# 柏拉圖的地面

平斯

希臘時代, 柏拉圖在雅典近郊的一個橄欖園子裡, 建立了文明史上著名的第一所學院。因爲當地早年出了一個叫 Akadmoms 的英雄, 由此之故, 後世遂以英雄之名, 稱呼這個人文薈萃的的地方, 濫觴所及, 文的譬如今天在南港的中央研究院就叫 Academica Sinica。武的如西點軍校叫 Military Academy。柏拉圖開山立寨, 招引天下賢士, 談笑固應有鴻儒, 往來必然無白丁, 作爲一派掌門人, 自有相當見識, 何以得知呢? 他在學院的門口, 貼了一張布告寫道:

ΜΗΔΕΙΣ ΑΓΕΩΜΕΤΡΗΤΟΣ ΕΙΣΙΤΩ ΜΟΥ ΤΗΝ ΣΤΕΓΗΝ

其意思是“不懂幾何的人, 就不必進來了”, 學院當年如何盛況, 今天當然是無從體會。但是在意大利的文藝復興時期三傑之一, 拉斐爾全憑想像, 濃縮亞非歐遠近諸地, 凝聚前後三百年時間, 畫了一幅“雅典學園”的大壁畫, 果然是群賢畢至, 少長咸集, 其中安排在三角構圖裡, 代表安定的兩個底角位置, 分別是畢達格拉斯和他的徒衆, 佔據一隅。而分庭抗禮的對面, 則由歐基里得和阿機米德各擁弟子, 另居一隅, 形成犄角之勢, 這些人全都是希臘時代的著名學者。

歐基里得以整理國故, 寫成了“幾何原本”而垂名不朽, 在壓卷的最後一章, 以描述五個柏拉圖正多面體, 作爲總結。後代的學者波克士 (即在註二, 譯爲普羅克羅斯的同一人) 認爲, 柏拉圖的學院萬仞宮牆, 雖得其門而入, 但是須要幾何修養的門檻很高, 歐基里得寫幾何原本的初衷, 原先就是只要爲初學而未入門者詳盡的介紹建構過程 (註一), 相當於今天大學入學考試的自修教材, 不料流傳成爲幾何學的標準教本, 並啓發霍布士的社會規範理論 (註二), 如此深刻影響後世, 其實是插柳成陰無心之得, 因此此文溯本追源, 專以討論多面體爲正務。

在正多面體之後, 接著再來的是“準正多面體”, 只有兩種, 分別是立方八面體和十二角二十面體 (圖六、七), 前者是把適當大小的八面體與六面體作交集, 可以想像的, 每兩個面相交的地方, 必於各邊中點的連線上, 這相當於取八面體, 諸邊中點所圍成的最小多面體, 取六面體來做結果相同, 不妨將此法名爲“裁中”。施用同法於十二面體或二十面體, 可得後者。

有識於上述的經驗, 可得另外一個更普遍的方法“截頂”: 在每一個端點截去一個角錐, 這個角錐的大小以截留的每個邊仍構成正多邊形爲度, 裁中和截頂這兩個基本機制, 輪番施爲, 可造出一系列的多面體 (見圖), 其中有些仍具相當規則的對稱性, 早爲阿機米

德作出, 因此叫阿機米德“半正多面體”, 十七世紀時開朴勒曾把這些多面體詳加分類, 顯然他的工作不是十分嚴密完整, 一直到近代仍有新的發現 (註三)。

上個世紀末盛行研究自守函數論, 二十面體的對稱群是很重要的課題, 例如以超幾何函數來求解五次方程式的根就是據其理論所得的一項應用 (註四)。數年後, 同樣的群, 被用來製成同調三維球, 然後有龐加萊猜測, 這種迄今未解的拓樸問題 (註五), 因此一般略具歷史的數學系如德國的哥廷根, 乃至目前台大數學系都依柏拉圖的古訓, 在古老陳舊的櫥櫃裡, 陳列各式多面體的模型, 材料是石膏塑的, 紙板摺的或壓克力板的不一而足, 如今網站方便, 可以想像的, 新興學系不必再用實物, 只須設計一個虛擬陳列室, 直接儲存並陳列在首頁上, 觀賞起來遠近稱便 (註六)。

