大的迷糊, 小的精明?

沈淵源

摘要: 提出伸縮因子法來幫助我們證明不等式。

1. 簡介

不等式在我們研讀數學的過程中, 遇到的機會實在不少。打從進入微積分的殿堂, 爲著證明而找那對應於 ϵ 的 δ 值; 不僅僅碰了一鼻子的灰, 有時甚至是遍體鱗傷。我們也經常爲著證明一個看似不太複雜的不等式而絞盡腦汁, 廢寢忘食的想盡種各種辦法尋求一解決的途徑, 投下了不少的時間與精力; 但問題總是在一個節骨眼上豁然開朗。在這裡, 我們想提出一個方法稱之爲伸縮因子法來說明這關鍵所在, 提供給諸位在解決不等式問題上的一個參考。

2. 構造分析法

要證明不等式 $x \geq y$, 大致上可分爲兩個方法。第一個方法是在各類的問題上分析其構造, 略施一點技巧, 直截了當的就可以解決。我們姑且稱之爲構造分析法。在此我們舉一個比較複雜一點的問題來說明。在初等微積分中, 爲了估計尤拉數 e, 有個重要的不等式如下:

$$(1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n})^{n+1}。 \qquad (1)$$

首先讓我們來分析一下這個不等式, 看看如何來進行。

1. 尤拉數 e 爲何物呢? 在初等微積分中, 我們定義對數函數爲

   $$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}dt, \quad \text{for } x > 0。$$

   由此可以證明 $\log x$ 是一個由 $(0,\infty)$ 映成 $(-\infty,\infty)$ 的一對一函數; 所以必定存在唯一的正數 y, 使得 $\log y = 1$, 我們就把這個唯一的正數用 e 來表示。
2. 再看看不等式 (1) 中的三個數 $(1+\frac{1}{n})^n$, e 及 $(1+\frac{1}{n})^{n+1}$, 對我們來說是是挺抽象的, 而且也不太友善, 很難加以控制; 因爲都是指數函數的值。但指數函數跟對數函數是互爲反函數, 且都是遞增函數; 最重要的是對數函數如上所定義的, 對我們來說是非常的具體, 可以感覺甚至可以捉摸得到。$\log a (a > 1)$ 是雙曲線 $xy = 1$, x-軸與垂直線 $x = 1$, $x = a$ 所包圍區

域的面積。所以, 很自然的我們就引進自然對數。

3. 由 log 函數的遞增性, 我們有下列等價的不等式:

$$\begin{aligned}&(1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n})^{n+1}\\ \Longleftrightarrow\ & n\log(1+\frac{1}{n})<1<(n+1)\log(1+\frac{1}{n})\\ \Longleftrightarrow\ & \frac{1}{n+1} < \log(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}。\end{aligned}$$

現在這三個數 $1/(n+1)$, $\log(1+1/n)$ 及 $1/n$, 比前面那三個好多了。怎麼說呢? 首先, $\log(1+1/n)$ 這個數代表函數 $f(x)=1/x$ 圖形底下從 $x=1$ 到 $x=1+1/n$ 所包圍區域 R 的面積, 也就是下面這個定積分的值:

$$\log(1+\frac{1}{n}) = \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{x}dx。$$

4. 因爲 $\frac{1}{x}$ 在區間 $[1,1+1/n]$ 是遞減的, 所以可得下列等價的不等式:

$$\begin{aligned}&\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} < \frac{1}{x} < \frac{1}{1} = 1\\ \Longleftrightarrow\ & \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1}dx < \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{x}dx\\ & \qquad < \int_1^{1+\frac{1}{n}} 1dx\\ \Longleftrightarrow\ & \frac{1}{n+1} < \log(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}。\qquad (2)\end{aligned}$$

這證明了不等式 (1) 是對的, 而證明非常簡單。

5. 如果我們從幾何的角度來看這個不等式, 那更是不言而喻。令 R_1 及 R_2 分別爲上述區域 R 的內接及外接長方形區域, 則 R_1 的面積就是 $1/(n+1)$, 而 R_2 的面積就是 $\frac{1}{n}$。當然區域 R 的面積 $\log(1+1/n)$ 是介於這兩個數之。

由上面的分析我們看到, 同樣一個問題由於觀察角度不同, 使得難易程度差異很大。不等式 (1) 與不等式 (2) 是同一個問題的兩面。當我們從 (1) 的角度去看, 似乎是遙不可及; 但從 (2) 的角度去看, 卻是垂手可得。

