

數學巨擘高斯(Carl Fridrich Gauss)(上)

顏一清



1850年代的高斯

簡介：高斯（1777-1855）出生於德國 Brunswick 一窮困人家。他從小就有算學異稟。他的才智受到當地 Brunswick[註1]公爵的關注，就一直資助他完成大學教育，取得博士學位，並出版數學巨著「整數論研考」(“Disquisitiones Arithmeticae”)[註2]。

高斯年冠十九，就在數學上有登峰造極的表現：他突破數學史上二千多年的沈寂，以直尺與圓規作出正十七邊形的圖形來。他並

維持如此傑出的研究品質達半個世紀之久。他的研究範圍廣泛，遍及純數學與應用數學，研究內容新穎、深入。這使他成為十九世紀科學領域上最突出的人物。更因他在曲面學上的研究，導引 Riemann 創造 Riemann 幾何學，並誘發二十世紀初 Einstein 作出一般相對論來。

Gauss 就業以後一直定居在 Göttingen。他去世後不久，Göttingen 地方的領主 Hanover 王 George V [註3] 為表彰他的豐功偉業敕令鑄造一個七公分直徑的紀念章贈與 Gauss 家族。紀念章邊緣以拉丁文刻著“Georgius V. rex Hannoverage Mathematicorum principi” (Hanover 君主喬治五世向數學家之王致敬)[註4]。從此，稱呼高斯為「數學之王」的名號不脛而走。

一. 身世

Johann Friedrich Carl Gauss (洗禮名，後來他常用 Carl Friedrich Gauss) 在 1777年4月30日出生於 Brunswick 的一貧窮勞工人家。他的父親叫做 Gebhard Diet-

rich Gauss(1744-1808), 母親是 Dorothea Benze (1743.6.18-1839.4.18)。

Gauss的祖先姓 Goos, 是德國北部 Völkenrode 村的新教徒人家。Carl的祖父 Jürgen Goos 是曾祖父 Heinrich Goos 三次婚姻中最後第二個兒子, 在家鄉他沒有什麼份量, 只能往外地求發展。他結婚後於 1739年到 Brunswick-Wolfenbüttel 公國的首都 Brunswick 定居, 改姓 Gauss。起先由於沒有置產, 在當時的同業工會的限制下, 只能做零工糊口。好不容易貸款購得一所小房子居住了十四年, 生育三男一女。後來換房子到 Wilhelm 街30號。1774年7月5日債未還清, 他就因肺病去世。他的妻子早他三個月故去。長子 Gebhard 一向幫忙他父親做工, 就由他負責償債。不過他也跟弟妹談好, 房子歸他繼承, 弟妹分得一些現款 (借來的) 做爲補償。這些債 Gebhard 費了二十五年才還清。

Gebhard 在1768年與 Dorothea Vernecke 結婚, 第二年1月14日生子 Johann Georg Heinrich。1775年9月5日他的妻子因肺病去世。1776年4月25日 Gebhard 與鄰村的 Dorothea Bentze 再婚。1777年4月30日他們在 Wilhelm 街30號的家裡生下數學天才 Carl。Carl是 Dorothea 唯一的孩子。Dorothea 在結婚前當過7年女傭。她沒有正式受過教育, 不會書寫, 印刷體字勉強可以唸。

Gebhard做過各式各樣的工作, 最後十五年他只從事造園業。由於他會書寫, 也會計算, 他當過一家葬儀社的會計。

Carl曾經向他再婚對象 Minna Waldeck 描述過他父母親:「父親是一位老實、忠厚的人, 在外頭他值得別人的尊敬。但是在家裡他是個暴君。好在我很早就不用依靠他, 彼此間的衝突較少。母親個性堅強、明朗、善良又聰明。在我與父親有衝突的時候, 她很袒護我。我很敬愛她。」

Carl的外祖父是位石工, 因工作使然的空氣污染, 30歲便得癆病去世了。Carl有一位舅父 Johann Friedrich, 他自學成精巧的織緞人才。這位舅舅與 Carl 很親, 他常會講一些話引起 Carl 的好奇心, 他覺得 Carl 好聰明。當他在1809年去世時 Carl 悲嘆:「一位生就的天才過去了。」從父母親的祖先來看, 他們都是一些農工階級的人, 子孫能出 Carl 這樣的神童可說是個異數。

二. 幼少年時代

有關 Carl Friedrich Gauss 小時候的故事都是 Gauss 晚年向追隨他的人們說的。他記性好極, 而且重複敘述中並無出入的情形, 所以他說的話可信度大。

Gauss 很小的時候家門前有一條濠溝 (後來圍起來) 直通 Ocker 河。春天一到, 濠溝裡漲滿了水。有一次小 Carl 在溝邊玩耍時掉進溝裡, 在他溺斃前被路過的工人救起, 逃過一劫。

在夏天 Gebhard Gauss 是一家磚瓦工廠的督工, 到星期六得給工人們發薪。有一回他要發薪, 3歲的小 Carl 站起來說:「爸爸, 算錯了。」在眾人目瞪口呆之下重算的結果證實小 Carl 是對的。

Carl 7 歲時進 St. Cathrine 小學。老師是 J. B. Büttner。班上有百來個學生。老師在屋頂低，地板凹凸不平的教室裡拿著鞭子來回走動。鞭子是老師教、懲兩用的。Carl 在這這樣的環境下平安無事過了兩年。Carl 在九歲左右時在算術課 Büttner 要學生們「寫出 1 到 100 的數字來，並求出它們的總和」。寫好的同學把運算用的石盤（當時紙張還是奢侈品）翻下放在老師桌子上。再來交的同学依次疊上石板。老師想，出這樣的考題他可以清靜一下了吧。沒想到 Carl 一下子就把石盤拿去老師桌上放了，說：「我交了。（Brünswick 土語，Liggest se!，英譯：there it lies）」其他小朋友汗流夾背地忙著運算。Carl 靜坐著，不理會老師奇怪的眼神。結果大部份的小朋友都錯了，因而挨了打。Carl 的石盤只見 5050 這個數字。他給老師的解釋是： $1 + 100 = 101$, $2 + 99 = 101$, \dots , $50 + 51 = 101$ 。所以 $1 + 100$ 等於有 50 對 101，答案便是 5050。

這件事的發生有它象徵性的意義。終其一生 Gauss 做出來的結果都是簡潔而正確的。但是眾人須要它有詳盡的解釋。

Carl 的親戚們聽到了這件事後直搖頭。因為依據俗語，神會讓祂寵受的人夭折，這孩子的壽命恐怕不長。

老師 Büttner 經歷這件事後覺得他再也沒有什麼可教給 Carl 了。於是特地從 Hamburg 為 Carl 買一些好的算學書如 Remer 著「Arithmetica」（在扉頁上有 Gauss 的簽名及 1786 年 12 月 6 日字樣），或 Hemeling 的「小算術計算書」。這兩本書都有被頻繁使用過的痕跡與許多小孩子計算的字跡。

