一些發散級數的求和法

余文卿

摘要: 在這演講中, 我們將從有限級數 $S_m(N)=\sum_{k=1}^{N-1}k^m$ 之求和公式及方法中介紹伯努利數 $B_n(n=0,1,2,\ldots)$ 與發散級數求和的方法; 特別是針對大家所熟知的里曼 zeta 函數 $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}$, 這函數在偶數正整數與負整數的取值可完全用伯努利數表現出來:

$$\zeta(2m)=\frac{(-1)^{m-1}(2\pi)^{2m}B_{2m}}{2(2m)!},$$
$$\zeta(1-2m)=-\frac{B_{2m}}{2m}。$$

另一方面, 由費馬小定理 $a^{p-1}\equiv 1(\bmod p)$ 引出數論上非常重要的庫默同餘式:

$$\frac{B_m}{m}\equiv\frac{B_{m+p-1}}{m+p-1}\ (\bmod p)。$$

這同餘式用於證明不規則質數有無窮多個, 也粉碎了庫默證明費馬最後定理的美夢。

最後我們利用一些發散級數的求和導出一些有關伯努利數的恆等式。

1、連續整數的冪次和

設 m,N 是正整數, 考慮從1到 $N-1$ 連續 $N-1$ 個正整數的 m 次方的和

$$S_m(N)=\sum_{k=1}^{N-1}k^m。$$

對 $m=1,2,3,$ 很多人都知道, $S_m(N)$ 可寫成 N 的 $m+1$ 次多項式, 首項係數爲 $\frac{1}{m+1}$, 而常數項爲零:

$$S_1(N)=\frac{N(N-1)}{2},$$
$$S_2(N)=\frac{N(N-1)(2N-1)}{6},$$
$$S_3(N)=\frac{N^2(N-1)^2}{4}。$$

現對任意的 m, $S_m(N)$ 是否有明顯的表現式呢? 答案當然是有, 且很早就被發現, 現描述其導出過程。設 e 是自然對數的基底, 其定義爲

$$e=\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}。$$

指數函數 e^t 的冪級數展開爲

$$e^t=1+t+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}+\cdots。$$

因而對任意數 k,

$$e^{kt}=1+kt+\frac{k^2}{2!}t^2+\cdots+\frac{k^n}{n!}t^n+\cdots。$$

令 $k=0,1,2,\ldots,N-1$ 而相加得

$$\sum_{k=1}^{N-1} e^{kt} = N + S_1(N)t + \frac{S_2(N)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{S_n(N)}{n!}t^n + \cdots。$$

但上面等式的左邊是一等比級數,

$$\sum_{k=1}^{N-1} e^{kt} = \frac{e^{Nt}-1}{e^t-1} = \frac{e^{Nt}}{e^t-1} - \frac{1}{e^t-1}。$$

因而所得到的初步結果是

$$S_m(N) = m! \times \Big\{\text{函數}\frac{e^{Nt}}{e^t-1} - \frac{1}{e^t-1}\ \text{在}t=0\ \text{展開式中}\ t^m\ \text{的係數}\Big\}。$$

現剩下的問題是如何展開函數 $\frac{e^{Nt}}{e^t-1}$ 與 $\frac{1}{e^t-1}$, 這也是當年雅各伯努利所走過的路。

2、伯努利數

西元1735年, 尤拉發現了正整數的倒數平方和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}。$$

所用的方法是正弦函數之根與係數的關係。函數 $\frac{\sin x}{x}$ 的零位在 $x=\pm n\pi$ $(n\neq 0)$, 而可表示爲無窮乘積式

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty}\Big[1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\Big]。$$

而另一方面, 這函數的冪級數展開式爲

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} + \cdots。$$

比較的係數得出

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2} = -\frac{1}{3!},$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}。$$

他持續計算到十二次方的倒數和且進一步推斷

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}} = \frac{(-1)^{m-1}(2\pi)^{2m}B_{2m}}{2(2m)!}。$$

這 B_{2m} 是一有理數, 稱爲伯努利數, 首度被雅各伯努利(Jacques Bernoulli,1654 ∼ 1705) 引用於表示 $S_m(N)$, 其定義式爲

$$\frac{t}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n t^n}{n!},\ |t|<2\pi。$$