3. 代數的方法

好了, 回到我們的正題來談第二種方法。證明不等式 $x \geq y$, 只證明 $x-y \geq 0$ 就可以了。此法看來簡單, 說說容易, 但做起來可就是另外一回事了。一般而言, 很自然的會去用實數的平方大於零的性質來解決我們的問題。由於技巧的不同, 又可分爲三種方法。

其一爲硬性的方法, 即將 $x-y$ 配成一或多個實數的平方和。例如, 當我們證明算術平均數大於幾何平均數時, 就是用到這個方法。令 a, b 爲正實數, 則

$$\begin{aligned}&\frac{a+b}{2} - \sqrt{a}b\\ &= \frac{1}{2}(a+b-2\sqrt{ab})\\ &= \frac{1}{2}[(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2]\\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0。\end{aligned}$$

其二爲變大法, 可能 $x-y$ 雖然是正的, 但太小了; 小的使我們迷糊而無法看清 $x-y$ 是正的。這個時候我們就提出一個比1小的正數 λ 使 $x-y$ 變大爲 $\lambda^{-1}(x-y)$, 或許可以更清楚的看出此數爲正數。

其三爲變小法, 可能 $x-y$ 中的正數部分太大了; 大的使我們迷糊而無法看清 $x-y$ 是正的。這個時候我們就反其道而行, 將 $x-y$ 中的正數部分乘以一個較1爲小的正數 λ 使其變小, 或許可以更清楚的看出此數爲正數。

爲了說明上面這兩種方法, 我們看看下面的實例。令 δ 爲一固定的正數, 且令 f 爲定義於實數系上的一個複數值函數。定義函數 g 如下:

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & \text{若}|f(x)|<\delta;\\ \frac{f(x)\delta}{|f(x)|}, & \text{若}|f(x)|\geq\delta。\end{cases}$$

試證 $|g(x)-g(y)|\leq|f(x)-f(y)|\ \forall x,y\in R$。

讓我們來分析一下, 看看如何來進行。

1. 令 $f(x)=a+ib$, $f(y)=c+id$, 則 $f|(x)|=\sqrt{a^2+b^2}, |f(y)|=\sqrt{c^2+d^2}$。由 $f(x)$, $f(y)$ 的大小, 很顯然的可以分成四種情況: 其中有一種簡單至極, 有兩種類似, 所以只需討論下列兩種情況。
2. 若 $|f(x)|<\delta$, 且 $|f(y)|\geq\delta$ (亦即 $\sqrt{a^2+b^2}<\delta\leq\sqrt{c^2+d^2}$), 則

$$g(x)=a+ib,$$
$$g(y)=\frac{c\delta}{\sqrt{c^2+d^2}}+i\frac{d\delta}{\sqrt{c^2+d^2}}。$$

我們只要證明 $|f(x)-f(y)|^2-|g(x)-g(y)|^2\geq 0$ 就可以了, 化簡之後我們有下面的等式:

$$\begin{aligned}&|f(x)-f(y)|^2-|g(x)-g(y)|^2\\ &=(a-c)^2+(b-d)^2-\Big(a-\frac{c\delta}{\sqrt{c^2+d^2}}\Big)^2\\ &\quad-\Big(b-\frac{d\delta}{\sqrt{c^2+d^2}}\Big)^2\\ &=(c^2+d^2)\Big(1-\frac{\delta^2}{c^2+d^2}\Big)\\ &\quad-2\Big(1-\frac{\delta}{\sqrt{c^2+d^2}}\Big)(ac+bd)。\quad(3)\end{aligned}$$

由於 (3) 式中的值太小了, 小的使我們迷糊而無法看清 $(3)\geq 0$; 所以我們將其變大, 提出 $\lambda=1-\frac{\delta}{\sqrt{c^2+d^2}}$ 這一個比1小的正數。

$$\begin{aligned}(3)&=\Big(1-\frac{\delta}{\sqrt{c^2+d^2}}\Big)\Big[(c^2+d^2)\\ &\quad\cdot\Big(1+\frac{\delta}{\sqrt{c^2+d^2}}\Big)-2(ac+bd)\Big]\\ &=\Big(1-\frac{\delta}{\sqrt{c^2+d^2}}\Big)[(a-c)^2+(b-d)^2)\\ &\quad+\delta\sqrt{c^2+d^2}-(a^2+b^2)]\\ &\geq 0\ (\text{因爲}\sqrt{a^2+b^2}<\delta\leq\sqrt{c^2+d^2})。\end{aligned}$$