近年來研究規則多面體, 著眼及目的是十分實用的, 比方要建立一個實物形狀之數據檔案, 以掃瞄照片圖形的方式, 既不經濟且又拘限爲平面, 最好的方法是球面塑造, 只須少數凹凸資料, 就可描出立體表面的輪廓, 只是取數據的球面座標點, 必須均勻散布在球面上, 以適應各種不同的輪廓變化, 傳統的球面經緯線, 雖然可用, 但集中在南北兩極比較密, 而赤道附近需要細部描述的地方, 反而點數太疏, 並不符所求, 一個很新的作法是用最佳化, 取各兩兩相鄰點, 彼此之間距離的總和最短的布局, 果然點的個數不超過12時, 許多上述所繪的多面體, 即爲所求 (註七) 不過這種作法是有缺點的。

以圓周上的均勻分布點來說, 正多邊形的分圓點是最好的選擇, 正如錶面上的十二個刻度, 規則又準確, 然而從正十二邊形增加一點, 成爲正十三邊形時, 做法上要完全重新來過, 因爲雖然是只增加一點, 但是不管放在那裡, 都會破壞正多邊形的規則性, 這可以說是正多邊形太規則的致命傷, 因此圓周上產生亂數, 反而要避免圓周率的整分割, 而無理數分割反而可以產生均勻散布亂數, 這是外爾著名的均布定理, 可算是傅立葉級數理論的一大成就 (註八), 沿著這條思路, 因此有利用球面旋轉群上調和函數的高深理論, 以取球面上隨機亂數的算則 (註九), 沙涅的這篇文章, 稍爲中古, 也可以當作文獻探討的一個起點。

(本文繪圖程式可自網站取得: anonymous @ftp.scu.edu.tw/scu/tma/polytope.zip)

## 參考資料


註一 H. Coxeter 著 Regular Ploytope 第13頁。

註二 曹亮吉著“阿草的葫蘆”第二章。

註三 L. A. Lyusternik 著 Convex figure and polyhedra 第149頁

註四 F. Klein 著 Development of mathematics in the 19th century 第337頁。

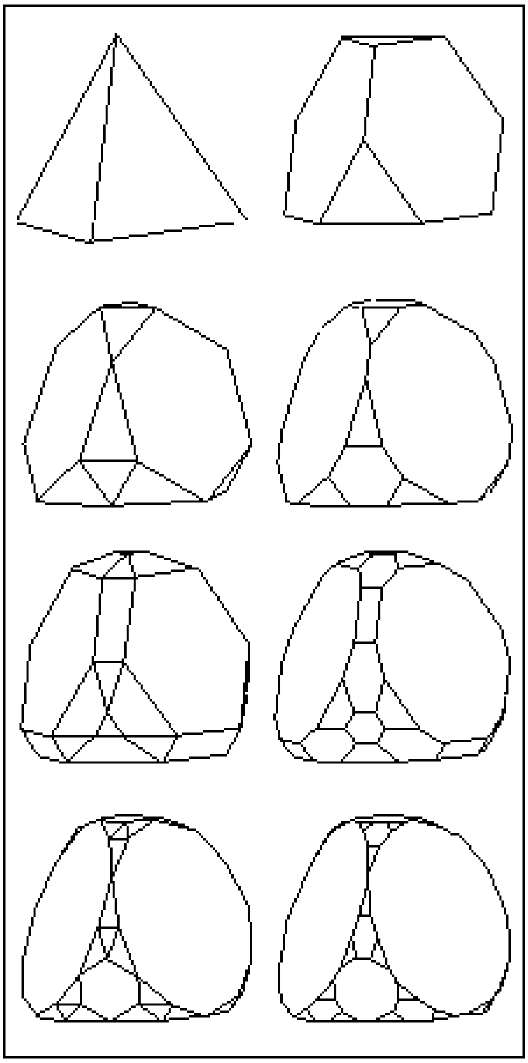
註五 W. Thurston 刊於 Scientific American 第247卷, 第94-109頁。

