橢圓切線交點軌跡的探討

羅美音 ● 蘇映竹

壹、研究動機

由基本觀念“橢圓任兩條切線若互相垂直, 則其交點軌跡爲一個圓”加以延伸, 探討不同情況下, 橢圓切線交點的軌跡。

貳、研究目的

一、當橢圓兩切線相交時, 夾角恆保持爲定角 $\theta(0 < \theta < \pi)$, 則其交點軌跡爲何種圖形?

二、過橢圓上兩點 $P(a\cos\phi,\ b\sin\phi)$、$Q(a\cos(\phi+\theta),\ b\sin(\phi+\theta))$, (其中 θ 爲定角, 且 $0 < \theta < \pi$), 作兩切線, 則其交點軌跡爲何種圖形?

參、研究器材

電腦、$QBasic$軟體

肆、研究過程

如研究目的所述, 分爲兩種情形討論切線交點的軌跡, 並限制以下討論的橢圓方程式爲 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 亦即 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, 且 $a > b > 0$ (參見伍、討論一之 (三))。

一. 兩切線夾定角 θ

提要: (一) 軌跡方程式之推演: 求與橢圓 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 相切且交角爲 $\theta(0 < \theta < \pi)$ 之兩切線交點軌跡的方程式。

1. 由

$$(x^2-a^2)m^2-2xym+(y^2-b^2)=0 \qquad (*)$$

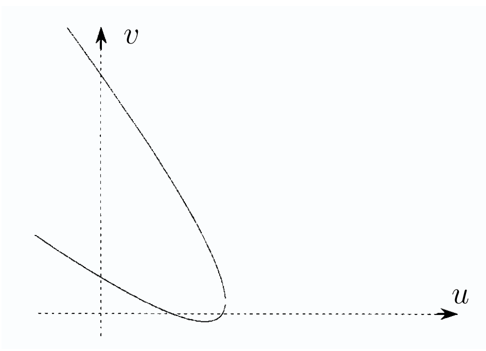
之兩根是交於點 (x, y) 之兩切線的斜率, 以及 $\cot\theta=\pm\frac{1+m_1m_2}{m_1-m_2}$, 得

$$\begin{aligned}&(x^2+y^2-a^2-b^2)^2\\ &=4\cot^2\theta(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2) \qquad (**)\end{aligned}$$

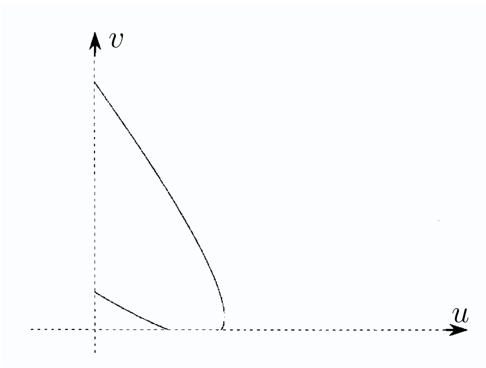
2. 令 $u=x^2$, $v=y^2$, 將$(**)$式化簡, 得

$$\begin{aligned}&u^2+2uv+v^2-2(a^2+b^2+2b^2\cot^2\theta)u\\ &-2(a^2+b^2+2a^2\cot^2\theta)v+4a^2b^2\cot^2\theta\\ &+(a^2+b^2)^2=0。\qquad (***)\end{aligned}$$