Büttner 有一位助手 Martin Bartels (1769-1836)。他的工作是替小朋友削鵝毛筆，改正他們的書寫等。他是白鉛細工匠的兒子，住在 Carl 家附近。可能是 Büttner 或是 Bartels 跟 Carl 的父親 Gobhord 商量過 Carl 往後的教育問題。做父親的認為 Carl 與異母兄 Georg 一樣，將來走定他自己的路子：當工人。他那有錢供兒子唸書呢？對方說可能找得到高貴人士出資給 Carl 讀書。從此頑固的父親在晚上不再要 Carl 織一定量的亞麻絲，甚至把紡車帶到後院劈成塊，當材燒了。取而代之的是 Bartels 與 Carl 常在一起挑燈夜讀。他們交成好朋友。Bartels 1788 年後又去讀書，專攻數學，後來成為 Kasan 大學的教授。

Gauss 在 11 歲時便能導出二項定理的一般展開式，並對無限級數的展開很熟稔。於是神童 Gauss 的名字傳遍 Brunswick。

在 1788 年經由 Büttner 或 Bartels 說服不情願的父親，Gauss 終於進入 Brunkwick 的預科學校 Katharineum。在那兒學生的年齡相若。Gauss 早些時說的地方德語也改正成官方德語了。數學老師 Helling 第一次看過 Gauss 交的作業便批示這麼優異的學生用不著再來上他的課。Gauss 在那個時期又得到年長朋友 Bartels 與 J. H. J. Meyerhoff (1770-1812) 的幫助自學拉丁語與希臘語。這些古代語言對唸古典書籍是必需的。

有一天 Gauss 看書看迷了，走進 Brunswick 公爵的御花園而不自覺。倒是公爵夫人看到了他，夫人訝異那麼一個小孩難道看得懂他拿著的書？一問之下才知道真的看得懂。改天她教僕人找 Gauss 過來給公爵

看。公爵發現這個內向、拘謹的14歲小孩的確很聰明。

Bartels在1788年進入 Brunswick 的 Caroline 高等學校，認識了那裡的數學教授 E. A. W. Zimmermann (1743-1815)。Zimmermann還兼 Brunswick 公國參事，跟公爵交誼很深。Bartels介紹 Gauss 給 Zimmermann。後者便與 Brunswick 公爵討論 Gauss 這個小孩。終於在1791年公爵引見 Gauss，並決定當年6月起給 Gauss 10個 thaler(德國舊銀幣)的年金外加一些其他用費。他還獲得一些書本做獎賞，其中有一本是 Schulze 的「對數表」。Gauss 常常使用它，還簽上「Gauss, 1791」。

當時有習俗，貴族或是有錢的商人會資助家境貧困人家的資優子弟讀書，以備將來他們用材之需。

Carl 既然得到 Brunswick 公爵的年金唸書，做父親的 Gobhard 再也沒有理由反對他升學了。

1792年2月18日至1795年間 Gauss 在 Caroline 高等學校學習。這所學校在當時是德國最佳學府之一。學校的學科新穎，教授優秀，圖書典藏豐富。它的教學構想除了因應生活的實際需要外還教育學生們成為新文化的舵手，並著力培育學生們成為有自由思想與高貴情操的人。從德國的這一類學校，十八、九世紀人材輩出。

跟 Gauss 一樣是窮人家的孩子而得到資助進入這所學校的人當時有 Bartels, K. Ide (與 Gauss 同行，早逝)，Meyerhoff (訂正 Gauss 在「Disquisitiones Arithmeticae」中的拉丁文) 等人。

Gauss在 Caroline 高等學校期間讀了許多古典文學名著，因此他的文學素養很好。他唸的數學名著有 Euler, Lagrange 與 Newton 等人的著書。終其一生 Gauss 對 Newton 非常尊崇。在著述方面他也學習 Newton 的作風。[1]

這時候法國大革命(1789年)已然發生，但是在拿破崙揮兵攻打鄰國以前德國的一切情況還沈睡在十七世紀以來的半封建制度裡。[2]

很小 Gauss 就喜愛做數字遊戲。他算得又快又好。在1792-1793年間 Gauss 做質數分佈的研究。他把整數以千為等級找出其間所含的質數個數。按照 Alexandria 時代的 Eratosthenes (276-194 B.C.)，整數 p 所含質數不大於 \sqrt{p} ，並由篩選法可求得質數個數。而 Gauss 則由觀察得出質數個數的增加率 $D(n) = \pi(n) - \pi(n - 1000)$ ($\pi(n) : 2$ 至 n 間質數個數, $n \geq 1000$) 與 $\frac{1}{\log_e n}$ 成正比。因此由幾何圖形來看， $\pi(x) \sim \int_2^x \frac{dn}{\ln n}$, $x \in N$ 。Gauss 也想過 $\pi(x) \sim \frac{x}{\log_e x}$ 的情形，但認為後者的表達方式雖然比較簡單，誤差卻比較大。Gauss 在那時候又得到另一本對數表，是瑞士 Johann Lambert 寫的。再加上他自己的運算(他對對數熟檢得很)。這樣才獲得上述的結果來。往後他還常說「對數中有詩情」呢！但他並沒有發表質數分佈的結果。

1798年法國大數學家 Adrien-Marie Legendre (1752-1833) 發表了較準確的質數分佈公式： $\pi(x) \sim \frac{x}{\log_e x - 1.08366}$, $x \in N$ 。命運的作弄使得往後 Gauss 與 Legendre 所發現的數學內容常出現交錯在一起的情形。

三. 大學時代

Gauss 並沒有順從 Brunswick 公爵的意思選讀公爵領地內的 Helmstedt 大學，而打算赴 Brunswick 約 65 哩南方的 Göttingen 大學就讀，公爵還是答應了。

Göttingen 大學在 1737 年由英王兼 Hanover 大公 George II 創辦，故這所大學又以英王的名字 George Augusta 稱呼。它的模式仿照 Oxford 與 Cambridge，比其他德國大學有較好的環境與條件，也比較不受政府與教會的干預。Gauss 喜歡那裡的學術自由的風氣與豐富的館藏，所以選擇去那兒唸大學。

Gauss 在 1795 年 10 月 5 日註冊，成為 Göttingen 大學數學系學生，這時候他擁有年金 158 thaler 與與伙食費。他對將來的出路感到彷徨。語文與數學都是他喜愛的，而學語文以後出路較好。

在大學第一年他借的書有 25 本。其中 20 本是文科的書，只有 5 本是數學書。

1796 年 3 月 30 日是 Gauss 生涯中決定性的一天。這一天起開始寫他那出名的科學日記。他把他的發現依次記載到 1814 年 7 月 9 日 (日記在 1898 年從 Gauss 在德國唯一 (也是唯一他見過) 的孫子 Carl August 在 Hamlin 家中找出)。3 月 30 日的日記用拉丁文寫著「等分圓周的原理以及用幾何方法十七等分圓分等等。3 月 30 日, Brünswick」據說從這一天開始他決定從事數學的研究而語文成為他終生喜愛學習的一個嗜好。

