC$。$\angle 2+\angle ABC=\angle 1+\angle ABC=90°$。$\therefore \angle BFE=90°$。

$\triangle ABD = \triangle ABE + \triangle BCE + \triangle ACD$,

$\overline{AB}\times\overline{DF}/2=\overline{AB}\times\overline{EF}/2+\overline{BC}\times\overline{CE}/2$

$+\overline{AC}\times\overline{CD}/2$,

$\overline{AB}\times(\overline{DF}-\overline{EF})=\overline{BC}\times\overline{CE}+\overline{AC}\times\overline{CD}$,

$\overline{AB}\times\overline{DE}=\overline{BC}\times\overline{CE}+\overline{AC}\times\overline{CD}$,

$c\times c=a\times a+b\times b$,

$c^2=a^2+b^2$。

證法七 (圖八):

$\triangle BCE+\triangle ACD=\triangle ADE+\triangle BDE$

$\overline{BC}\times\overline{CE}/2+\overline{AC}\times\overline{CD}/2=$

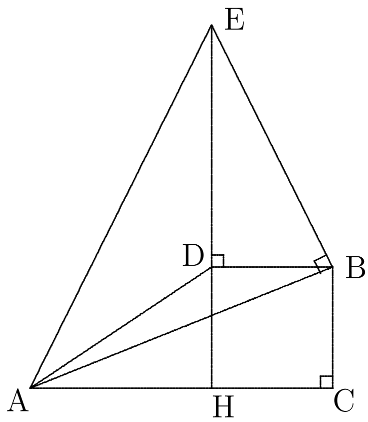
$\overline{DE}\times\overline{AF}/2+\overline{DE}\times\overline{BF}/2$

$\overline{BC}\times\overline{CE}+\overline{AC}\times\overline{CD}$

$=\overline{DE}\times(\overline{AF}+\overline{BF})=\overline{DE}\times\overline{AB}$

$a\times a+b\times b=c\times c$

$a^2+b^2=c^2$



圖九

以直角三角形中, 較大銳角頂點為旋轉中心。

證法八 (圖九): 以 B 為頂點, 把 $\triangle ABC$ 按順時針旋轉 $90°$ 至 $\triangle EBD$

$\triangle ABE+\triangle ABC=\square ACBE$

$=\triangle AEH+\square BCHE$

$\overline{AB}\times\overline{BE}/2+\overline{AC}\times\overline{BC}/2=$

$\overline{AH}\times\overline{EH}/2+(\overline{BC}+\overline{EH})\times\overline{CH}/2$

$c\times c+b\times a=(b-a)\times(b+a)$

$+(a+b+a)\times a$

$c^2+ab=b^2-a^2+2a^2+ab$

$c^2=b^2+a^2$

證法九 (圖九):

$\triangle ABE=\triangle ABD+\triangle BDE+\triangle ADE$,

$\overline{AB}\times\overline{BE}/2=\overline{BD}\times\overline{BC}/2$

$+\overline{DE}\times\overline{BD}/2+\overline{DE}\times\overline{AH}/2$,

$\overline{AB}\times\overline{BE}=\overline{BD}\times\overline{BC}$

$+\overline{DE}\times\overline{CH}+\overline{DE}\times\overline{AH}$,

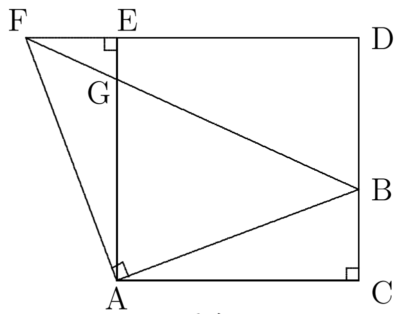
$\overline{AB}\times\overline{BE}=\overline{BD}\times\overline{BC}+\overline{DE}$

$\times(\overline{CH}+\overline{AH})$,

$\overline{AB}\times\overline{BE}=\overline{BD}\times\overline{BC}+\overline{DE}\times\overline{AC}$,

