一小問題之緣起、解答及推廣

張國男

在本篇中, 恆設 n 爲正整數, 並設 R, Q, Z 與 N 分別爲所有實數, 所有有理數, 所有整數與所有正整數所構成之集合; 又, 若 S 爲 R 之非空子集, 則將 $S^{(n)}$ 界定爲 $\{s^n | s \in S\}$。

一. 問題緣起

某日, 偶閱姪女郁芬購自坊間之高一下數學參考書籍, 見其中數本, 俱有類似於下述例題及解答之範例及解 (此處所用之文字及數值雖與諸書略異, 但其推導模式則無別也。):

例題: 設 k 爲定數。(註: 所見諸書俱逕設 k 爲有理數。) 若對於所有有理數 r 而言, x 之二次方程式 $x^2-5rx+4r^2+3r-k=0$ 必有有理根, 試求 k 之値, 並解此方程式。

解答: (1) 因 r 爲有理數時, 方程式 $x^2-5rx+4r^2+3r-k=0$ 必有有理根, 故 (k 必爲有理數, 且) 其判別式 $D_1 = (-5r)^2-4(4r^2+3r-k) = 9r^2-12r+4k$ 必爲有理數之平方。據此, 可知 D_1 之判別式 $D_2 = (-12)^2-4\cdot 9\cdot 4k = 144(1-k)$ 必爲 0, 即 $k=1$。

(2) 於是, 原方程式爲 $x^2-5rx+4r^2+3r-1=0$, 即 $x^2-5rx+(4r-1)(r+1)=0$, 亦即 $[x-(4r-1)][x-(r+1)]=0$, 故 $x=4r-1$, $r+1$。

問姪女解否? 曰:「判別式爲0之論證, 其理未明!」爰爲之補苴罅漏, 而詳釋如次: 因 $D_1 = 9[(r-\frac{2}{3})^2+\frac{4(k-1)}{9}]$ 爲有理數之平方, 若 $d=\frac{4(k-1)}{9}\neq 0$, 取 $r=\frac{2}{3}$, 則知 $\sqrt{\frac{4(k-1)}{9}}=\sqrt{d}$ 爲有理數; 再取 $r=\frac{2}{3}+\sqrt{d}$, 又知 $\sqrt{2d}$ 亦爲有理數。因此推得 $\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2d}}{\sqrt{d}}$ 爲有理數, 矛盾! 故必 $d=0$, 即 $k=1$。

以此因緣, 遂引生下述之

基本問題: 若 $a, b, c \in Q$, 試將下述之 $(*)$ 成立之充要條件藉 a, b 與 c 表出:

$$(*) \qquad \sqrt{ar^2+br+c} \in Q \qquad \forall r \in Q。$$

二. 問題解答

解答: [I] 必要條件:

(1) 取 $r=0$, 則據 $(*)$ 可知 $\sqrt{c} \in Q$。

(2)(i) 若$a=0$, 而 $b\neq 0$, 則必有 $r\in Q$ 使 $br+c<0$ [詳言之: 若 $b>0$, 可取 $r=-\frac{c}{b}-1$; 若 $b<0$, 可取 $r=-\frac{c}{b}+1$。],

故 $\sqrt{ar^2+br+c}=\sqrt{br+c}\notin Q$, 矛盾! 由此遂知: 若 $a=0$, 則必 $b=0$。(ii) 若 $a\neq 0$, 則 $\sqrt{ar^2+br+c}=\sqrt{a[(r+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}]}$。令 $d=\frac{4ac-b^2}{4a^2}$, 取正整數 m, 使 $4m^2+d>0$ (即 $m+\frac{d}{4m}>0$), 並取 $r=-\frac{b}{2a}+m-\frac{d}{4m}$, 則據 $(*)$ 可知 $\sqrt{a[(m-\frac{d}{4m})^2+d]}=\sqrt{a(m+\frac{d}{4m})^2}=(m+\frac{d}{4m})\sqrt{a}\in Q$, 故必 $\sqrt{a}\in Q$。遂知: $(**)$ $a\neq 0$ 時,

$$\sqrt{(r+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}\in Q \qquad \forall r\in Q。$$

取 $r=-\frac{b}{2a}$, 則據 $(**)$ 可知 $\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a^2}}=\sqrt{d}\in Q$; 取 $r=-\frac{b}{2a}+\sqrt{d}$, 則據 $(**)$ 可知 $\sqrt{2d}\in Q$。據是, 遂知 $d=0$, 即 $b^2=4ac$。

綜上所述, 即得必要條件: $\sqrt{a}\in Q$, $\sqrt{c}\in Q$, $b^2=4ac$ (亦即 $\sqrt{a}\in Q$, $\sqrt{c}\in Q$, $b=\pm 2\sqrt{ac}$)。

[II] 充分條件:

若 $\sqrt{a}\in Q$, $\sqrt{c}\in Q$, $b^2=4ac$ (即 $\sqrt{a}\in Q$, $\sqrt{c}\in Q$, $b=\pm 2\sqrt{ac}$), 顯然可知 $\sqrt{ar^2+br+c}=\sqrt{(\sqrt{a}r\pm\sqrt{c})^2}=|\sqrt{a}r\pm\sqrt{c}|\in Q\forall r\in Q$。