Gauss 對發現正十七邊形的幾何作法的記載是：「在 Brünswick 家裡的一個假日，

我思考 $\frac{x^p-1}{x-1} = 0$ 的諸根之間的算術關係。隔日早上還沒有起床，我已經很清晰地看到我需要的關係式。我就立刻把它應用在正 17 邊形上。計算的結果證實這個方法是對的。」

1796 年 6 月 1 日的「一般學藝新聞」中有 Gauss 的告示：「一般的幾何初學者都知道怎樣作出正多邊形，如等邊三角形，正五邊形，正十五邊形或是把它們雙倍的正多邊形。在 Euclid 的時代大家就已經可以做到這些了。而從那時候起大家認為初等幾何學終止在這個地步。至少我不知道有人成功地邁出那個界線。

因此我的新發現有特別的意義。我發現不只是上述那些正多邊形，還有更多的正多邊形可用幾何法 (只使用直尺與圓規) 作出。作正十七邊形的方法只是一個包括更多內容的定理的特例而已。我還沒有完全證出這個發現，等到完成後我會公開它。—Göttingen 大學數學研究學生 C. F. Gauss。」

這是 Gauss 一生中僅有的一次預告他的發現。後來「等分圓周」出現在 Gauss 巨著「整數論研考」第七章，正十七邊形的頂點求法成為這一章的一個例子。這本書因經費與出版商的問題遲延到 1801 年 9 月 29 日才出版，一出版就被搶購一空，造成一時的轟動。

1891 年 1 月 6 日 Gauss 從 Göttingen 給他的學生兼朋友 Gerling 信，說研究「整數論研究」所帶給他的喜悅是他研究數學當中至高無上的。即使多美的天文學上的發現所帶給他的喜樂都無法與它相比。信中他給 Gerling 簡述正十七邊形的求法：

令 $17\varphi = 2\pi$, 設

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi + \cos 4\varphi &= a \\ \cos 2\varphi + \cos 8\varphi &= b \\ \cos 3\varphi + \cos 5\varphi &= c \\ \cos 6\varphi + \cos 7\varphi &= d \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} a + b &= e \\ c + d &= f \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

因

$$\begin{aligned} 2(\sin \frac{\varphi}{2})(e + f) &= \sin \frac{17\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \\ &= -\sin \frac{\varphi}{2} \end{aligned} \quad (3)$$

而得

$$e + f = -\frac{1}{2} \quad (4)$$

又由簡單的運算

$$\left. \begin{aligned} 2ab &= e + f = -\frac{1}{2} \\ 2ac &= 2a + b + d \\ 2ad &= b + c + 2d \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} 2bc &= a + 2c + d \\ 2bd &= a + 2b + c \\ 2cd &= e + f = -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

故

$$2(ac + ad + bc + bd) = 4(a + b + c + d) \quad (7)$$

即

$$(a + b)(c + d) = 2(e + f) \quad (8)$$

由 (2), (4) 和 (8) 得

$$ef = -1 \quad (9)$$

由 (4), (9), e, f 成爲二次方程式

$$x^2 + \frac{x}{2} - 1 = 0 \quad (10)$$

的兩根, 而從 (1) 式易見 $e > 0 > f$. 故

$$e = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}, \quad f = \frac{-1 - \sqrt{17}}{4} \quad (11)$$

由 (2), (5), a, b ($a > 0 > b$) 爲二次方程式

$$x^2 - ex - \frac{1}{4} = 0 \quad (12)$$

的兩根, 即

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{e + \sqrt{1 + e^2}}{2} \\ &= \frac{1}{8}(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}) \\ b &= \frac{1}{8}(-1 + \sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

而 c, d ($c > 0 > d$) 則由 (2), (6), 爲

$$x^2 - fx - \frac{1}{4} = 0 \quad (14)$$

的兩根, 故

$$\left. \begin{aligned} c &= \frac{f + \sqrt{1 + f^2}}{2} \\ &= -\frac{1}{8}(1 + \sqrt{17} - \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}) \\ d &= -\frac{1}{8}(1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

因

$$2 \cos \varphi \cos 4\varphi = \cos 3\varphi + \cos 5\varphi = c, \quad (16)$$

由 (1), (16), $\cos \varphi, \cos 4\varphi$ ($\cos \varphi > \cos 4\varphi > 0$) 爲二次方程式

$$x^2 - ax + \frac{c}{2} = 0 \quad (17)$$

的兩根, 故

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - 2c}) \\ \cos 4\varphi &= \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - 2c}) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

因

$$\begin{aligned} 2a^2 &= 2(\cos \varphi + \cos 4\varphi)^2 \\ &= (1 + \cos 2\varphi) + 2(\cos 3\varphi + \cos 5\varphi) \\ &\quad + (1 + \cos 8\varphi) \\ &= 2 + b + 2c \end{aligned} \quad (19)$$

由 (18), (19) 得

$$\begin{aligned} \cos \frac{2\pi}{17} &= \cos \varphi \\ &= \frac{1}{16} \left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \right. \\ &\quad \left. + 2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}} \right) \end{aligned} \quad (20) \quad [3]$$

Gauss 的解法告訴我們由 4 個二次方程式可求出 $\cos \frac{2\pi}{17}$ 的數值。

因此, 若令二次方程式的一般式為

$$x^2 - \alpha x + \beta = 0, \quad (21)$$

則 (21) 式的兩根為圓 \bar{C} :

$$x^2 - \alpha x + y^2 - (1 + \beta)y + \beta = 0 \quad (22)$$

與 x 軸相交的兩個座標。而 \bar{C} 有兩端點為 $(0, 1), (\alpha, \beta)$ 的直徑。

由這些資料, 我們可以作正十七邊形如下:

考慮以 $A = (0, 1), B = (-\frac{1}{2}, -1)$ 為直徑的圓 C_1 :

$$x^2 + \frac{x}{2} + y^2 - 1 = 0. \quad (23)$$

則 C_1 與 x 軸相交成第 (10) 式。令 C_1 與正 x 軸、負 x 軸分別相交於 C, D 點。則 $\overline{OC} = e, \overline{OD} = f$ 。

以 $A = (0, 1), E = (e, -\frac{1}{4})$ 為直徑作圓 C_2 :

$$x^2 - ex + y^2 - \frac{3}{4}y - \frac{1}{4} = 0, \quad (24)$$

則 C_2 與 x 軸相交成第 (12) 式。令 C_2 與正 x 軸的交點為 F , 則 $\overline{OF} = a$ 。

再以 $A = (0, 1), G(f, -\frac{1}{4})$ 為直徑作圓 C_3 :

$$x^2 - fx + y^2 - \frac{3}{4}y - \frac{1}{4} = 0. \quad (25)$$

則 C_3 與 x 軸相交成第 (14) 式, 令 C_3 與正 x 軸的交點為 H , 則 $\overline{OH} = c$ 。

今以 $A = (0, 1), I(a, \frac{c}{2})$ 為直徑作圓 C_4 :

$$x^2 - ax + y^2 - (1 + \frac{c}{2})y + \frac{c}{2} = 0, \quad (26)$$

則 C_4 與 x 軸相交成第 (17) 式, 令 C_4 與 x 軸的大值交點為 J , 則 $\overline{OJ} = \cos \frac{2\pi}{17}$ 。