比較恆等式

$$t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n t^n}{n!}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{t^m}{m!},$$

得出 $B_n(n=0,1,2,\ldots)$ 所滿足的遞迴定義式爲

$$\begin{cases} B_0 = 1, \\ \binom{n}{1}B_{n-1}+\binom{n}{2}B_{n-2}+\cdots+\binom{n}{n}B_0, n\geq 2。\end{cases}$$

如

$$B_1=\frac{1}{2}, B_2=\frac{1}{6}, B_3=0, B_4=-\frac{1}{30}。$$

上面的遞迴定義可寫成 $(B+1)^n = B^n$, 用二項式定理展開 $(B+1)^n$, 消去 B^n 得

$$\binom{n}{1}B^{n-1}+\binom{n}{2}B^{n-2}+\cdots+\binom{n}{n}B^0 = 0,$$

把上面式子中 B 的上標換成下標即是上面的定義式。這種換上標爲下標的手法也用於無窮級數上, 特別是用於

$$e^{Bt} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B^n t^n}{n!}$$

上標換成下標後即是伯努利數的定義式。使用這種記號, 則

$$\frac{t}{e^t-1}=e^{Bt}$$

如此 $t=e^{(B+1)t}-e^{Bt}$, 因而 $(B+1)^n=B^n$, $n\geq 2$。

現回到 $S_m(N)$ 的求和問題上。

$$\begin{aligned}\frac{e^{Nt}}{e^t-1}-\frac{1}{e^t-1}&=\frac{1}{t}\Big\{\frac{te^{Nt}}{e^t-1}-\frac{t}{e^t-1}\Big\}\\&=\frac{1}{t}\{e^{Nt}e^{Bt}-e^{Bt}\}\\&=\frac{1}{t}\{e^{(B+N)t}-e^{Bt}\}\end{aligned}$$

故這函數在 $t=0$ 展開式中 t^m 的係數爲

$$\frac{1}{(m+1)!}\{(B+n)^{m+1}-B^{m+1}\}$$

即

$$S_m(N)=\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}B_kN^{m+1-k}。$$

注意到 B_m 出現在 $S_m(N)$ 中的最後一項, 可明顯看出

$$B_m=\lim_{N\to 0}\frac{S_m(N)}{N}。$$

3、里曼 zeta 函數

對 $s>1$, 里曼 zeta 函數的定義爲

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}。$$

尤拉所得到的式子其實剛好就是 $\zeta(s)$ 在正偶數的取值。這函數可經由解析延拓而定義在複數平面上。現我們問另一問題: 這函數在負整數的取值爲何? 現我們運用前面的類似手法, 由

$$e^{-kt}=1-kt+\frac{k^2t^2}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^nk^n}{n!}t^n+\cdots,$$

令 $k=1,2,\ldots,N-1$, 並相加得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N-1}e^{-kt}=&(N-1)-S_1(N)t+\frac{S_2(N)}{2!}t^2\\&+\cdots+\frac{(-1)^nS_n(N)}{n!}t^n+\cdots。\end{aligned}$$

但當 $t>0$ 時, $\sum_{k=1}^{\infty}e^{-kt}$ 是一收斂的等比級數, 其和是

$$\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}=\frac{1}{e^t-1}。$$

因而

$$\begin{aligned}\zeta(-m)&=(-1)^m m!\times\Big\{\frac{1}{e^t-1}\text{在}t=0\\&\qquad\text{展開式中 } t^m \text{ 的係數}\Big\}\\&=(-1)^m m!\cdot\frac{B_{m+1}}{(m+1)!}\\&=(-1)^m\frac{B_{m+1}}{m+1}。\end{aligned}$$

注意到

$$F(t)=\frac{t}{e^t-1}+\frac{t}{2}$$

是一偶函數, 其冪級數展開中不會出現奇數項, 這表示 $B_{2k+1}=0$,$k=1,2,3,\ldots$, 因而

$$\zeta(-2k)=\frac{B_{2k+1}}{2k+1}=0。$$

這些負偶數的零點稱爲 $\zeta(s)$ 的顯然零點。又 $\zeta(s)$ 滿足泛函方程式

$$\begin{aligned}&\pi^{-s/2}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\zeta(s)\\&=\pi^{-(1-s)/2}\Gamma\Big(\frac{1-s}{2}\Big)\zeta(1-s)。\end{aligned}$$