註六 例如網站 http://www.li.net/∼george/pavilion。

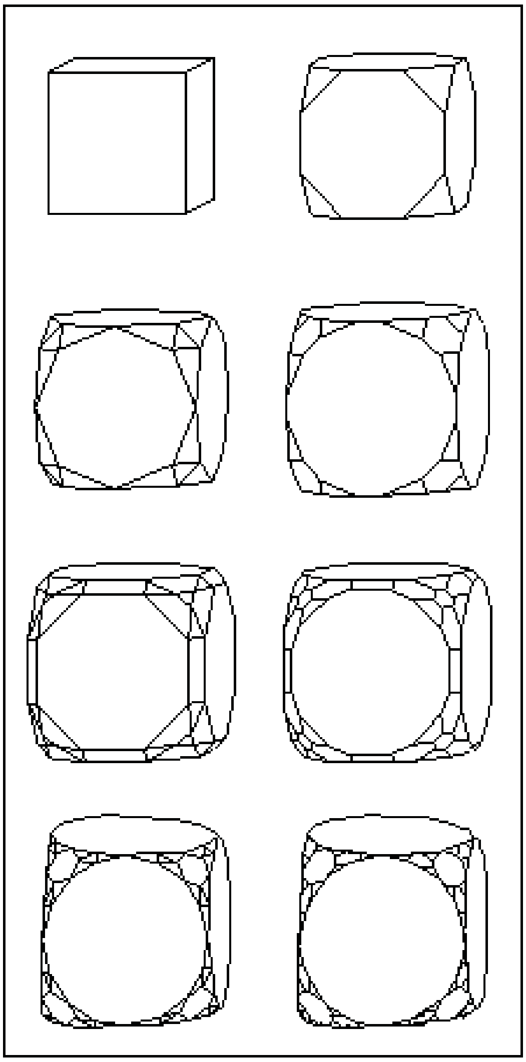
註七 J. Conway 刊於 Experimemtal mathematics 第5卷第2期第139-159頁。

註八 T. Korner 著 Fourier Analysis 第11頁。

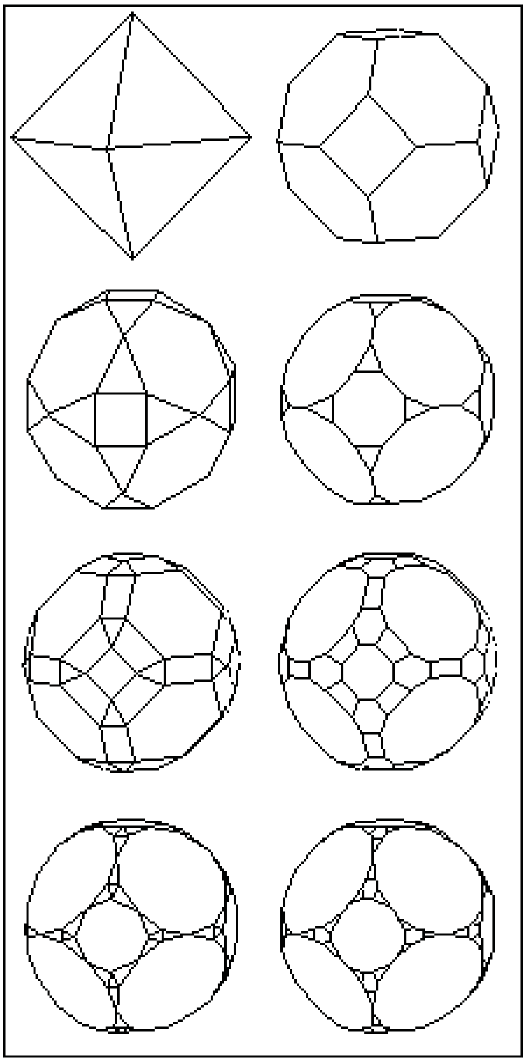
註九 P. Sarnak 刊於 Comm Pure and Applied Math 第34卷第 S149-S186頁。