最後, 以 0 點為圓心作單位圓 $C_5: x^2 + y^2 = 1$ 而與正 x 軸相交於 K , 過 J 作 x 軸的垂線交 C_5 於 L 點, 則 $\angle JOL = \frac{2\pi}{17}$ 。

在 C_5 圓周上取 L_m 點, 以逆時針方向取 $\widehat{L_m L_{m+1}} = \widehat{L L_1} = \widehat{K L}$, $m = 1, 2, \dots, 15$, 則多邊形 $K L L_1 \cdots L_{15} K$ 即為所求正十七邊形。

Göttingen 大學的學生。我們一直都有友善的接觸。我從來不跟他相比。他很謙虛，也不誇示。我們幾年在一起，我都沒有看出他的偉大。很可惜，我不懂得打開這一本無言、無題的書本來翻閱。我不知道他懂得多少，他倒看清楚我，但高估了我，不認為我有多渺小。我們分享對數學的熱愛與對道德的信念。我們時常在一起散步，各自浸淫在自己的思考中，幾個小時不交談一言。

Guass在 Göttingen 大學雖然唸數學，可與天文學教授 Seyffer 熟悉，過後也一直有書信往來。他也喜歡物理學家 Lichtenberg，語言學家 Heyne(非詩人 Heyne)，但不喜歡數學教授 W. Kästner。

四. 「整數論研考」的問世

1998年9月底回到 Brunswick 後 Gauss 的前途未卜。但他不再回父母親家而租屋在 Wenden 街。他寫信給 Bolyai 期盼公爵能夠在經濟上繼續支持他到找到工作為止。他也找過工作，但都失去機會。

當年10月他到 Helmstedt 大學，使用那裡的圖書。館長善待他，數學教授 J. F. Pfaff(1765-1825) 也對他很友好。他在忙著完成「Disquisitiones Arithmeticae」這本書。11月時他已訂正第五章四次，第七章基本上完成了，第八章還得花好多時間。12月中旬公爵答應繼續給 Gauss 年金158 thaler。在這以前年金遲遲未發下，Guass 以借貸渡日。公爵沒有立即允諾繼續給 Gauss 年金有他個人的理由：他的父親揮霍過度使

國庫乾枯，幾近破產。公爵想了法子，才挽救了這個局面。

公爵要求 Gauss 拿博士學位。Gauss 本來打算交給 Helmstedt 大學「Disquisitiones Arithmeticae」做為博士論文，但是印刷情況緩慢，Gauss 寫的份量又越來越多，印刷費可觀，超出預算。因此，Gauss 打住出版第八章的念頭。在1977年4月 Gauss 打算另交博士論文，選題為「代數學的基本定理」。5月他完成它交給 Helmstedt 大學當局。這是 Gauss 做的有關「代數學的基本定理」第一次證明。此後他又用另一些方式給了它三次證明。

這時候他開始展現大學時代天文學教授 Seyffer 給他培養出來的興趣：天文學。4月間他做出計算視差的公式來。他也研究算術幾何平均數 (arithmetico-geometric mean)，雙紐線 (lemniscate) 與三角函數間的關係。

1799年7月16日 Gauss 在 Helmstedt 大學無口試獲得博士學位。公爵替他支付一切所需費用。

1799年12月 Gauss 住在 Pfaff 家繼續作他的研究。Pfaff家人一天之間只能見到 Gauss 兩三個小時。Pfaff 為 Gauss 的健康著想，會帶他出去走走，談談天。

當年12月23日 Gauss 發現算術幾何平均數 $M(a, b)$ 與第一階橢圓函數有如下的關係：

$$\frac{1}{M(1, \sqrt{1-\mu^2})} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\mu^2 \sin^2 \varphi}}.$$

12月16日 Gauss 給好朋友 Bolyai 信告訴他近況,還要他切記除夕(到那一天信應該已經到達)子夜那18世紀最後一刹那。對 Gauss 來說它將是一個特別神聖的時刻:在那一瞬時,塵世會從他眼前消失不見,他的人會昇華成純淨的靈魂,體會出莫大的生之喜悅。

1800年 Gauss 的時間就花在“Disquisitiones Arithmeticae”的完成,印刷與橢圓函數上。他住在 Helstedt 到1800年的復活節。他終於決定不在「Disquisitiones Arithmeticae」加第八章以節省印刷費。即使這樣公爵還追加費用才付得清一切開支。

他又繼續作橢圓函數的研究,也發表計算復活節日期的公式。據說 Gauss 的母親不記得 Gauss 的生日,只曉得他在耶蘇昇天節前八天的星期三出生。Gauss作出算式才推算出他的生日來。

1801年9月29日「Disquisitiones Arithmeticae」終於出版了,費用全由公爵支付。書一下子被買光,行家激賞。

在書的序文中 Gauss 把這本書呈獻給 Brunswick 公爵,文辭中充滿謝意。他寫:「倘若沒有公爵您的支持,我無法毫無牽掛地從事生就心儀的數學研究達數年之久。沒有您的雅量與支撐,我就無法除去遲緩出版這本書所遭遇到的所有障礙……」公爵的名字因這篇序文而永存。

「Disquisitiones Arithmeticae」以拉丁文寫成,而 Gauss 為求文筆的流暢還請他的朋友,拉丁文專家 Meyerhoff 改正。這

本書被稱為「有七個封印的書」,意即由七章所成的艱深、難讀的書,連專家都不容易看懂。書中那簡潔的綜合性證明所蘊涵的寶藏經由他的後進 P. G. Lejeune Dirichlet (1805-1859)及後來的 Felix Klein (1849-1925)[4]等人的解說,衆人才能得以分享。

這本書的前三章處理二項同餘式理論。第四章展開同餘式平方剩餘的理論。第五章討論二元二次形式並發展成三元二次形式的理論。第六章討論第五章的特殊情形,第七章被視為書中的精華。Gauss使用二項同餘式理論來解代數方程式 $x^n = 1, n \in N$ 。從而應用在 n 等分圓周及正 n 多邊形的作圖上。[7]

Gauss 晚年說:「“Disquisitiones Arithmeticae”已經成為歷史性的著作了」,他的話是對的。

此後 Gauss 投入天文學,物理學等的研究,一直到晚年才全神回到數學的研究上來。

五. 投入天文學的研究

1800年代在天文學上是進展迅速的一個時期。觀測天文學在技術與儀器上都有長足進步。而天象圖是由有系統的觀測資料編纂而成的。在理論天文學方面天王星在1781年被發現(海王星在1846年,冥王星遲至1930年才被發現)。這對計算星座的擾動(Perturbation)的準確性很有幫助。