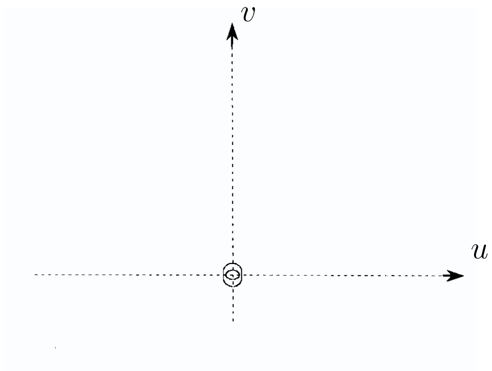
(二) 軌跡圖形之繪製



圖一、$(***)$ 式之圖形。

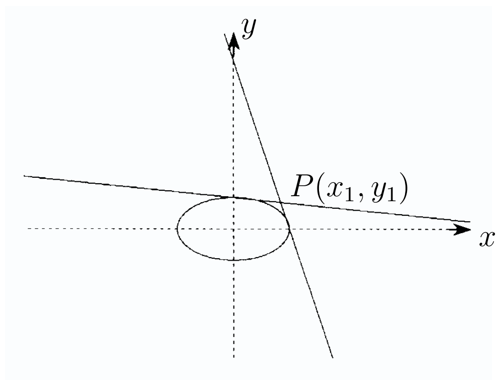


圖二、取圖一之第一象限部分。



圖三、取 $(\sqrt{u},\sqrt{v})$、$(-\sqrt{u},\sqrt{v})$、$(-\sqrt{u},-\sqrt{v})$、$(\sqrt{u},-\sqrt{v})$ 之點, 所成圖形即爲所求。參見伍、討論二。

內容: (一) 軌跡方程式之推演過程:



圖四

1. 設 $y=m_1x+\sqrt{a^2m_1^2+b^2}$ 與 $y=m_2x+\sqrt{a^2m_2^2+b^2}$ 交於 $P(x_1,y_1)$

$$\therefore \begin{cases} y_1=m_1x_1+\sqrt{a^2m_1^2+b^2} \\ y_1=m_2x_1+\sqrt{a^2m_2^2+b^2} \end{cases}$$

m_1,m_2 是 $(y_1-mx_1)^2=a^2m^2+b^2$ 之兩根, 化簡得 $(x_1^2-a^2)m^2-2x_1y_1m+(y_1^2-b^2)=0$ 同理可推得

$$(x^2-a^2)m^2-2xym+(y^2-b^2)=0 \quad (*)$$

之兩根是交於點 (x,y) 之兩切線的斜率。

(1) 若 $x^2-a^2\neq 0$, 令 $(*)$ 式的兩根爲 m_1,m_2 則 $m_1+m_2=\frac{2xy}{x^2-a^2}$, $m_1m_2=\frac{y^2-b^2}{x^2-a^2}$

$$\begin{aligned}\therefore \cot\theta &= \pm\frac{1+m_1m_2}{m_1-m_2} \\ &= \pm\frac{1+m_1m_2}{\sqrt{(m_1+m_2)^2-4m_1m_2}} \\ &= \pm\frac{1+\frac{y^2-b^2}{x^2-a^2}}{\sqrt{(\frac{2xy}{x^2-a^2})^2-\frac{4(y^2-b^2)}{x^2-a^2}}} \\ &= \pm\frac{x^2-a^2+y^2-b^2}{\sqrt{4b^2x^2+4a^2y^2-4a^2b^2}}\end{aligned}$$

$\therefore x^2-a^2+y^2-b^2$

$=\cot\theta\cdot(\pm\sqrt{4b^2x^2+4a^2y^2-4a^2b^2})$

$(x^2+y^2-a^2-b^2)^2$

$=4(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)\cot^2\theta \qquad (**)$

(2) 若 $x^2-a^2=0$, 則一條切線無斜率, 而另一切線斜率爲 m, 此時 $(*)$ 式化爲

$\pm 2aym+(y^2-b^2)=0 \quad (\because x=\pm a)$

移項後平方 $(y^2-b^2)^2=4a^2y^2m^2$, $\because$ 此時 $m=\cot\theta$, 且 $x^2-a^2=0$, $\therefore$ 可得 $(x^2+y^2-a^2-b^2)^2=4(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)\cot^2\theta$; 亦即 $(**)$ 式。