合 [I]與 [II], 遂知所求之充要條件爲 $\sqrt{a}\in Q$, $\sqrt{c}\in Q$, $b^2=4ac$ (即 $\sqrt{a}\in Q$, $\sqrt{c}\in Q$, $b=\pm 2\sqrt{ac}$)。

備註: (一) 本題之困難所在, 爲 $a\neq 0$ 時 $\sqrt{a}\in Q$ 之論證。如 [I](2) 之 (ii) 所示, 藉助恆等式 $(x-y)^2+4xy=(x+y)^2$ 之特例 $(m-\frac{d}{4m})^2+d=(m+\frac{d}{4m})^2$, 即可過此難關矣。

(二)[I](2) 之 (ii) 亦可改用歸謬法 (較複雜) 推導如次: 若 $a\neq 0$, 則 $ar^2+br+c=a(r+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$。設 $D=\frac{4ac-b^2}{4a}\neq 0$。$(1°)$ 取 $r=-\frac{b}{2a}$, 則據 $(*)$ 可知 $\sqrt{D}\in Q$。$(2°)$ 取正整數 m 使 $m^2a+1\neq 0$, 並取 $r=-\frac{b}{2a}+m\sqrt{D}$, 則據 $(*)$ 可知 $\sqrt{(m^2a+1)D}\in Q$。$(3°)$ 取 $r=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{ma}$, 則據 $(*)$ 可知 $\sqrt{\frac{(m^2a+1)D}{a}}\in Q$。由 $(2°)$ 與 $(3°)$, 知 $\sqrt{a}\in Q$, 故 $(**)\sqrt{(r+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}=\sqrt{(r+\frac{b}{2a})^2+\frac{D}{a}}\in Q\ \forall r\in Q$。$(4°)$ 取 $r=-\frac{b}{2a}$, 則據 $(**)$ 可知 $\sqrt{\frac{D}{a}}\in Q$。$(5°)$ 取 $r=-\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{D}{a}}$, 則據 $(**)$ 可知 $\sqrt{\frac{2D}{a}}\in Q$。由 $(4°)$ 與 $(5°)$, 得 $\sqrt{2}\in Q$, 矛盾! 故必 $D=0$, 即 $b^2=4ac$。據此與 $(*)$, 若取 $r=-\frac{b}{2a}+1$, 則可得 $\sqrt{ar^2+br+c}=\sqrt{a}\in Q$ 矣。

(三) $\sqrt{a}\in Q$, $\sqrt{c}\in Q$ 與 $b^2=4ac$ 三者, 缺一不可: $(1°)$ 僅 $\sqrt{a}\in Q$ 與 (或) $\sqrt{c}\in Q$, 條件不足; 反例: $a=c=0$, $b=-1$, $r=1$。$(2°)$ 僅 $\sqrt{a}\in Q$, 與 (或) $b^2=4ac$, 條件不足; 反例: $a=b=0$, $c=-1$。$(3°)$ 僅 $\sqrt{c}\in Q$ 與 (或) $b^2=4ac$, 條件不足; 反例: $b=c=0$, $a=-1$, $r=1$。

(四) 讀者不妨將$(*)$改爲 $\sqrt{ar^2+br+c}\in R\,\forall r\in R$, 亦即 $ar^2+br+c\geq 0\,\forall r\in R$, 試求其充要條件, 以比較前後二題之難易度。

三. 問題推廣

利用上題備註 (一) 提及之特殊技巧, 極易解決下述之附帶問題; 此誠可謂意外之收穫也。

附帶問題: 若 a, b 與 c 均爲有理數, 而 $\sqrt{a}$ 爲無理數, 是否有無窮多個有理數 s 能使 $\sqrt{as^2+bs+c}$ 爲無理數? 試論證之。

解答: 由題設, 知 $a>0$, 故可書 $ar^2+br+c=a[(r+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}]$。爲方便計, 令 $d=\frac{4ac-b^2}{4a^2}$。顯然, 必有正有理數 r_0 使 $4r_0^2+d>0$。又, 若有理數 $r>r_0$, 則 $4r^2+d>0$, 故 $Q_d^+=\{r|r\in Q, r>0, 4r^2+d>0\}$ 爲無窮集合。再者, 若 r_1, $r_2\in Q_d^+$, 且 $r_1>r_2$, 則 $(-\frac{b}{2a}+r_1-\frac{d}{4r_1})-(-\frac{b}{2a}+r_2-\frac{d}{4r_2})=\frac{(r_1-r_2)(4r_1r_2+d)}{4r_1r_2}>\frac{(r_1-r_2)(4r_2^2+d)}{4r_1r_2}>0$, 故 $S=\{-\frac{b}{2a}+r-\frac{d}{4r}|r\in Q_d^+\}$ 爲無窮集合。最後, 若 $s=-\frac{b}{2a}+r-\frac{d}{4r}$, 其中 $r\in Q_d^+$, 則 $s\in Q$, 且 $\sqrt{as^2+bs+c}=\sqrt{a[(r-\frac{d}{4r})^2+d]}=\sqrt{a(r+\frac{d}{4r})^2}=(r+\frac{d}{4r})\sqrt{a}$ 爲無理數。總之, Q 之無窮子集 S 中所有數 s 均能使 $\sqrt{as^2+bs+c}$ 爲無理數。