1801年是 Gauss 劃時代的一年。過後他回想起來,覺得有那麼多科學真理湧現在他腦海中,使他無法抵擋。

1801年元旦意大利天文學家 G. Piazzi (1746-1826) 在 Palermo 發現一顆小彗星 Ceres, 它不帶尾巴, 也沒有外被 (envelope)。一直到2月11日他才觀測到 Ceres 的軌道 9° , 過後它就在太陽陰影下不見了。依據「Bode 法則」, 這個星座應該存在, 並在1801年底或1802年初再出現。於是歐洲的天文學家們忙著算出 Ceres 再出現的軌道。而他們所能根據的是 Piazzi 發表在德國的「天文月刊」9月號上的所有觀測資料。

Gauss在當年的9月29日才出版「Disquisitiones Arithmeticae」, 但是這個訊息立刻引起他的興趣。Piazzi 雖然前後觀測了41天。可也只有三天的觀測數值。在 Gauss 的日記第119、第120項 (1801年9月與10月) 裡 Gauss 記下他開始算 Ceres 的軌道。Gauss想, 必定有一個橢圓軌道適合 Piazzi 給的數據。這問題便是: 天空上有兩個星座地球與 Ceres 在各以太陽為一焦點的 C_1 與 C_2 二橢圓上運行 (Kepler 第一定律)。而地球的軌道 C_1 已知, 並有三空間直線 (觀測線) 發自 C_1 至 C_2 。兩直線間的 C_2 弧已知要求出 C_2 曲線。[8]

1801年11月 Gauss 完全解決了這個問題, 就跟眾多天文學家們一樣, 他把結果發表在「天文月刊」上。德國 Seeberg 觀測台長兼「天文月刊」編輯 F. X. G. von Zach (17754-1832) 根據 Gauss 發表的軌道在1801年12月31日至1802年1月1日看到 Ceres。1802年1月1日 Bremen 的 H. W. M. Olbers (1758-1840) 也在 Gauss 預測的軌道上看到 Ceres。由此天文學家們

為 Ceres 的再現狂喜不已。同時 Gauss 的名聲傳遍了全世界。大家認為他是第一流的理論天文學家。早先 Gauss 在天文學界沒沒無名。他沒有天文學家該具備的儀器, 甚至於連望遠鏡也沒有。但是這位數學天才單憑三次數據就正確地算出消失不見的星座的軌道出來。

Gauss在1802年1月18日寫信給 Olbers 問他觀測 Ceres 的結果。這是他們間友誼的開始。Olbers 是一位成功的開業醫生兼傑出的業餘天文學家。他看病人到晚上十點, 過後在家裡屋頂上的觀測站看天象。據說他每天的睡眠時間不超過四小時。當時德國的天文學家們很喜歡圍繞在 Olbers 的身邊。他是他們的原動力, 而且從他的觀測站可能可以獲得一些新的觀測資料, 如果他們憑那些資料有新發現, 則可以名垂不朽呢。

1802年 Olbers 在 Ceres 近旁發現一新星叫 Pallas。1804年 Ludwig Harding發現一星叫 Juno。這些星座的軌道當然全權委託 Gauss 來計算了。Gauss一個小時可以算出一個彗星的軌道來, 而 Euler 用古老法則須花上整整三天時間。

1801年夏聖彼得堡大學想聘請 Ziemann。Brunswick 公爵為了留住他, 升任他為樞密顧問官, 並讓他辭卸 Catharine 高等學校的教職。這個缺本來 Gauss 有望, 但是後來由 Gauss 先前的老師博物學家 Hellwig 繼任。公爵可也要留任 Gauss, 就把他的年金升為400 thaler, 酬庸他寫出「Disquisitiones Arithmeticae」。Gauss 聽到這個消息後不禁叫出: 「可是我都還沒有為這個國家

做任何事啊!」他便自費買了一個六分儀, 提供 Brunswick 的人們使用。

Gauss被全世界公認為名人的事實是, 給他的贈與紛至沓來。1802年1月31日他被聘任為聖彼得堡科學院外國通訊會員。同年9月5日又有邀約請 Gauss 當聖彼得堡天文台長。Gauss在猶疑中。Olbers 聽到消息後為了要留住 Gauss 在德國境內, 他動用他的關係, 想讓 Gauss 當將建立的 Göttingen 天文台的台長。而公爵的反應是, 又增加 Gauss 的年金。Gauss 覺得這樣很好。他沒有固定官職, 但能正式為公爵工作。這樣的地位適合他的嗜好與需要。

1803年6月2日 Gauss 給 Bolyai 信, 信中說天文學與純粹數學是他心中的羅盤指針經常指向的兩極。

六. 結婚

Gauss 的母親結婚前在鞣皮工場主 Ritter 家幫傭。Gauss 出生後 Ritter 家兩個男主人當他的教父。因此 Gauss 小時候常常去 Ritter 家玩。耶誕節時那裡一定有一份 Gauss 的禮物。從 Göttingen 回來後 Gauss 有機會就往 Ritter 家走動。他享受那裡的 Brunswick 中產階級家庭中和諧的氣氛。在那裡, Gauss 與 Johanna Osthoff (1780.5.8-1809.10.11) 認識了。她是另一名鞣皮工場主 Osthoff 家唯一的孩子。她長得柔美, 性情明朗、可親又明事理, 也受了一些教育。

1804年6月28日 Gauss 給 Bolyai 信, 說他認識了一位他渴望成為終身伴侶的美好

女子近一年。她美麗的面容猶如聖母般, 顯現出身心的平和。她還有浪漫的眼神、完美的身材, 明快的理解力與有教養的談吐。她個性活潑, 快活而且謙和。尤其重要的是, 她有天使般的愛心。1804年7月12日 Gauss 給 Johanna 求婚信。信中他說他的將來姑且不談, 目前他擁有的足夠兩個年輕人不操勞地快樂過日子, 他所能夠提供給她的是他那一顆溫暖, 充滿著愛的心。

對 Gauss 的信 Johanna 拖了三個月沒有回答。Gauss 的名氣太大, 態度高不可攀等使她著實猶疑了一陣子。Gauss 不解 Johanna 的沈默。不過當時的政局開始讓他分心, 而且不安起來。那時候拿破崙已攻破德國南方諸邦, 開始以他的方式分割德國境內一些小國。Gauss 雖然依附 Brunswick 公爵, 拿年金過日子, 但是將來的變數蠻多。

Johanna 終於答應了 Gauss 的求婚, 他們在1804年11月22日訂婚了。

訂婚後三天, Gauss 滿懷喜悅地給 Bolyai 寫信, 說他三天前訂婚了。如今人生在他眼前彷彿是永恆的春天般充滿著光彩。他並勸 Bolyai 也做做實地天文學, 它僅次於在這人世間他所能嚐到的甜美, 又充滿喜悅的純數學真理的研究。