特別是

$$\zeta(1-2m)=-\frac{B_{2m}}{2m}\Leftrightarrow$$
$$\zeta(2m)=\frac{(-1)^{m-1}(2\pi)^{2m}B_{2m}}{2(2m)!}。$$

有名的里曼假設 (尙未得證) 即斷言: $\zeta(s)$ 的其他非顯然零點一定落在直線 $\mathrm{Re}\ s=\frac{1}{2}$上。

4、費馬的定理

費馬 (Pierre Fermat,1601 ～ 1665) 是數論上引起爭議最多的人物, 他在邊緣筆記上寫下了費馬最後定理: 對任意正整數 $n>2$, 不定方程式 $x^n+y^n=z^n$ 沒有全不為零的整數解。西元1993年, 美國普林斯頓大學數學系教授威爾斯提出一很長的證明, 企圖在他40歲之前一舉拿下數學界的最高獎項-Fields Medal。但事不從人願, 他的證明中被發現有瑕疵; 直到兩年後, 他跟他的學生理查泰勒才提出完整的證明。但這時他已過40歲的生日喪失得獎的資格。

費馬在數論上的一有名定理, 被納入代數教科書中, 通稱為費馬小定理。

費馬小定理: 設 p 是質數,a 是與 p 互質的整數, 則

$$a^{p-1}\equiv 1(\operatorname{mod} p)。$$

定理證明: $a,2a,\ldots,(p-1)a$ 除以 p 的餘數兩兩相異, 且均不為0, 因而是 $1,2,\ldots,p-1$ 互換次序的另一排列, 故

$$a\cdot 2a\cdots(p-1)a\equiv 1\cdot 2\cdots(p-1)\ (\operatorname{mod} p)$$

即

$$a^{p-1}(p-1)!\equiv(p-1)!(\operatorname{mod} p)。$$

$(p-1)!$ 與 p 互質, 可從等式中消去而得出

$$a^{p-1}\equiv 1(\operatorname{mod} p)。$$

這定理被尤拉重新證明並加以推廣: 若 a 是與正整數 n 互質的整數, 則 $a^{\varphi(n)}\equiv 1(\operatorname{mod} n)$, 其中

$$\varphi(n)=n\prod_{p|n}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)$$

即是有名的尤拉函數, 表示 $1,2,\ldots,n$ 中與 n 互質的整數個數, 是一乘性函數:

$$(m,n)=1\Rightarrow\varphi(mn)=\varphi(m)\varphi(n)$$

這性質的證明借助於有名的中國餘數定理:

中國餘數定理: 設 $m_1,m_2,\ldots,m_k$ 是 k 個兩兩互質的正整數, 對任意 k 個整數 $a_1,a_2,\ldots,a_k$, 底下的同餘式有解

$$x\equiv a_1(\operatorname{mod} m_1),x\equiv a_2(\operatorname{mod} m_2),$$
$$\ldots,x\equiv a_k(\operatorname{mod} m_k)。$$

當 $k=2$ 時, 解同餘式

$$x\equiv a_1(\operatorname{mod} m_1),x\equiv a_2(\operatorname{mod} m_2)$$

相當於求整數 u,v, 使得 $x=a_1+m_1u=a_2+m_2v$ 即

$$m_1u-m_2v=a_1-a_2$$

因 m_1,m_2 互質, 這不定方程式有解。對一般的情形, 先分別解出

$$\begin{cases}y\equiv 1(\operatorname{mod} m_1)\\ y\equiv 0(\operatorname{mod} m_2\cdots m_k)\end{cases}$$

$$\begin{cases} y \equiv 1 (\bmod m_2) \\ y \equiv 0 (\bmod m_1 m_3 \cdots m_k) \end{cases} \cdots$$
$$\begin{cases} y \equiv 1 (\bmod m_k) \\ y \equiv 0 (\bmod m_1 m_2 \cdots m_{k-1}) \end{cases}$$