備註: (一) 設 $a, b, c\in Q$。顯然, 若 $\sqrt{a}\neq 0$ 爲有理數, 則本題解答所建構之集合 S 中所有數 s 均能使 $\sqrt{as^2+bs+c}$ 爲有理數; 又, 若 $\sqrt{a}\neq 0$ 爲純虛數, 則此 S 中所有數 s 均能使 $\sqrt{as^2+bs+c}$ 爲純虛數。

(二) 類似實例: 參考上示解答, 易知 $S_1=\{-\frac{b}{2a}+r-\frac{d}{4r}|r\in Q, r<0, 4r^2+d>0\}$, $S_2=\{-\frac{b}{2a}+r-\frac{d}{4r}|r\in Q\backslash\{0\}, 4r^2+d>0\}$, $S_3=\{-\frac{b}{2a}+m-\frac{d}{4m}|m\in N, 4m^2+d>0\}$, $S_4=\{-\frac{b}{2a}+m-\frac{d}{4m}|-m\in N, 4m^2+d>0\}$ 與 $S_5=\{-\frac{b}{2a}+m-\frac{d}{4m}|m\in Z\backslash\{0\}, 4m^2+d>0\}$ 亦俱爲 Q 之無窮子集, 且其中任一數 s 均能使 $\sqrt{as^2+bs+c}$ 爲無理數。實際上, Q 之子集合乎此等條件者有無窮多個。上列諸例皆甚簡明, 特標出以供讀者參考。

以下, 設 $Q[x]$ 爲未定元 (indeterminate) x 之所有有理係數多項式所構成之集合, $R[x]$ 爲 x 之所有實係數多項式所構成之集合。據前述基本問題之解答 (第二節), 可知: 若 $a, b, c\in Q$, 且 $ar^2+br+c\in Q^{(2)}$ $\forall r\in Q$, 則必有 $d, e\in Q$ 使 $ar^2+br+c=(dr+e)^2$ $\forall r\in Q$; 換言之, 若 $f(x)=ax^2+bx+c\in Q[x]$, 且 $f(r)\in Q^{(2)}$ $\forall r\in Q$, 則必有 $g(x)=dx+e\in Q[x]$ 使 $f(x)=[g(x)]^2$。將此命題略作推廣, 可得下述問題。

推廣問題1: 若$f(x)=a_0+\sum_{i=1}^n a_ix^i\in Q[x]$, 且 $f(r)\in Q^{(n)}$ $\forall r\in Q$, 是否必有 $g(x)\in Q[x]$ 能使 $f(x)=[g(x)]^n$?

解答: 當 $n=1$ 時, 取 $g(x)=f(x)$ 即可。以下, 設 $n>1$。爲引用方便計, 以 (C_1) 表條件 $f(r)\in Q^{(n)}\forall r\in Q$。

(1) 若 $a_n=0$, 則必 $a_i=0(1\leq i\leq n-1)$, 玆證如次: 若 $a_1,\ldots,a_{n-1}$ 中有非0者, 設其非0者之最大足碼爲 $n-j$ (當然 $1\leq j\leq n-1$), 則 $f(x)=a_0+\sum_{i=1}^{n-j}a_ix^i$。可將 $a_0,\ldots,a_{n-j}$ 中之非0者俱表爲最簡分數, 並令所有分母之最小正公倍數爲 ℓ (若僅 $a_{n-j}\neq 0$, 可將 a_{n-j} 表爲最簡分數, 並以其分母之絕對値爲 ℓ), 而書 $f(x)=\frac{1}{\ell^n}[\ell_0+\sum_{i=1}^{n-j}\ell_ix^i]=\frac{1}{\ell^nx^{-n}}[\ell_0x^{-n}+\sum_{i=1}^{n-j}\ell_ix^{-(n-i)}]$, 其中 $\ell_0,\ldots,\ell_{n-j}$ 均爲整數。令 $y=\frac{1}{x}$, $h(y)=\sum_{i=j}^n\ell_{n-i}y^i$, 則

$f(x)=\frac{h(y)}{\ell^n y^n}$。據 (C_1) 知 $h(r)\in Q^{(n)}$ $\forall r\in Q\backslash\{0\}$, 故特別可得$(C_2)$: $h(m)\in Z^{(n)}$ $\forall m\in N$。取質數 $p>|\ell_{n-j}|$, 則因 $nj>(n-1)j\geq n(j-1)+1$, 而 $(n-1)(j+1)=nj+(n-j-1)\geq nj$, 故 $p^{nj}|\sum_{i=j+1}^n \ell_{n-i}(p^{n-1})^i$, $p^{n(j-1)+1}|\ell_{n-j}(p^{n-1})^j$, $p^{nj}\nmid \ell_{n-j}(p^{n-1})^j$, 遂知 $p^{n(j-1)+1}|\sum_{i=j}^n \ell_{n-i}(p^{n-1})^i$, $p^{nj}\nmid \sum_{i=j}^n \ell_{n-i}(p^{n-1})^i$, 此與 (C_2) 相左! 故必 $a_i=0(1\leq i\leq n-1)$, 而得 $f(x)\equiv a_0$。由 (C_1), 知有 $b\in Q$ 使 $a_0=b^n$。取 $g(x)\equiv b$, 即得 $f(x)=[g(x)]^n$ 矣。