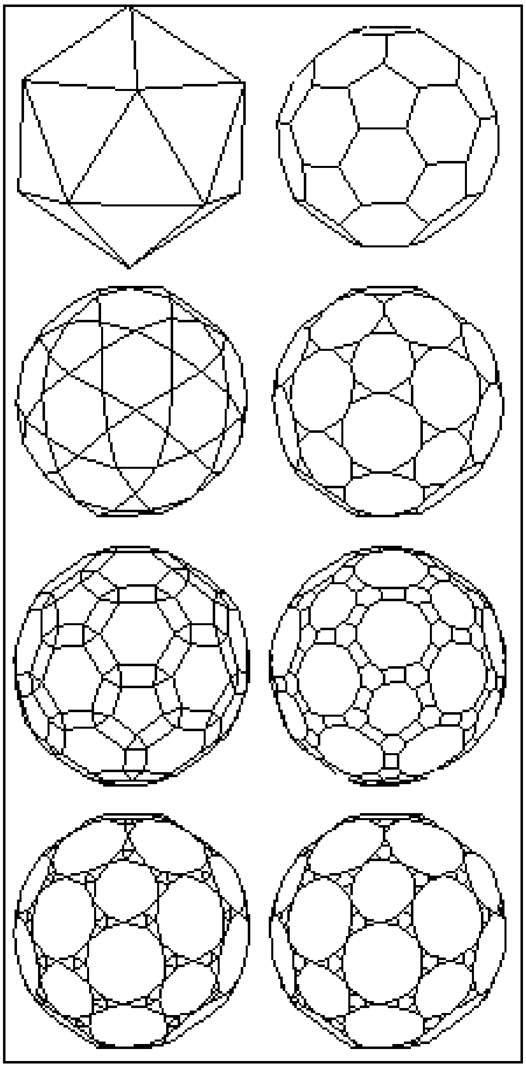
圖一



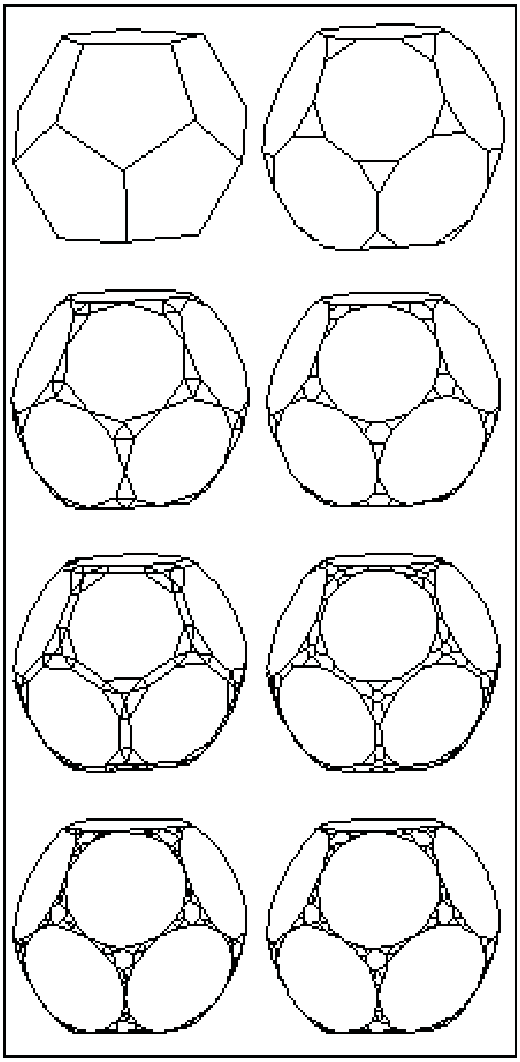
圖二