3. 若 $|f(x)|\geq\delta$, 且 $|f(y)|\geq\delta$ (亦即 $\sqrt{a^2+b^2}\geq b$, $\sqrt{c^2+d^2}\geq\delta$), 則

$$g(x)=\frac{a\delta}{\sqrt{a^2+b^2}}+i\frac{b\delta}{\sqrt{a^2+b^2}},$$
$$g(y)=\frac{c\delta}{\sqrt{c^2+d^2}}+i\frac{d\delta}{\sqrt{c^2+d^2}}。$$

再一次的, 我們只需要證明 $|f(x)-f(y)|^2-|g(x)-g(y)|^2\geq 0$, 化簡之後可得等式如下:

$$\begin{aligned}&|f(x)-f(y)|^2-|g(x)-g(y)|^2\\ &=(a-c)^2+(b-d)^2\\ &\quad-\Big(\frac{a\delta}{\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{c\delta}{\sqrt{c^2+d^2}}\Big)^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-(\frac{b\delta}{a^2+b^2}-\frac{d\delta}{\sqrt{c^2+d^2}})^2\\
&=(a^2+b^2+c^2+d^2)-2(ac+bd)\\
&\quad-\delta^2\Big(2-\frac{2(ac+bd)}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}}\Big)。\quad(4)
\end{aligned}
$$

在 (4) 式中, $(a^2+b^2+c^2+d^2)-2(ac+bd)\geq 0$, 但我們卻無法推知 $(4)\geq 0$。原因是這個數 $(a^2+b^2+c^2+d^2)-2(ac+bd)$ 太大了, 大的反倒使我們迷糊而無法看淸問題的眞相。更確切的說, 這兩個正數 $(a^2+b^2+c^2+d^2)-2(ac+bd)$ 與 $\delta^2(2-\frac{2(ac+bd)}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}})$ 之間的距離太遠了; 遠得使人無法洞察其間的關係。怎麼辦呢? 有一個辦法是將第一個正數變小。如此一來, 變小之後的數與第二個數的距離就縮短了。請看:

$$
\begin{aligned}
(4)\geq&\Big(\frac{\delta^2}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}}\Big)\\
&\cdot[(a^2+b^2+c^2+d^2)-2(ac+bd)]\\
&-\delta^2\Big(2-\frac{2(ac+bd)}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}}\Big)\\
&=\delta^2\Big(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}+\frac{\sqrt{c^2+d^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}-2\Big)\\
&=\delta^2\Big(\frac{\sqrt[4]{a^2+b^2}}{\sqrt[4]{c^2+d^2}}-\frac{\sqrt[4]{c^2+d^2}}{\sqrt[4]{a^2+b^2}}\Big)^2\\
&\geq 0。
\end{aligned}
$$

由於我們乘上了 $\lambda=\frac{\delta^2}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}}$, 這一個比1小的正數, 將第一個數 $(a^2+b^2+c^2+d^2)-2(ac+bd)$ 變小, 亦即拉短了與第二個數 $\delta^2(2-\frac{2(ac+bd)}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}})$ 之間的距離。使得我們能洞察其間的關係, 而 $(4)\geq 0$ 也就顯得非常自然, 所以說“小的精明”。究竟如何去確定伸縮因子 λ, 其在 (3) 式中爲 $1-\frac{\delta}{\sqrt{c^2+d^2}}$, 而在 (4) 式中爲 $\frac{\delta^2}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}}$ 呢? 這是一件不容易一下子就看得出來的事情。但是有了述的原則, 就可以避免一些無謂的嘗試。若用硬性的方法, 則需將 (4) 式整理成

$$
\begin{aligned}
&\Big(1-\frac{\delta^2}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}}\Big)\\
&\cdot[(a^2+b^2+c^2+d^2)-2(ac+bd)\\
&+\delta^2\Big(\frac{\sqrt[4]{a^2+b^2}}{\sqrt[4]{c^2+d^2}}-\frac{\sqrt[4]{c^2+d^2}}{\sqrt[4]{a^2+b^2}}\Big)^2,
\end{aligned}
$$

才能看出 $(4)\geq 0$, 這就更難了。這也是爲什麼要提出“伸縮因子法”的背景。

王荆公有云: “看似平常最奇絕, 成如容易卻艱難。” 當我們處理不等式問題的時候, 就常會有這種感慨。總而言之, 不等式的證明, 千頭萬緒。這裡我們只提出一個特殊的例子, 說一下其關鍵所在, 提供諸君將來碰到這一類問題時的一個參考。區區之意, 僅此而已!

參考文獻

1. 沈淵源, 從尤拉數 e 到 Stirling 常數, 數學傳播第二十卷第一期, 1996, 第34-45頁。

—本文作者任教於私立東海大學數學系—