(2) 若 $a_n\neq 0$, 仿 (1), 可書 $f(x)=\frac{1}{\ell^n}[\ell_0+\sum_{i=1}^n \ell_i x^i]$, 其中 ℓ 爲正整數, $\ell_0,\ldots,\ell_n$ 均爲整數。(i) 因 $\lim_{x\to\infty}\{\ell_0+\sum_{i=1}^n \ell_i x^i\}=\infty$ (若 $\ell_n>0$) 或 $-\infty$ (若 $\ell_n<0$), 據 (C_1) 或 $\ell_0+\sum_{i=1}^n \ell_i m^i\in Z^{(n)}$ $\forall m\in N$, 倶知 n 爲偶數時, 必 $\ell_n>0$。(ii) 令 $y=\frac{1}{x}$, $h(y)=\ell_n+\sum_{i=1}^n \ell_{n-i}y^i$, 則 $f(x)=\frac{h(y)}{\ell^n y^n}$, 據 (C_1) 可知 (C_2): $h(m)\in Z^{(n)}$ $\forall m\in N$。若 $|\ell_n|\neq 1$, 而 $|\ell_n|=\prod_\lambda p_\lambda^{e_\lambda}$ 爲其標準質因數分解, 則必 $n|e_\lambda\forall\lambda$; 蓋若某 $e_\lambda=tn+u$, 而$t\in N\cup\{0\}$, $0<u<n$, 則 $p_\lambda^{e_\lambda}|h(p_\lambda^{(t+1)n})$, $p_\lambda^{(t+1)n}\nmid h(p_\lambda^{(t+1)n})$, 此與 (C_2) 相左! 據是與 (i), 遂知: 不論 n 爲奇或爲偶, $|\ell_n|=1$ 或 $|\ell_n|\neq 1$, 恆有 $\sqrt[n]{\ell_n}\in Z$。令 $\sqrt[n]{\ell_n}=q$, 即得 $\sqrt[n]{a_n}=\frac{q}{\ell}\in Q$ 矣。(iii) 由 (i) 之論述, 易知不論 n 爲奇或爲偶, 當 x 之值甚大時, $\sqrt[n]{f(x)}$ 恆爲 (與 $\sqrt[n]{a_n}$ 同號之) 實數, 於是

$$\lim_{n\to\infty}[\sqrt[n]{f(x)}-\sqrt[n]{a_n}(x+\frac{a_{n-1}}{na_n})]$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-a_n(x+\frac{a_{n-1}}{na_n})^n}{\sum\limits_{i=0}^{n-1}[\sqrt[n]{f(x)}]^i[\sqrt[n]{a_n}(x+\frac{a_{n-1}}{na_n})]^{n-i-1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{n-2}b_i x^i}{\text{同前式分母}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}(\text{分子與分母倶除以}x^{n-1})$$
$$=\frac{0}{n(\sqrt[n]{a_n})^{n-1}}=0,$$

故必有正整數 m_0, 使

$$|n\ell q^{n-1}[\sqrt[n]{f(x)}-\sqrt[n]{a_n}(x+\frac{a_{n-1}}{na_n})]|<\frac{1}{2}\quad \forall x\geq m_0,$$

即

$$|nq^{n-1}\sqrt[n]{\ell_0+\sum_{i=1}^n \ell_i x^i}-(nq^n x+\ell_{n-1})|<\frac{1}{2}\quad \forall x\geq m_0。$$

因

$$\sqrt[n]{\ell_0+\sum_{i=1}^n \ell_i m^i},nq^n m+\ell_{n-1}\in Z\quad \forall m\in N$$

[前者見 (i), 後者顯然], 由甫得之不等式, 遂有 $nq^{n-1}\sqrt[n]{\ell_0+\sum_{i=1}^n \ell_i m^i}=nq^n m+\ell_{n-1}$ $\forall m\in N\cap[m_0,\infty)$。故 $\sqrt[n]{f(m)}=\sqrt[n]{a_n}(m+\frac{a_{n-1}}{na_n})$ 而 $f(m)=a_n(m+\frac{a_{n-1}}{na_n})^n=[\frac{q}{\ell}(m+\frac{a_{n-1}}{na_n})]^n$ $\forall m\in N\cap[m_0,\infty)$; 換言之, 多項式 $f(x)-[\frac{q}{\ell}(x+\frac{a_{n-1}}{na_n})]^n$ 有無窮多個零點 $m_0,m_0+1,m_0+2,\ldots$。據此, 即得 $f(x)=[g(x)]^n$, 其中 $g(x)=\sqrt[n]{a_n}(x+\frac{a_{n-1}}{na_n})=\frac{q}{\ell}(x+\frac{a_{n-1}}{na_n})\in Q[x]$。

備註: (一) 本題之逆「若 $f(x)=a_0+\sum_{i=1}^n a_i x^i$, $g(x)\in Q[x]$, 且 $f(x)=$

$[g(x)]^n$, 則 $f(r) \in Q^{(n)}\ \forall r \in Q$。」顯然亦眞。

(二) 當 $n > 1$ 時, 若將本題中之 Q 改爲 R, $Q[x]$ 改爲 $R[x]$, 並將 $Q^{(n)}$ 改爲 $R^{(n)}$, 則所得之問題, 其答案係否定者; 蓋若令 $f(x) = x^n+1$, 則 $f(r) \in R^{(n)}\ \forall r \in R$, 但顯然無 $g(x) \in R[x]$ 能使 $f(x) = [g(x)]^n$ 也。

(三) 本解答所示 (2)(ii) 之推導用及算術基本定理, (2)(iii) 之推導用及有理化, 漸近線 (極限) 概念, 整數之離散性與多項式之零點個數。

(四) 將本題之解法與第二節中所示者略作比較, 可知: 本法雖較繁瑣, 但具有普遍性 (其推導普遍適用於所有 $n \geq 2$ 之情形); 前法雖較簡易, 但喪失一般性 (其論證不能類推使用於 $n \geq 3$ 之一般情形)。是以解答之簡易性與普遍性 (一般性), 有時顧此失彼, 誠難兩全。

茲將推廣問題1更進一步推廣之, 而探究下述問題。

推廣問題2: 若 $f(x) \in Q[x]$, 且 $f(r) \in Q^{(n)}\ \forall r \in Q$, 是否必有 $g(x) \in Q[x]$ 能使 $f(x) = [g(x)]^n$?