若所得解分別爲 $y_1, y_2, \ldots, y_k$ 則 $x = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots a_k y_k$ 是所求的解。

庫默 (E. Kummer,1810 ∼ 1893) 幾乎把一生完全耗在費馬的最後定理上, 他發現代數整數中的因式分解理論, 而創出交換環中的理想(ideal), 其目標完全也擺在這定理的證明。他其實證明了部份的定理。

> *"若 p 是規則質數, 則 $x^p + y^p = z^p$ 沒有顯然的整數解"。*

而到底如何判定一質數是規則或不規則呢? 他也創出獨步的判別方法:

> *p 是規則質數 $\Leftrightarrow$ p 不能整除 $B_2, B_4, \ldots, B_{p-3}$ 之一的分子。*

他的腹案是先證明規則質數成立, 若有辦法證明不規則質數是有限個, 再個個擊破; 但很不幸地, 他無意中觀察到伯努利數之間的同餘式:

$$\frac{B_m}{m} \equiv \frac{B_{m+p-1}}{m+p-1} (\bmod p)。$$

利用這同餘式可很快證出不規則質數無窮多個。這也使得他的希望破滅, 但這同餘式卻使他在數論上佔著很大的地位。

5、史達特定理與庫默同餘式

觀察到對任意質數 p, 正偶數 m 以及任意整數 a

$$a^{m+p-2} \equiv a^{m-1} (\bmod p)$$

若能把 a 從1加到無窮大, 豈不得出

$$\zeta(2-m-p) \equiv \zeta(1-m) \ (\bmod p)。$$

但

$$\zeta(2-m-p) = -\frac{B_{m+p-1}}{m+p-1},$$
$$\zeta(1-m) = -\frac{B_m}{m}。$$

故庫默所發現的同餘式是當 $p-1$ 不是 m 的因數時,

$$\frac{B_m}{m} \equiv \frac{B_{m+p-1}}{p-1} (\bmod p)。$$

注意到 B_m 充其量只是一有理數, 而可表爲分子、分母互質的最簡分數, 史達特定理告訴我們出現於 B_m 分母的質因數是滿足 $p-1$ 可整除 m 的質數, 且

$$B_m = -\sum_{(p-1)|m} \frac{1}{p} + \text{整數},$$

這也表示 B_m 分母的質因數不會重覆。

庫默的同餘式則爲

> *若 p 是奇質數,m 是正偶數且 $p-1$ 不是 m 的因數, 則*
> $$\frac{B_{m+p-1}}{m+p-1} = \frac{B_m}{m} (\bmod p)。$$

現利用這同餘式證明不規則質數無窮多。

定理: 不規則質數的個數無窮多。

證明 設 $p_1, p_2, \ldots, p_N$ 是一組有限多個不規則質數, 現我們要找出一異於這些質數的不規則質數, 取

$$n = r(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_N-1)$$

其中 r 是一待定的正整數, 因

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{B_{2k}}{2k}\right| = \infty,$$

存在一足夠大的正整數 r, 使得 $|\frac{B_n}{n}| > 1$, 因而 $\frac{B_n}{n}$ 的分子有一質因數 p, $p-1$ 一定不是 n 的因數, 否則 p 出現在 B_n 的分母而被約分掉, 故 p 異於 $p_1, p_2, \ldots, p_N$。令 $n = m + a(p-1)$, 由

$$\frac{B_m}{m} \equiv \frac{B_n}{n} (\operatorname{mod} p),$$

知 p 也整除 B_m 的分子, 但 $m \le p-3$, 故 p 不是規則質數。

現有人反問: 到底規則質數的個數是有限或無窮多個? 這又是另一公開的問題。

6、發散級數的修正取值

現我們補充說明得到里曼 zeta 函數 $\zeta(s)$ 在負整數取值的詳細過程, 對任意非負整數 m, 級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^m$$