1805年10月9日 Gauss 與 Johanna 在 St. Catarina 教堂結婚, 住在 Ritter 家所擁有的房子 Steinweg 22號。Gauss 單身時也住在那兒。

在 Olbers 那裡 Gauss 認識了 Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1864)。當時 Bessel 年方20, 在 Bremen 一家商業機構

做事。由於他喜歡天文學，也就結識了 Olbers。後來 Bessel 成爲實驗與理論雙方面都是第一流的天文學家。Gauss 雖然跟 Olbers 有深交，但是往後對 Olbers 下的冷峻評語是：「Olbers 在天文學方面著實做了很大的貢獻。但是他最大的貢獻在於適時發現了 Bessel 在天文學上的才能，而爲科學栽培了他。」

Olbers 介紹 Bessel 給 Gauss 爲的是要 Bessel 替 Gauss 分析觀測資料。他們初次見面較晚，但 Gauss 給 Bessel 深刻印象，Gauss 給 Bessel 的「Disquisitiones Arithmeticae」這本書，Bessel 愛不捨手，磨損後又重新裝訂。Bessel 終其一生認 Gauss 爲師。而 Gauss 也給 Bessel 最好的評價。兩人之間從此有 42 年（中間間斷過一陣）的書信往來。這些內容是研究 Gauss 上最有科學價值的資料。

1806 年 8 月 21 日 Gauss 喜獲一子。Gauss 爲紀念 Ceres 發現者 Piazzi，以 Piazzi 的名字 Joseph 命名長子。

Gauss 與家人在 Brunswick 平靜地過日子，但當時政局越來越不妙了。拿破崙在鞏固他的地盤，而普魯士與奧地利沒有防衛法國的一致性看法，形勢看來很險惡。於是普魯士注意到同盟國的俄羅斯，便在 1806 年 1 月 30 日派 Brunswick 公爵爲特使往聖彼得堡商討聯合攻防法國事宜，但沒有獲得結果。倒是聖彼得堡許多人士問公爵有關 Gauss 的事，並請他放人，讓 Gauss 接受他們的邀請。

當 3 月 23 日公爵一回國，爲了要留住 Gauss 便決定再升 Gauss 的年金爲 600

theler, Gauss 在他生日當天聽到這個消息。在 5 月 Gauss 找一天拜訪公爵，表達謝意。這是他們最後一次的見面。前後十四年的交往中公爵給 Gauss 很大的學術研究機會，接著的數月政治風波使公爵再也無暇顧及 Gauss 了。

普魯士爲了要阻擋法國勢力向中歐伸張，在 1806 年 10 月發動戰爭，而以年邁七十的 Brunswick 公爵（他是 Fredrick 大帝在七年戰爭中的名將）爲統帥。戰場由 Jena 戰到 Auerstaedt。在 10 月 14 日晨，公爵在發號指令時被敵方的毛瑟槍傷到。彈丸由公爵的右眼上方射進，打碎鼻樑；從左眼窩挖出左眼來。受傷的公爵退出戰場。有一小隊代表團派往拿破崙軍營陳情：希望拿破崙以軍人的寬宏大量讓 Brunswick 公爵能在家人圍繞中嘆氣。但是他們受到情緒低落的拿破崙的嘲弄與侮辱。爲了避免成爲階下囚，瀕死的公爵只有逃亡一途。

那時候 Gauss 住家在公爵邸邸的正對面。10 月 25 日清晨 Gauss 被憂鬱的馬車聲驚醒。從窗口他看到長形的雙頭馬車載著垂危的公爵像柩車般慢慢地駛往 Hamburg 門。公爵終於在 Altona (Hamburg 附近的一都市) 地方的小旅舍去世。從此，Gauss 恨透了讓他的恩人遭受到如此下場的拿破崙與法國這個國家。

早先 Brunswick 公爵有意在 Brunswick 爲 Gauss 建造一座天文台，先慷慨解囊讓 Gauss 購買一座十英尺長望遠鏡。它遲遲才安置好，反射鏡經過修正研磨後效果好極。但是要建立天文台，談何容易！

經過 Olbers 的週旋, 在1805年 Gauss 將是建造中的 Göttingen天文台台長已成定局了。但是1806年10月的戰爭使本來隸屬 Harnover 王國的 Göttingen變成爲法國勢力下的 Westphalia 王國, 國王是拿破崙小弟 Jérôme (他統治不到10年)。

1807年7月25日 Gauss 正式收到 Göttingen 大學的聘請。結果 Collegium Carolinum 當局因教授指使, 來索求 Gauss 使用的望遠鏡。Gauss認爲望遠鏡要歸 Helmstaedt 大學的 Pfaff 教授保有才能發揮那一座望遠鏡的功能。但是他的意見沒有被採納, 使他快快不樂。他就在不快中離開 Brunswick。太太 Johanna 對 Brunswick 百般不捨。因爲她的親朋全在那兒。

七. Göttingen 時代的開始

他們一家人在1807年11月21日到達 Göttingen。住進舊天文台邊的一座老舊房舍。那時候 Hanover 舊政體已經瓦解, Westphalia 新政府尙未組成, 所以 Gauss 避免了正式向政府作就任宣誓的尷尬場面。

Gauss當 Göttingen 天文台長兼 Göttingen 大學教授都還沒有領到薪水, 法國就已經向新政府發令徵收戰爭稅金, 而 Gauss 的份是2000法郎。它在當時是一大筆錢。有一天 Olbers 寄來2000法郎給他。不久 Laplace 來信, 告訴 Gauss 他已經在巴黎替 Gauss 付清了這一筆錢。Gauss 退還了 Olbers 的錢, 至於 Leplace, Gauss 後來加上利息還清了這筆錢。Gauss還收到了一筆從 Frankfurt am Main 寄來的1000 frolin

(德國境內的一種舊幣) 匿名捐款, 這回他收下了。過後他獲悉那是 Frankfurt 大公爲敬佩 Gauss 的功績, 從公款挪出的錢。

科學家兼探險家 Alexander von Humboldt (1769-1859) 在1804年從南美航海之旅回到巴黎時聽到法國科學界對 Gauss 的一片讚賞聲, 使他對 Gauss 的印象深刻。後來他在1807年與 Gauss 認識, 並多年致力於羅致 Gauss 到柏林大學而沒有成功。他與政治家哥哥 Wilhelm (1767-1835) 比 Gauss 更早在 Göttingen 大學學過。三個人後來成爲終生莫逆之交。

1808年2月29日 Gauss 通知他的雙親當天 Johanna 生了一個女娃, 並以發現 Pallas 的 Olbers 的名字命名爲 Wilhelmine。大家暱稱她 Minna。Gauss惋惜 Minna 要在四年中才有一個生日。同年4月14日 Gauss 的父親去世。

1808~1809年間 H. C. Schumacher (1780-1850) 來 Göttingen 跟 Gauss 學天文學。他記下他與 Gauss 的對話成書, 叫做“Gaussiana”。這本書對後世研究他們兩人很有幫助。他們的交往持續到 Schumacher 去世。兩人的書簡集共六冊。