解答: 當 $n = 1$ 時, 取 $g(x) = f(x)$ 即可。以下, 設 $n > 1$。爲引用方便計, 以 (C_1) 表條件 $f(r) \in Q^{(n)}\ \forall r \in Q$。

(1) 若 $f(x) \equiv a_0 \in Q$, 則據 (C_1), 知有 $b \in Q$ 使 $a_0 = b^n$。取 $g(x) \equiv b$, 即得 $f(x) = [g(x)]^n$ 矣。

(2) 以下, 設 $f(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{\nu} a_i x^i$, $\nu \geq 1$, $a_\nu \neq 0$。(i) 令 $\nu = kn - j$, 其中 $k \in N$, $0 \leq j \leq n-1$。可將 $a_0, \ldots, a_\nu$ 中之非0者俱表爲最簡分數, 並令所有分母之最小正公倍數爲 ℓ (若僅 $a_\nu \neq 0$, 可將 a_ν 表爲最簡分數, 並以其分母之絕對值爲 ℓ), 而書 $f(x) = \frac{1}{\ell^{kn}}[\ell_0 + \sum_{i=1}^{\nu} \ell_i x^i] = \frac{1}{\ell^{kn}x^{-kn}}[\ell_0 x^{-kn} + \sum_{i=1}^{\nu} \ell_i x^{-(kn-i)}]$, 其中 $\ell_0, \ldots, \ell_\nu$ 均爲整數。令 $y = \frac{1}{x}$, $h(y) = \sum_{i=j}^{kn} \ell_{kn-i} y^i$, 則 $f(x) = \frac{h(y)}{\ell^{kn}y^{kn}}$。由 (C_1) 知 $h(r) \in Q^{(n)}\ \forall r \in Q\backslash\{0\}$, 故特別可得 (C_2) : $h(m) \in Z^{(n)}\ \forall m \in N$。若 $j \neq 0$ (即 $1 \leq j \leq n-1$), 取質數 $p > |\ell_\nu|$, 則因 $nj > (n-1)j \geq n(j-1)+1$, 而 $(n-1)(j+1) = nj+(n-j-1) \geq nj$, 故 $p^{nj} | \sum_{i=j+1}^{kn} \ell_{kn-i}(p^{n-1})^i$, $p^{n(j-1)+1} | \ell_{kn-j}(p^{n-1})^j, p^{nj} \nmid \ell_{kn-j}(p^{n-1})^j$, 遂知 $p^{n(j-1)+1} | \sum_{i=j}^{kn} \ell_{kn-i}(p^{n-1})^i$, $p^{nj} \nmid \sum_{i=j}^{kn} \ell_{kn-i}(p^{n-1})^i$, 此與 (C_2) 相左! 故必 $j = 0$, 即 $\nu = kn$ $(k \in N)$。(ii) 因 $\lim_{x\to\infty}\{\ell_0 + \sum_{i=1}^{\nu} \ell_i x^i\} = \infty$ (若 $\ell_\nu > 0$) 或 $-\infty$ (若 $\ell_\nu < 0$), 據 (C_1) 或 $\ell_0 + \sum_{i=1}^{\nu} \ell_i m^i \in Z^{(n)}\ \forall m \in N$, 俱知 n 爲偶數時, 必 $\ell_\nu > 0$。(iii) 若 $|\ell_\nu| \neq 1$, 而 $|\ell_\nu| = \prod_\lambda p_\lambda^{e_\lambda}$ 爲其標準質因數分解, 則必 $n|e_\lambda\ \forall \lambda$; 蓋若某 $e_\lambda = tn + u$, 而 $t \in N \cup \{0\}$, $0 < u < n$, 則 $p_\lambda^{e_\lambda} | h(p_\lambda^{(t+1)n}), p_\lambda^{(t+1)n} \nmid h(p_\lambda^{(t+1)n})$, 此與 (C_2) 相左! 據是與 (ii), 遂知: 不論 n 爲奇或爲偶, $|\ell_\nu| = 1$ 或 $|\ell_\nu| \neq 1$, 恆有 $\sqrt[n]{\ell_\nu} \in Z$。令 $\sqrt[n]{\ell_\nu} = q$, 即得 $\sqrt[n]{a_\nu} = \frac{q}{\ell^k} \in Q$ 矣。(iv) 考慮整係數多項式函數 $h(y) = \ell_\nu + \sum_{i=1}^{\nu} \ell_{\nu-i} y^i$。因 $h(0) = \ell_\nu \neq 0$, 由連續性, 知必有 $y_0 > 0$, 使 $y \in (-y_0, y_0)$ 時, $h(y)$ 與 ℓ_ν 同號。注意 n 爲偶數時, $\ell_\nu > 0$ [見 (ii)], 故不論 n 爲奇或