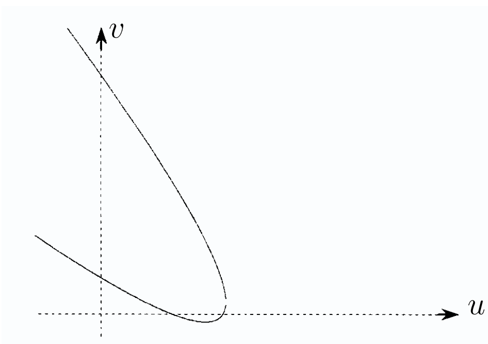
由 (1),(2) 知 $(**)$ 式爲所求軌跡的方程式。

令 $u=x^2$, $v=y^2$ 代入 $(**)$ 式

$$u^2+2uv+v^2-2(a^2+b^2+2b^2\cot^2\theta)u$$
$$-2(a^2+b^2+2a^2\cot^2\theta)v+4a^2b^2\cot^2\theta$$
$$+(a^2+b^2)^2=0$$

將上式定爲 $(***)$ 式 (參見伍、討論一)。

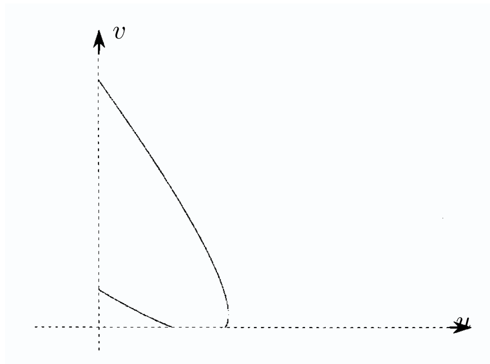
(二) 軌跡圖形之繪製



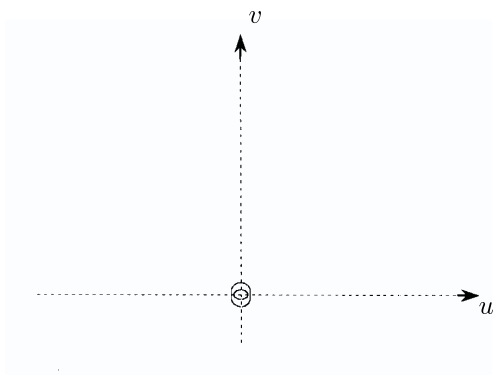
圖一、$(***)$ 式之公式解如下 (令 u 爲 v 之參數)

$$v=-u+(a^2+b^2+2a^2\cot^2\theta)\pm\sqrt{4(\cot^2\theta+1)a^4\cot^2\theta-4u(a^2-b^2)\cot^2\theta}$$

將 u 代入, 可得對應之 v, 作 $(***)$ 式之圖。



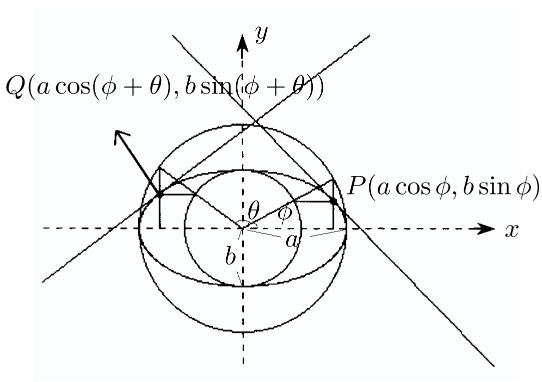
圖二、$\because u=x^2\geq 0$, $v=y^2\geq 0$, $\therefore$ 將圖一之圖形取第一象限之部分。



圖三、取 $(\sqrt{u},\sqrt{v})$, $(-\sqrt{u},\sqrt{v})$, $(-\sqrt{u},-\sqrt{v})$, $(\sqrt{u},-\sqrt{v})$ 之點, 所成圖形即爲所求 (參見伍、討論二)。

二、過橢圓 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 上兩點 $P(a\cos\phi,b\sin\phi)$, $Q(a\cos\phi+\theta),b\sin(\phi+\theta))$ (θ 為定角 $0<\theta<\pi$) 作兩切線之交點軌跡。

提要:　所得軌跡是一個橢圓 $\frac{x^2}{(\frac{a}{\cos\frac{\theta}{2}})^2}+\frac{y^2}{(\frac{b}{\cos\frac{\theta}{2}})^2}=1$