1809年9月10日 Gauss 的次子 Louis 誕生。他的名字是爲紀念 Juno 的發現者 C. L. Harding, 而以 Harding 的名字命名的。Harding從1807年起成爲 Gauss 在 Göttingen 天文台的副手。

生 Minna 時 Johanna 夫人已經是難產, 這回生完 Louis 三十一天, 在10月11日她便去世了。Gauss悲慟已極, 寫信給

Olbers 說：「昨夜八點我蓋上了我的天使的雙眼，在那裡，五年來我尋覓到我的天國……」。的確他們的婚姻生活非常美滿。Gauss 給 Bolyai 的信中就有過描述：「我快樂地過著家居生活。當小女兒長出一顆牙齒或是小兒子學到一個新詞兒，這在家裡就像發現了一顆新星或是新的真理那般重要。」

Johanna的葬禮後 Gauss 出發到 Blemen 找 Olbers, 回程去 Altona 找 Schumacher, 又去 Brunswick 找故舊尋求慰藉。1927年 Gauss 的孫子 Carl 在祖父的書堆中找出 Gauss 哀悼亡妻淚痕斑斑的信, 信有兩部份, 第二部份是在 Blemen 寫的, 日期是 10月25日。第一部份他訴說, 本來以為亡妻是他永遠的伴侶, 沒想到她一下子就走了。她一直只以他的快樂為念, 並原諒他的錯失。但望她的靈魂能永久伴隨他, 給他力量, 讓他不消沈, 好好照料三個小孩子。第二部份的信中 Gauss 說他很寂寞。圍繞他的人們讓他暫時忘卻痛苦。但過後悲哀卻變成雙倍來襲擊他。她最後的叮嚀是教他不要被悲傷打垮。但望她的愛與善良能活生生地永留他的心中, 能助他有勇氣奮鬥下去。

Gauss口中「可愛的小 Louis」卻在 1810年3月1日猝死, 追隨媽媽, 走了。

Gauss的第二部巨著「在太陽周圍回轉成圓錐曲線的天體之運動論」(Theoria motus corporum coelestium in sectionibus onicis Solem ambientium) 在 1809年成書, 由當時最著名的出版商 F. C. Pertes 印刷。本來他用德文寫, 後來聽從 Pertes 的意見, 為普及起見寫成拉丁文。內容是 Gauss 依據

Kepler 的法則, 作出圓錐曲線 (橢圓與雙曲線; 拋物線不適用) 運動之下的天體軌道計算方法的完全體系。並從觀測天體的三個點決定恆星或彗星軌道的一般方法。書的內容終於最小二乘法的解說。這本書以形式上簡潔, 文筆優雅、有完美性及獨創性著稱。當時常有新星出現, 天文學家們不得不借它來計算星座的軌道, 因此出版後有四十年之久它成為天文學家們必須精通的教科書。所以學者們對「運動論」的評價很高, 世界各地的學會也就爭聘 Gauss 為他們的會員了。法國科學院更在 1810年贈送他 Lalande 獎 (為紀念法國數學家及天文學家 J. J. Le Français de Lalande (1732-1807) 所設立的獎), Gauss 拒受。後來科學院祕書與 Sophie Germain (1776-1831) 動用獎金的一部分買一座天文擺鐘送他, 他這才接受, 還終生擺設那一座鐘在他的房間裡。

Sophie Germain 是法國女數學家, 她生在巴黎富裕人家, 自修數學。她為免受歧視, 以 Le Blanc 的男性化名寄出論文, 受到 Lagrange (1736-1813) 賞識而出名。她也以 Le Blanc 為名在 1804年底與 Gauss 通信討論「Disquisitiones Arithmeticae」, 給 Gauss 深刻的印象。當 1807年3月法軍入侵 Brunswick 時她怕 Gauss 受到傷害, 請法國軍官去問候 Gauss。到此, 她才掀開她的女子身份。她的主要貢獻在於整數論。她也因彈性表面的數學理論獲得法國科學院的大獎 (Grand Prix)。1837年 Göttingen 大學百年慶時 Gauss 惋惜她已去世, 否則她的成就足夠 Göttingen 大學贈與她榮譽博士學位。

Gauss 並不重視最小二乘法 (Least squares), 他認為許多從事數值計算的人自然會使用到它。他在1794年就知道它。1798年在機率計算中用上它, 1802年天文學的運算中也用到它。但是 Legendre 在1806年正式發表了最小二乘法的理論 (名稱是 Legendre 命名的)。Legendre 抗議 Gauss 在1809年的「運動論」中提及最小二乘法 Gauss 年早在1795(應該是1794年) 就發明了。後來 Laplace 當他們兩人的仲裁人, 裁定 Legendre 在發表上有優先權, 但兩人都分別發明了最小二乘法。Legendre 註定在其他他辛苦鑽研出來的成果上又跟 Gauss 的發明重複, 如數論中平方剩餘的相互法則, 超越函數以及幾何學的基礎理論等。

Gauss 的研究情緒也有低落的時候。在1807-1810年間他寫的有關橢圓函數的筆記中突然出現一句用細鉛筆寫的字:「過這樣的日子不如死掉的好。」

八. 再婚

爲了要獲得心靈上的寧靜以從事研究工作, 並讓孩子們能得到妥善的照顧, Gauss 很快就想到再婚。他選擇的對象是 Johanna 夫人在 Göttingen 的好朋友 Minna Waldeck (1788.4.15-1831.9.12)。她是 Gauss 在 Göttingen 大學的同事, 法學教授 Johann Peter Waldeck 的小女兒。她當時剛剛解除與別人的婚約, 正意氣消沈的時候。Gauss 先得 Minna 雙親的首肯後寫信給 Minna。他坦陳在太太去世不到半年就向她求婚一定不會給人好印象。的確, 亡妻的影子

一直無法從他心中消失, 如今他也只能獻出半顆心來。不過向來亡妻很敬愛 Minna, 深信 Minna 很樂意替代亡妻照料 Gauss 和孩子們。但望 Minna 能爲她自己熟慮後再做決定。Minna 答應了婚事。他們在1810年8月10日結婚。Gauss 這麼快便再婚著實讓親朋好友大吃一驚。這回 Gauss 邀請他母親從 Brunswick 過來同住。但是 Minna 是貴族出身, 他的母親猶疑到1817年才答應下來。

Minna 料理家庭, 也很愛護前人留下來的兩個孩子。這使 Gauss 對 Minna 滿懷感激與謝意。這一次的婚姻也算美滿。Minna 並給 Gauss 生了兩男一女: Eugene (1811年7月11日生, 三男), Wilhelm (1813年10月23日生, 四男) 與 Therese (1816年6月9日生, 次女)。

Göttingen 天文台的建築一直拖延下來。直到1810年 Westphalia 政府爲天文台的建造工作做了五年計劃, 打算投入20萬法郎來完成它。

Westphalia 政府並給 Gauss 貴族封號 Ritter von Gauss, 來酬勞他學術上的貢獻。這一年柏林大學邀約 Gauss 去教學, 但他與 Minna 結婚已加深了與 Göttingen 大學的關係, 並沒有答應這個邀請。