爲偶, 當 $y\in(-y_0,y_0)$ 時, $[h(y)]^{\frac{1}{n}}$ 必爲實數。因此, 可考慮實值函數 $H(y)=[h(y)]^{\frac{1}{n}}$, 其中 $y\in(-y_0,y_0)$。用數學歸納法, 易證第 i 階導函數 $H^{(i)}(y)=q_i(y)[h(y)]^{\frac{1}{n}-i}$ $\forall y\in(-y_0,y_0)$, 其中 $i\in N\cup\{0\}$, $q_i(y)\in Q[y]$; 又因 $\sqrt[n]{\ell_\nu}=q\in Z\backslash\{0\}$ [見(iii)], 故 $H^{(i)}(0)\in Q$ $\forall i\in N\cup\{0\}$。據 Taylor 定理, 知當 $y\in(-y_0,0)\cup(0,y_0)$ 時, 必有 $\theta_k(y)\in(0,1)$, 使 $H(y)=\sum_{i=0}^{k}\frac{H^{(i)}(0)}{i!}y^i+\frac{H^{(k+1)}(\theta_k(y)y)}{(k+1)!}y^{k+1}$; 又因 $[f(x)]^{\frac{1}{n}}=\frac{H(y)}{(\ell y)^k}$ $\forall x=\frac{1}{y}\in(\frac{1}{y_0},\infty)$ [見 (i)], 故得(C_3):

$$\lim_{x\to\infty}\{[f(x)]^{\frac{1}{n}}-(\frac{x}{\ell})^k\sum_{i=0}^{k}\frac{H^{(i)}(0)}{i!}x^{-i}\}$$
$$=\lim_{y\to0^+}\frac{H^{(k+1)}(\theta_k(y)y)}{(k+1)!\ell^k}y$$
$$=\frac{1}{(k+1)!\ell^k}[\lim_{y\to0^+}H^{(k+1)}(\theta_k(y)y)][\lim_{y\to0^+}y]$$
$$=\frac{H^{(k+1)}(0)\cdot0}{(k+1)!\ell^k}=0。$$

茲設 $g(x)=\sum_{i=0}^{k-1}\frac{H^{(i)}(0)}{i!\ell^k}x^{k-i}+\frac{H^{(k)}(0)}{k!\ell^k}$。因 $[f(x)]^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{\ell^k}[\ell_0+\sum_{i=1}^{\nu}\ell_ix^i]^{\frac{1}{n}}$ 中之 $\frac{1}{\ell^k}\in Q$, 且 $g(x)\in Q[x]$, 必有正整數 L, 使 $\frac{L}{\ell^k}$ 與 $\frac{L\cdot H^{(i)}(0)}{i!\ell^k}(0\le i\le k)$ 俱爲整數。據 (C_3), 知有正整數 $m_0>\frac{1}{y_0}$, 使 $|L\{[f(x)]^{\frac{1}{n}}-g(x)\}|<\frac{1}{2}$ $\forall x\ge m_0$。因 $[\ell_0+\sum_{i=1}^{\nu}\ell_im^i]^{\frac{1}{n}}$, $Lg(m)\in Z$ $\forall m\in N$ [前者見 (ii), 後者據 L 之存在性], 由甫得之不等式, 遂知 $L\{[f(m)]^{\frac{1}{n}}-g(m)\}=0$ $\forall m\in N\cap[m_0,\infty)$, 故 $f(m)=[g(m)]^n$ $\forall m\in N\cap[m_0,\infty)$; 換言之, 多項式 $f(x)-[g(x)]^n$ 有無窮多個零點 $m_0,m_0+1,m_0+2,\ldots$。據此, 即得 $f(x)=[g(x)]^n$, 其中 $g(x)=\sum_{i=0}^{k-1}\frac{H^{(i)}(0)}{i!\ell^k}x^{k-i}+\frac{H^{(k)}(0)}{k!\ell^k}\in Q[x]$。

備註: (一) 對於 (2)(iv) 之推導, 爲強調其中一重點, 特再綴數語, 闡釋如次: 考慮整係數多項式函數 $h(y)=\ell_\nu+\sum_{i=1}^{\nu}\ell_{\nu-i}y^i$。若 n 爲偶數, 而 $y_1\in R$ 使 $h(y_1)<0$, 則由連續性, 知必有 $\delta>0$, 使 $h(y)<0$ $\forall y\in(y_1-\delta,y_1+\delta)$。特取 $r_1\in Q\cap(y_1-\delta,y_1+\delta)$, 則 $h(r_1)<0$; 又 $h(0)=\ell_\nu>0$ [見 (ii)], 故 $r_1\ne0$, 由 (C_1), 即知 $h(r_1)\in Q^{(n)}$ [見 (i)], 而得 $h(r_1)\ge0$。前後矛盾! 因此, 若 n 爲偶數, 則必 $h(y)\ge0$ $\forall y\in R$。據是, 可知不論 n 爲奇或爲偶, 當 $y\in R$ 時, $[h(y)]^{\frac{1}{n}}$ 必爲實數, 故可考慮實值函數 $H(y)=[h(y)]^{\frac{1}{n}}$, 其中 $y\in R$。(2)(iv) 將 H 之定義域取爲區間 $(-y_0,y_0)$ [而非 R], 除確定 $H(y)\in R$ $\forall y\in(-y_0,y_0)$ [此與 $H(y)\in R$ $\forall y\in R$ 類似]外, 尚能保證第 i 階導函數 $H^{(i)}(y)=q_i(y)[h(y)]^{\frac{1}{n}-i}$ 在區間 $(-y_0,y_0)$ 上恆存在, 俾可應用 Taylor 定理以解題。注意: H 之定義域若選取不當, 以致含有 h 之某零點 $\tilde{y}$, 則當 $i\in N$ 時, 因 $\frac{1}{n}-i<0$, $h(\tilde{y})=0$, 故 $h(\tilde{y})^{\frac{1}{n}-i}$ 即無意義矣!