是一發散級數且發散到正無窮大。現把這發散級數的第 n 項乘上 $e^{-nt}(t>0)$ 而成爲

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^m e^{-nt}$$

對這修正過的級數, 一定收斂且其近似值爲

$$\int_0^\infty x^m e^{-xt}dx = \frac{m!}{t^{m+1}}。$$

而極限值

$$\lim_{t\to 0}\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} n^m e^{-nt} - \frac{m!}{t^{m+1}}\Big\}$$

一定存在, 這值即定爲 $\zeta(-m)$。

另一方面, 由

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt} = \frac{1}{e^t-1} = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n t^{n-1}}{n!}$$

式子兩邊同時對 t 微分 m 次得

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^m e^{-m} = \frac{m!}{t^{m+1}} + (-1)^m \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{n} \cdot \frac{t^{n-m+1}}{(n-m-1)!}$$

故

$$\begin{aligned}\zeta(-m) &= (-1)^m \frac{B_{m+1}}{m+1} \\ &= \Big\{\text{函數} \sum_{n=1}^{\infty} n^m e^{-nt} \text{在} t=0 \text{之漸近展開式的常數項}\Big\} \\ &= \Big\{\text{函數} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt} \text{在} t=0 \text{之漸近展開式的} t^m \text{常數項}\Big\} \times \{(-1)^m m!\}\end{aligned}$$

上面的處理手法也適用於一般的 zeta 函數, 特別是由多項式所定出的 zeta 函數, 如

$$\sum_{n_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{n_r=1}^{\infty}(n_1+n_2+\cdots+n_r)^{-s}$$

在負整數的取值爲

$$(-1)^n m! \times \Big\{\sum_{n_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{n_r=1}^{\infty} e^{-(n_1+n_2+\cdots+n_r)t} = \Big(\frac{1}{e^t-1}\Big)^r \text{在} t=0 \text{之漸近展開式中 } t^m \text{ 的係數}\Big\}。$$

7、伯努利恆等式

凡有關伯努利數之間的關係式通稱爲伯努利恆等式。這裡介紹一導出等式的新方法。

考慮級數

$$Z(s)=\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}(n_1+n_2)^{-s}。$$

組合 n_1+n_2 爲另一新變數 n 時, 這級數爲

$$\begin{aligned}Z(s)&=\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)n^{-s}=\sum_{n=1}^{\infty}nn^{-s}-\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}\\&=\zeta(s-1)-\zeta(s)。\end{aligned}$$

因而這級數在負整數 $s=2-2n(n>1)$ 的取值爲

$$Z(2-2n)=\zeta(1-2n)-\zeta(2-2n)=-\frac{B_{2n}}{2n}。$$

另一方面, 我們可以透過前面討論過的方法求 $Z(2-2n)$, 由

$$\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}e^{-(n_1+n_2)t}=\frac{1}{(e^t-1)^2},$$

知

$$\begin{aligned}Z(2-2n)=(-1)^{2n-2}(2n-2)!\times\Big\{\\ \frac{1}{(e^t-1)^2}\text{展開式中 } t^{2n-2} \text{ 的係數}\Big\}。\end{aligned}$$

又由

$$\Big(\frac{t}{e^t-1}\Big)\Big(\frac{t}{e^t-1}\Big)=e^{Bt}e^{Bt}=e^{(B+B)t},$$

知這係數爲

$$\frac{(B+B)^{2n}}{(2n)!}。$$

亦即

$$\frac{1}{(2n)!}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}B_{2k}B_{2n-2k}。$$

因而得出恆等式

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2n(2n-1)}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}B_{2k}B_{2n-2k}\\&=-\frac{1}{2n}B_{2n}。\end{aligned}$$

而可化簡爲

$$\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n}{2k}B_{2k}B_{2n-2k}=-(2n+1)B_{2n}。$$

這又是尤拉的另一傑作。

參考資料

1. Bruce C. Berndt, Ramanujan's notebooks, I, II, Springer-Verlag, 1985, 1989.
2. Z. I. Borevich and I. R. Shafarevich, Number Theory, Academic Press, 1966.
3. Minking Eie and K. F. Lai, Bernoulli identities, Part I and Part II, Revista Matematica Iberoamericana, 14(1998), 167-213.
4. Andre Weil, Number Theory, Birkhauser, 1983.

—本文作者任教於國立中正大學數學系—