$c\times c=a\times a+b\times b$

$c^2=a^2+b^2$



圖十

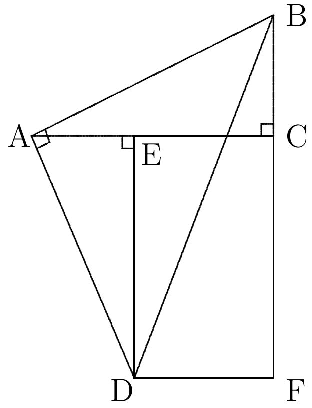
以直角三角形中, 較小銳角頂點爲旋轉中心。

證法十 (圖十): 以 A 爲頂點, 把 $\triangle ABC$ 按逆時針旋轉 $90°$ 至 $\triangle AFE$。

$$\square ACDF=\triangle FBD+\triangle ABF+\triangle ABC,$$
$$(\overline{AC}+\overline{DF})\times\overline{AE}/2=\overline{BD}\times\overline{DF}/2$$
$$+\overline{AB}\times\overline{AF}/2+\overline{AC}\times\overline{BC}/2。$$
$$(b+b+a)\times b/2=(b-a)\times(b+a)/2$$
$$+c\times c/2+b\times a/2,$$
$$2b^2+ab=b^2-a^2+c^2+ab,$$
$$b^2+a^2=c^2。$$

證法十一 (圖十):

$$\triangle FEG\sim\triangle FDB,$$
$$\overline{FE}:\overline{FD}=\overline{EG}:\overline{BD},$$
$$a:(a+b)=\overline{EG}:(b-a),$$
$$\overline{EG}=a(b-a)/(a+b)。$$
$$\overline{AG}=\overline{AE}-\overline{EG}=b-(ab-a^2)/(a+b)$$
$$=(ab+b^2-ab+a^2)/(a+b)$$
$$=(a^2+b^2)/(a+b),$$
$$\triangle ABF=\triangle AFG+\triangle ABG,$$
$$\overline{AB}\times\overline{AF}/2=\overline{AG}\times\overline{EF}/2+\overline{AG}\times\overline{DE}/2$$
$$=\overline{AG}\times(\overline{EF}+\overline{DE})/2=\overline{AG}\times\overline{DF}/2,$$
$$c\times c=(a^2+b^2)/(a+b)\times(a+b),$$
$$c^2=a^2+b^2。$$



圖十一

在圖八中, 把 $\triangle CDE$ 向左平移, 使 E 與 A 點重合。

證法十二 (圖十一):

$$\triangle ABD+\triangle BDF=\square ADFB$$
$$=\square ACFD+\triangle ABC,$$
$$\overline{AB}\times\overline{AD}/2+\overline{DF}\times\overline{BF}/2$$
$$=(\overline{DF}+\overline{AC})\times\overline{DE}/2+\overline{AC}\times\overline{BC}/2,$$
$$c\times c+(b-a)\times(b+a)$$
$$=(b-a+b)\times b+b\times a,$$
$$c^2+b^2-a^2=2b^2-ab+ab,$$
$$c^2=a^2+b^2。$$

3. 結語

在數學上的證明題大概沒有任何一個定理的證明方法比商高定理來得多。能採用不同的方法去思考證明或解決問題, 是學習數學的一種樂趣, 也是促使我們進一步學習的動機。在數學的學習過程中, 如果只是一味地記定義、定理及解題的方法, 而不肯用自己的

方法去思考如何解決問題, 即使在數學考試成績表現優異, 還是不會對數學產生眞正的興趣。

遇到一個數學問題, 經過自己思考而解決, 那種喜悅是難以用言語形容, 有了這樣的經驗之後會讓你願意花更多的時間去思考其他的問題, 那麼數學能力也就會有進步。也許有人會認爲基礎的數學問題, 不管你用甚麼方法, 以前的人可能用過, 不過只要是自己想出的方法, 而不是看別人的解才知道, 都是値得高興的事情。

在嘗試證明商高定理中, 雖在過程中也遭遇挫折, 但能解出以上數種證法, 從中獲得樂趣, 故藉此文除了就教於讀者並期能拋磚引玉, 作更多的證明與研究。

—本文作者任教於和平高中國中部—