(二) 推廣問題1爲本題於 $k=1$ 時之特例; 若 $a_n\ne0$, 欲求 $g(x)$ 使 $f(x)=[g(x)]^n$, 則由最高與次高次項, 知可試取 $g(x)=\sqrt[n]{a_n}(x+\frac{a_{n-1}}{na_n})$ [與本題藉 $H^{(0)}(0)=H(0)$ 及 $H^{(1)}(0)=H'(0)$ 所表出者一致], 故其解答 (2)(iii) 於最初即逕行推導 $\lim_{x\to\infty}[\sqrt[n]{f(x)}-\sqrt[n]{a_n}(x+\frac{a_{n-1}}{na_n})]=0$。但若 $k>1$, 且其值未明確示出, 則藉 $f(x)$ 之係數 $a_0,\ldots,a_\nu(a_\nu\ne0)$ 以明確表出 $g(x)$, 實際上有困難, 且事實上無必要, 故本題解答 (2)(iv) 即利用條件 (C_1), 連續

性, 導函數, Taylor 定理, 極限, 整數之離散性及多項式之零點個數等, 證明 $g(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{H^{(i)}(0)}{i!\ell^k} x^{k-i} + \frac{H^{(k)}(0)}{k!\ell^k} \in Q[x]$ 能使 $f(x) = [g(x)]^n$, 而不將其係數 $\frac{H^{(i)}(0)}{i!\ell^k}(0 \leq i \leq k)$ 藉 $a_0, \ldots, a_\nu$ 明確表出。

(三) 本題之逆「若 $g(x) \in Q[x]$, 且 $f(x) = [g(x)]^n$, 則 $f(r) \in Q^{(n)}\ \forall r \in Q$。」顯然亦眞。

(四) 當 $n > 1$ 時, 若將本題中之 Q 改爲 R, $Q[x]$ 改爲 $R[x]$, 並將 $Q^{(n)}$ 改爲 $R^{(n)}$, 則所得之問題, 其答案係否定者; 蓋若令 $f(x) = x^{kn}+1$, 其中 $k \in N$, 則 $f(r) \in R^{(n)}\ \forall r \in R$, 但顯然無 $g(x) \in R[x]$ 能使 $f(x) = [g(x)]^n$ 也。

以下, 提及多項式環 $F[x]$ 時, 恆設 x 爲未定元 (對 F 而言)。爲後續推導之需, 茲先介紹下述之

引理: 若體 $F \supseteq Q$, $f(x) \in F[x]$, 且 $f(r) \in Q^{(n)}\ \forall r \in Q$, 則必 $f(x) \in Q[x]$。

證明: (1) 若 $f(x) \equiv a_0 \in F$, 則由題設條件知有 $b \in Q$ 使 $a_0 = b^n$, 故 $f(x) \in Q[x]$。

(2) 以下, 設 $f(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{\nu} a_i x^i$, $\nu \geq 1$, $a_\nu \neq 0$。任取 $\nu+1$ 個全異有理數 $r_j(0 \leq j \leq \nu)$, 考慮聯立方程 $x_0 + \sum_{i=1}^{\nu} r_j^i x_i = f(r_j)$, $0 \leq j \leq \nu$。因 r_j^i, $f(r_j) \in Q(1 \leq i \leq \nu, 0 \leq j \leq \nu)$, 而係數行列式 (爲 $\nu+1$ 階之 Vandermonde 行列式) 之值 $\prod_{0\leq j<j'\leq\nu}(r_{j'} - r_j) \neq 0$, 由 Cramer 法則 (利用行列式解聯立方程), 知此聯立方程恰有一組解 $x_i = \alpha_i(0 \leq i \leq \nu)$, 且所有 $\alpha_i \in Q$。又因 $x_i = a_i(0 \leq i \leq \nu)$ 爲其一組解, 故必 $a_i = \alpha_i$ 而 $f(x) \in Q[x]$。

備註: (一) 當然, (2) 之推導亦可簡化如次: 設 $f(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{\nu} a_i x^i$, $\nu \geq 1$, $a_\nu \neq 0$。任取 $\nu+1$ 個全異有理數 $r_j(0 \leq j \leq \nu)$, 則 $a_0 + \sum_{i=1}^{\nu} r_j^i a_i = f(r_j)$, $0 \leq j \leq \nu$。可將此視爲 $a_0, \ldots, a_\nu$ 之聯立方程。因 r_j^i, $f(r_j) \in Q(1 \leq i \leq \nu, 0 \leq j \leq \nu)$, 且係數行列式之值 $\prod_{0\leq j<j'\leq\nu}(r_{j'} - r_j) \neq 0$, 由 Cramer 法則知 $a_i \in Q(0 \leq i \leq \nu)$, 故 $f(x) \in Q[x]$。