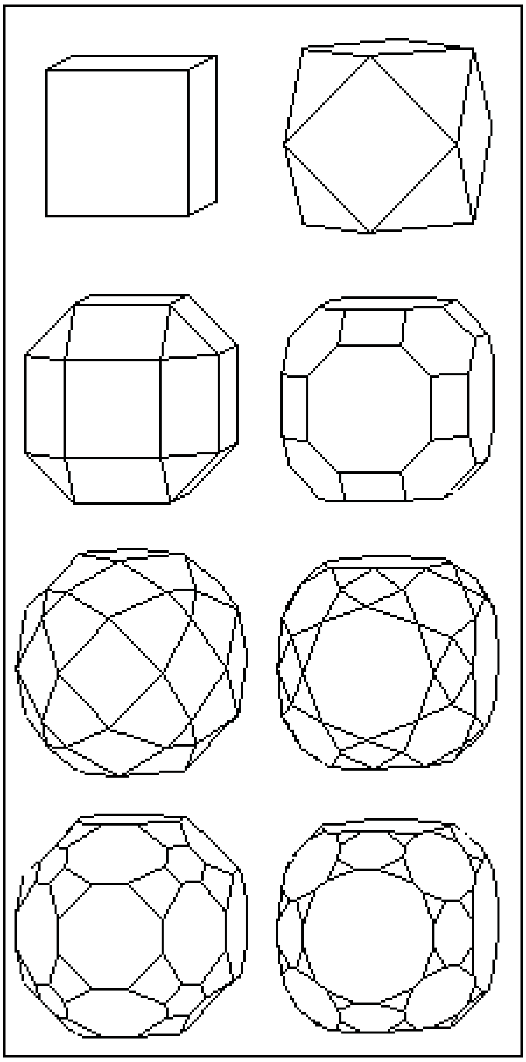
圖三



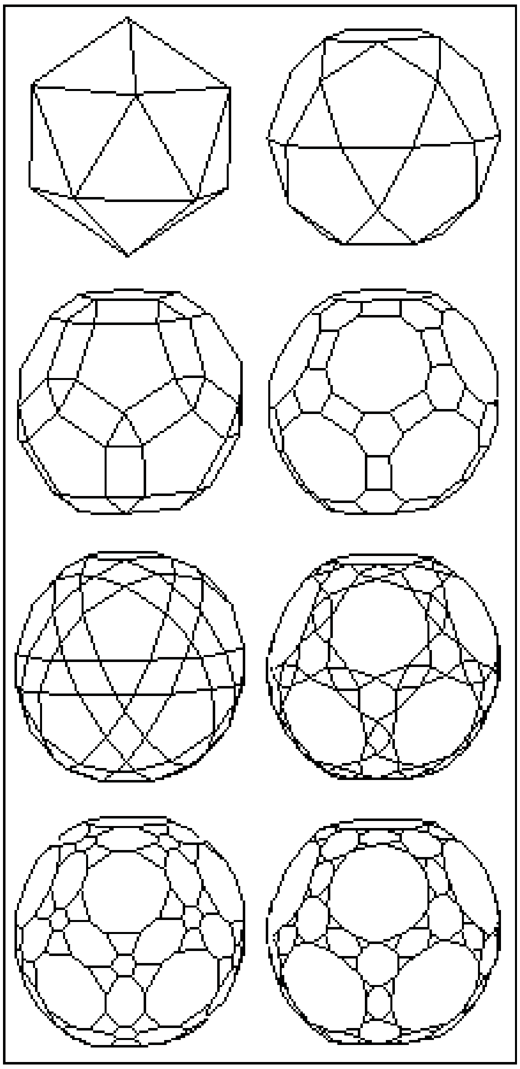
圖四



圖五



圖六



圖七