圖五

內容: 如上圖, 過 P 點之切線爲 $\frac{a\cos\phi}{a^2}x+\frac{b\sin\phi}{b^2}y=1$ 化簡得

$$b\cos\phi x+a\sin\phi y=ab \tag{1}$$

同理, 過 Q 點之切線爲

$$b\cos(\phi+\theta)\cdot x+a\sin(\phi+\theta).\ y=ab \tag{2}$$

(1),(2) 之交點爲

$$x=\frac{\begin{vmatrix} ab & a\sin\phi \\ ab & a\sin(\phi+\theta)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b\cos\phi & a\sin\phi \\ b\cos(\phi+\theta) & a\sin(\phi+\theta)\end{vmatrix}}$$

$$=a\times\frac{\sin(\phi+\theta)-\sin\phi}{\sin(\phi+\theta-\phi)}$$

$$=a\times\frac{2(\cos\frac{2\phi+\theta}{2})\cdot\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{a\cdot\cos(\phi+\frac{\theta}{2})}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

同法

$$y=\frac{\begin{vmatrix} b\cos\phi & ab \\ b\cos(\phi+\theta) & ab\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b\cos\phi & a\sin\phi \\ b\cos(\phi+\theta) & a\sin(\phi+\theta)\end{vmatrix}}$$

$$=\frac{b\cdot\sin(\phi+\frac{\theta}{2})}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$\therefore\ \frac{x\cdot\cos\frac{\theta}{2}}{a}=\cos(\phi+\frac{\theta}{2}) \tag{3}$$

$$\frac{y\cdot\cos\frac{\theta}{2}}{b}=\sin(\phi+\frac{\theta}{2}) \tag{4}$$

$(3)^2+(4)^2$: $\left(\frac{\frac{x}{a}}{\cos\frac{\theta}{2}}\right)^2+\left(\frac{\frac{y}{b}}{\cos\frac{\theta}{2}}\right)^2=1$ 是一橢圓。

伍、討論

一、$(***)$ 式

(一) 在 $(***)$ 式:

$$u^2+2uv+v^2-2(a^2+b^2+2b^2\cot^2\theta)u$$
$$-2(a^2+b^2+2a^2\cot^2\theta)v$$
$$+4a^2b^2\cot^2\theta+(a^2+b^2)^2=0$$

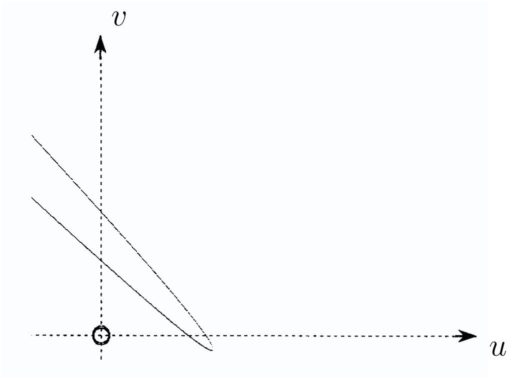
的圖形中, 若將座標軸旋轉 $45°$, 可得一拋物線如下:

$$\left[u'-\frac{(a^2+b^2)(\cot^2\theta+1)}{\sqrt{2}}\right]^2$$
$$=\sqrt{2}(a^2-b^2)\cot^2\theta$$
$$\cdot\left[v'+\frac{(a^2+b^2)^2\cot^2\theta+2a^4+2b^4}{2\sqrt{2}(a^2-b^2)}\right]$$

(註)

(二) 承 (一), 控制此拋物線開口大小的是 $|\sqrt{2}(a^2-b^2)\cot^2\theta|$, 所以當 θ 越接近 $\frac{\pi}{2}$, 或 a 越接近 b, 此拋物線將越接近一直線 (拋物線之對稱軸), $L: u+v=k>0$, 亦即 $x^2+y^2=k>0$, 因此交點軌跡越接近一個圓, 見圖六。

特款: 當 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 或 $a=b$ 時, u,v 圖形爲一直線, 交點軌跡是一個圓。