(二) 本引理證明 (2) 亦可利用 Lagrange 插值公式 (interpolation formula) 及多項式之零點個數而推論如次: 設 $f(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{\nu} a_i x^i$, $\nu \geq 1$, $a_\nu \neq 0$。任取 $\nu+1$ 個全異有理數 $r_j(0 \leq j \leq \nu)$, 考慮 Lagrange 插值公式

$$\tilde{f}(x) = \sum_{j=0}^{\nu} \frac{f(r_j)\prod_{j'\neq j}(x - r_{j'})}{\prod_{j'\neq j}(r_j - r_{j'})}。$$

依吾人之選取及題設之條件, 知 $r_j, f(r_j) \in Q(0 \leq j \leq \nu)$, 故 $\tilde{f}(x) \in Q[x]$。若 $f(x) - \tilde{f}(x)$ 非零多項式, 則其次數 $\leq \nu$, 故至多有 ν 個零點; 因此與 $r_0, \ldots, r_\nu$ 俱爲其零點之事實相悖, 遂知 $f(x) \equiv \tilde{f}(x) \in Q[x]$。

若擬將推廣問題 2 更推廣之, 似宜考慮下述問題: 若體 $F \supseteq Q$, $f(x) \in F[x]$, 且 $f(r) \in Q^{(n)}\ \forall r \in Q$, 是否必有 $g(x) \in F[x]$ 能使 $f(x) = [g(x)]^n$? 茲討論如次: 在題設條件下, 據上述引理, $f(x)$ 實際上必

屬於 $Q[x]$, 故 (由推廣問題2之解答) 知必有 $g(x) \in Q[x] \subseteq F[x]$ 能使 $f(x) = [g(x)]^n$。因此, 本質上, 上述推廣問題實與推廣問題2無異。唯應注意, 可取之 $g(x)$ 可能增多。例如令 F 爲複數體, $n = 3$, $f(x) = x^3$, 則可取 $g(x) = x, \omega x$ 或 $\omega^2 x$, 其中 $\omega = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i)$。再者, 其逆「若體 $F \supseteq Q$, $g(x) \in F[x]$, $f(x) = [g(x)]^n$, 則必 $f(r) \in Q^{(n)}$ $\forall r \in Q$。」不眞。蓋令 $F = Q(\sqrt{2})$, $g(x) = \sqrt{2}x$, $f(x) = [g(x)]^2 = 2x^2$, 則 $f(1) = 2 \notin Q^{(2)}$ 也。又, 若考慮 $f(r) \in Q^{(n)}$ $\forall r \in Q$ 之充要條件, 形式上雖可推得「若體 $F \supseteq Q$, $f(x) \in F[x]$, 則 $f(r) \in Q^{(n)}$ $\forall r \in Q$ 之充要條件爲有 $g(x) \in Q[x]$ 能使 $f(x) = [g(x)]^n$。」, 但實際上 $f(x) \in Q[x]$, 推廣問題2之解答與備註(三) 已示出此結果! 總之, 在 $f(r) \in Q^{(n)}$ $\forall r \in Q$ 之前提下, 推廣至問題2, 已達終點矣。

本節所示之推廣, 係於 $f(r) \in Q^{(n)}$ $\forall r \in Q$ 之前提下, 以循序漸進之方式, 逐步完成者。蓋先將基本問題推廣至問題1, 次將問題1再推廣至問題2, 後據上述引理, 說明此種推廣止於是, 故其來龍去脈, 實有跡可尋也。唯推廣問題1與2二者之論證, 有若干類似或雷同之處, 是其缺點。若兼程並進, 跳過問題1, 而逕由基本問題遽推至問題2, 雖可除去上述重複之弊, 但有突兀之感。再者, 前述推廣問題1所予之解答, 亦有可供參考之價值。職是之故, 遂將此二題依序銜接之, 而演示如上焉。本節推廣所得, 可綜述爲如下之

結論: 若 $f(x) \in Q[x]$, 而 $n \in N$, 則 $f(r) \in Q^{(n)}$ $\forall r \in Q$ 之充要條件爲有 $g(x) \in Q[x]$ 能使 $f(x) = [g(x)]^n$。

茲於結束本文之際, 特提出下述問題, 供有志讀者研究之。

研究問題: (1) 試確定是否有合乎下列條件之體 F: (i) $F \supset Q$; (ii) 若 $f(x) \in F[x]$, 而 $n \in N$, 則 $f(\alpha) \in F^{(n)}$ $\forall \alpha \in F$ 之充要條件爲有 $g(x) \in F[x]$ 能使 $f(x) = [g(x)]^n$, 其中 $F^{(n)} = \{\alpha^n | \alpha \in F\}$。(2) 試求合乎上述條件 (ii) 之所有體 F。[當然, 同構之體可視爲相同。]

備註: 筆者猜測有理數體爲合乎條件 (ii) 之唯一體。[意謂: 若體 F 合乎條件 (ii), 則 F 必與 Q 同構。]未知然否?

後記: 1997年元月, 筆者將本文第一節所述之基本問題及第二節之解答與備註等資料, 提供予我國數學奧林匹亞委員會, 蒙採納爲訓練教材, 並惠贈命題費二千元, 謹此申謝。

—本文作者曾任教於台灣大學數學系, 現已退休—