1811年8月天空上突然出現一顆閃亮的大彗星。Gauss 在8月22日黃昏時分看到它。幾天後他開始觀測, 這時 von Zach 八月初旬的觀測結果已經到手了。由這些 Gauss 算出這顆大彗星的拋物線軌道。它再現時果然在 Gauss 算出的軌道上, 並印證他的預言, 亮度增強了。而歐洲的人們則視這顆大彗星爲一代霸主拿破崙開始落敗的預兆。

1812年1月30日 Gauss 在 Göttingen 皇家科學學會上發表超幾何級數 $1 + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+r)b(b+1)\cdots(b+r)x^{r+1}}{c(c+1)\cdots(c+r)(r+1)!}$ 的論文。這個級數因 a, b, c 取特別的數值而可成爲二項級數、對數、三角函數等解析學上很重要的級數。Gauss是首位對無限級數的收斂性做出研究的數學家。

1812年6月底拿破崙率領近45萬大軍攻打俄羅斯而取道德國。之前 Laplace 向拿破崙進言請他對 Göttingen 大學特別關照。因爲那兒住著當代最頂尖的數學家 Gauss。

這回的戰爭拿破崙吃了癩。俄羅斯軍既不迎戰，也不講和卻一直退卻，並使用堅壁清野戰術。而俄羅斯冰冷的冬天也到了。法國軍又冷又餓。終於在10月19日開始撤退。但一路上俄羅斯軍與德國等同盟軍聯合起來追擊。法國軍落敗得很慘，回到法國的殘兵只剩下9萬餘人。

由拿破崙撐腰的 Westphalia 王國隨著拿破崙的退位 (1814年4月6日) 在1814年瓦解。Göttingen 又歸屬於 Hanover 王國。

此後十年是 Gauss 成果豐碩的時期。他出了二十數篇範圍廣泛的論文，其中有理論及觀測天文學、曲面論、整數論及對數的問題等，還給代數基本定理另兩種證明。

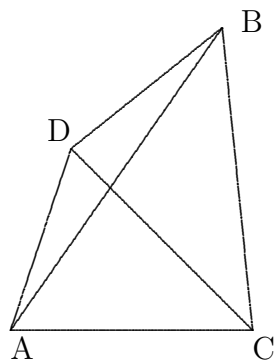
1816年9月17日 Göttingen 新天文台完成了。Gauss 一家人搬進天文台邊西翼的宿舍。

九. 從事地形測量的工作

早在1816年6月8日 Schumacher 給 Gauss 一信，說丹麥王出資讓他測量丹麥境

內 (當年的丹麥國土包括一部份現今德國領土) 的經緯線。他問 Gauss 有沒有興趣? Gauss 在7月5日的信中回答，如果是在 Hanover 境內他很樂意參加測量工作，也願意協助三角座 (主要的三個地點) 的計算問題。於是 Schumacher 運用他的關係，終於在1818年9月由 Hanover 首相正式委任 Gauss 做 Luneburg 地方 (過後又擴大範圍) 的測量工作。(Hanover地區靠近荷蘭邊緣的在拿破崙時代已測量過)。

測量工作如要測得相隔較遠的 A, B 兩處，則從 A 點取一近點 C 。由 A, C 觀望同一高處測量點 D 。量出 \overline{AC} , $\angle DAC$ 與 $\angle ACD$ 。則 $\overline{AD}, \overline{CD}$ 與 $\angle ADC$ 可得。再以 D, C 觀測 B 點。 \overline{AB} 長則由 $\overline{DB}, \overline{AD}$ 長及 $\angle ADB$ 而可求得。如果 B 點離 A 點很遠，則得借用有限多個三角形來測出 \overline{AB} 長。這種作業叫做測量的三角化。



Gauss不但是名義上的測量隊 (也有軍隊參與) 主持人，他還實地參加測量工作。這是費時又費精力的工作。Gauss 起先沒有想到一投入這個工作竟持續了十年之久。這期間夏天他幾乎是在外地過的。他怕熱，天氣燠熱的時候他很難受。1822年他那當砲兵預備軍

官的長子 Joseph 也參與測量工作，而且做得很好。

1826年後 Gauss 雖然不參加實地測量工作。但是測量資料的整理耗費好多時間：得到野外的測量數據後 Gauss 獨自投入與測量有關的計算到1848年。這才作成 Hanover 王國全域三角化測量3000個據點的座標。這些成爲描繪 Hanover 王國地圖的基本資料。

1823年 Bessel 看不慣 Gauss 爲測量工作用掉他的精力和時間，寫信給他說：「這些工作次等的數學家就可以完成，用不著您去做。」Gauss回他的信說，的確集世界上所有測量成果也不值一個學問前進的定律。但是有時候我們得以相對性來判斷價值。他也不能夠從這實際上有用的工程抽身。一則他可以做得比別人好，二則他不做，這個測量工作便流產了。還有一件事請 Bessel 保密：自從1810年 Westphalia Jérôme 王給他訂薪後他的薪水一直沒有調整過。爲了維持他那一家子的生活，他樂意得到這一份工作所帶給他的報酬。

1824年10月底回到家 Gauss 才發現整個夏天家裡亂七八糟。三個孩子得了麻疹，後來又傳給已經病了兩年的 Minna 夫人，使得她一時徘徊在生死之間。

Alexander von Humbolt 在當時德國的精密科學發展上扮演了很重要的角色。他在普魯士宮廷上很有影響力，他又很識才。

他想把魯普士所屬柏林大學（1810年設立）變成像巴黎的工技學院（École Polytechnique）那般出色的學校。因此他一而再再而三地懇懇 Gauss 去那兒當校長，不用教書，只管研究機構就得。Hanover政府聽到這個消息後趕緊通知在倫敦的英王。不久國王批示 Gauss 的年薪調升爲2400 thaler。這也跟政府賞識他的測量業績有關。Gauss 於是打消了去柏林大學的意願。

1821年在野外工作中 Gauss 發明了回光儀 (helitope)。它是配有一個能旋轉的鏡子的光學儀器，鏡子可使光線朝向一個固定方向反射而不受遠方的玻璃或光亮物等反射的干擾。在三角化工作時回光儀可以當發光的目標物，也可以做爲光的通訊。因爲從四、五英哩外看它有一二級星的亮度。

在三角化地面的實際工作中對曲面有了了解，Gauss於是在1827年發表了有關曲面的論文。他把曲面以參數式表示，並討論曲面本身具有的性質 (intrinsic property)。如，高斯曲率 K 在保長變換下不變，等性質。

後來 Gauss 的學生 Bernhard Riemann (1826-2866)。把 Gauss 的曲面理論發揚光大，成爲 Riemann 幾何學。Einstein就使用 Riemann 幾何學才發明了一般相對論。

—本文作者任教於輔仁大學數學系—