圖六

(三) 當 $a>b$ 時, 所得圖形如圖六, 但 $a<b$ 時, 拋物線開口向右下方, 爲了簡化問題, 且因爲可將原來橢圓之長軸旋轉至 x 軸上, 故交點軌跡之形狀並未改變, 所以在本探討中, 皆定義原來之橢圓爲 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 且 $a>b$。

二、圖三所得圖形有內外兩圈, 原因如下:

(一) 兩切線相交時夾角有兩個 (此兩角互補)。

(二) 導出的軌跡方程式, 與夾角有關的只有 $\cot^2\theta$ 項, 因此互補的兩角代入後產生共同的圖形。

陸、結論

一、與橢圓 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2(a>b)$ 相切, 且交角爲 θ 之兩切線, 所作交點軌跡的方程式爲

$$\begin{aligned}&(x^2+y^2-a^2-b^2)^2\\=&4\cot^2\theta(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)\end{aligned}$$

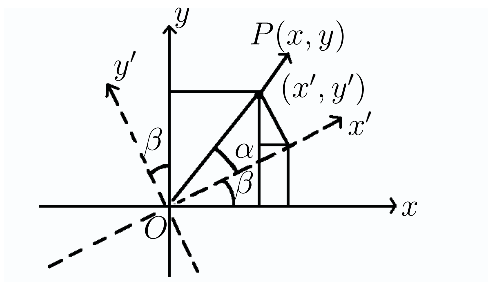
交點軌跡亦是一斜拋物線 $(***)$ 之 u,v 坐標開平方根之後所得的圖形。

二、過橢圓 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 上兩點 $P(a\cos\phi,b\sin\phi)$, $Q(a\cos(\phi+\theta),b\sin(\phi+\theta))$, 作兩切線, 則其交點軌跡爲一個橢圓:

$$\left(\frac{x}{\frac{a}{\cos\frac{\theta}{2}}}\right)^2+\left(\frac{y}{\frac{b}{\cos\frac{\theta}{2}}}\right)^2=1$$

註: 所謂“旋轉”係指坐標軸繞原點旋轉之意, 如下圖, 將 x,y 軸繞原點 O 旋轉一角 β 至 x',y' 之位置, 則 x',y' 軸亦可建立一新的坐標系, 設單位長不變, 則對坐標平面上任一點 P, 其原坐標 (x,y) 與新坐標 (x',y') 有如下之關係:

$$\begin{cases}x=x'\cos\beta-y'\sin\beta\\y=x'\sin\beta+y'\cos\beta\end{cases}$$



其次可藉旋轉將二次錐線 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 的“xy”項消掉, 步驟如下: 設旋轉的角度 β (通常 $0<\beta<\frac{\pi}{2}$), 原坐標 (x,y), 新坐標 (x',y'), 則由上述公式:

$$\begin{cases}x=x'\cos\beta-y'\sin\beta\\y=x'\sin\beta+y'\cos\beta\end{cases}$$

代入錐線中, 整理, 並利用二倍角公式可得:

$$\begin{aligned}&(A\cos^2\beta+\frac{B}{2}\sin 2\beta+C\sin^2\beta)x'^2\\&+[(C-A)\sin 2\beta+B\cos 2\beta]x'y'\\&+(A\sin^2\beta-\frac{B}{2}\sin 2\beta+C\cos^2\beta)y'^2\\&+(D\cos\beta+E\sin\beta)x'\\&+(-D\sin\beta+E\cos\beta)y'+F=0\end{aligned}$$

上式 $x'y'$ 之係數爲零的充要條件爲 $(C-A)\sin 2\beta+B\cos 2\beta=0$ 即 $\cot 2\beta=\frac{A-C}{B}$, 因此只要取旋轉的角 β 滿足 $\cot 2\beta=\frac{A-C}{B}$, 就能將方程式中的第二項消掉。

柒、參考資料

1. 聽笑話學數學, 洪銡雄編著, 77年8月協進圖書有限公司出版, 113～115頁。

—羅美音就讀於國立成功大學建築學系一年級, 蘇映竹就讀於嘉義女中三年級—