

試算表與完全數的探究

文耀光·江紹祥

1. 引言

隨著電腦科技及軟件的發展，利用電腦代數系統或試算表進行數學教學、探究或解難已逐漸受到教育界的重視（參考 [1]、[2]、[3]）。相信讀者亦會同意，利用電腦軟件代替人手去執行繁複的運算，會節省很多時間，讓學習者的注意力可以集中在數學概念的學習或探究本身。當然，在現今科技發展迅速的時代，電腦在運算速度和儲存數據方面仍然有不少的限制 (limitations)，未能完全取替人類的邏輯思考和演繹推理的部份，所以當前教育界強調的電腦輔助教學中，老師或家長仍然要扮演一個重要的角色，就是一個有清晰教學目標和明瞭學生學習程度的指導者 (instructor) 及催化學習者 (facilitator)。

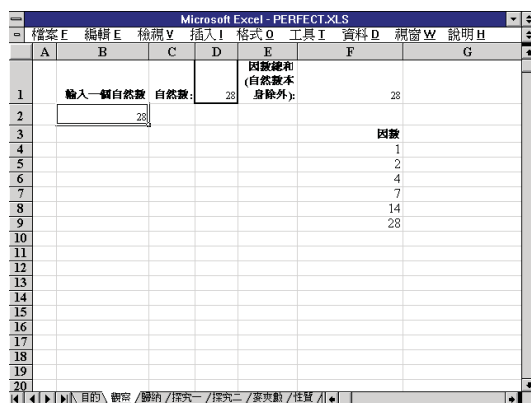
本文旨在向讀者介紹如何利用 Microsoft Excel 探究「完全數」(Perfect Numbers) 的性質、認識何謂麥爽數 (Mersenne Numbers)、了解當今大型電腦尋找麥爽質數的方法、和認識試算表在運算上的一些限制，希望為有興趣利用試算表進行數學教學的師長或探究的朋友提供一個參考示例，日後能製作更多更佳的電腦輔助學習數學軟件，是本文作者的最大目的。

2. 觀察自然數的因數之和

本節會介紹如何引導學生觀察自然數的因數之和，從而歸納出某類自然數的一些有趣性質，為認識完全數打好基礎。

探究活動：

步驟 (一)：用滑鼠指向「觀察」標籤並單擊，畫面會轉置到工作紙「觀察」，如圖一。先在儲存格 B2 任意鍵入一個自然數，例如 28，那麼這個數的所有正因數都會在 F4 儲存格以下自動出現，最後在 F1 格出現的數字便是所有小於該鍵入自然數的正因數之和。



	A	B	C	D	E	F	G
1		輸入一個自然數	自然數:	28	因數之和 (自然數本 身除外):	28	
2		28					
3						因數	
4						1	
5						2	
6						4	
7						7	
8						14	
9						28	
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							
18							
19							
20							

圖一

提問：請問這個和是否等於鍵入之自然數？
(答案：是。)

步驟 (二): 試逐次鍵入 1 至 30 範圍以內的自然數, 重複上述步驟並完成下表。

鍵入的數	因數之和 (不包括鍵入的數本身)	鍵入的數	因數之和 (不包括鍵入的數本身)
1		16	
2		17	
3		18	
4		19	
5		20	
6		21	
7		22	
8		23	
9		24	
10		25	
11		26	
12		27	
13		28	
14		29	
15		30	

表一

3. 歸納定義

基於表一的結果, 教師可以引導學生為「完全數」下定義。

探究活動:

步驟 (一): 試利用表一的結果, 觀察 1 至 30 以內有那些自然數剛好等於所有比它少的正因數之和。

提問: 請寫出這些數字, 並嘗試為這類自然數命名。

(答案: 6 和 28。)

教師講述:

早在古希臘時代, 哲學家柏拉圖 (Plato) 已在他的著作《理想國》裡提出了「完全數」(Perfect Numbers) 這個概念, 因為古希臘人心目中最理想、最完全的正整數是恰好等於這個數的所有因數 (本身除外) 相加。他們認為這些完全數具有神秘的意義, 能夠反映宇宙的和諧。當時的希臘數學家發現的完全數共有 4 個, 包括 6、28、496 和 8128。到 1456 年, 才發現了第 5 個完全數 33550336, 可謂進展緩慢。直至 1996 年為止, 藉著大型電腦的幫助, 尋找到的完全數亦僅有 35 個, 而且都是偶數。

4. 觀察偶完全數的形式

基於上述的探究活動及表一的結果，教師可以再進一步引進下列的探究活動，希望學生能自行歸納出偶完全數的一般形式。

探究活動：

步驟 (一)：用滑鼠指向「歸納」標籤並單擊，畫面會轉置到工作紙「歸納」。在儲存格 B2 鍵入一個 1000 以內的自然數，如圖二。試觀察 F、G、H 欄出現之完全數的因數分解式，並嘗試歸納偶完全數出現的一般形式。

輸入尋找的完全數上限	已找到個數	完全數	最大質因數	x	x
1000	3	6	2	x	3
		28	4	x	7
		496	16	x	31

圖二

提問：請描述遇完全數之一般形式。

(答案： $2^{n-1}(2^n - 1)$ ，其中 n 為自然數。)

步驟 (二)：用滑鼠指向「探究一」標籤並單擊，畫面會轉置到工作紙「探究一」，如圖三。先選擇 C4 至 E4 範圍，將滑鼠放在 E4 右下角十字處，然後按滑鼠左鍵向下拖曳至儲存格 E10 並放手。在儲存 D4 欄至 D10 會自動顯示 $2^{n-1}(2^n - 1)$ 是否完全數，而在儲

存格 E4 至 E10 會自動顯示 n 是否質數。試觀察 D 欄及 E 欄顯示之結果。

n	$m = 2^{n-1}(2^n - 1)$	m 是否完全數?	n 是否質數?
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			

圖三

提問：試歸納 n 是甚麼數的時候， $2^{n-1}(2^n - 1)$ 有可能是完全數？

(答案：質數。)

步驟 (三)：用滑鼠指向「探究二」標籤並單擊，畫面會轉置到工作紙「探究二」，如圖四。先選擇 C4 至 E4 範圍，將滑鼠放在 E4 右下角十字處，然後按滑鼠左鍵向下拖曳至儲存格 E10 並放手。試觀察 D 欄及 E 欄顯示之結果。

n	$m = 2^{n-1}(2^n - 1)$	m 是否完全數?	n 是否質數?
2			
3			
5			
7			
11			
13			

圖四

提問：請問 n 是質數的時候， $2^{n-1}(2^n - 1)$ 是否一定是完全數？

(答案：否。例如：當 $n = 11$ 時， $2^{10}(2^{11} - 1)$ 並不是完全數。)

5. 尋找麥爽質數

在進一步的探究活動之前，教師先敘述一些經典的結果，讓學習者了解偶完全數和麥爽質數的關係，及尋找麥爽質數的方法。

教師講述：

歐拉定理：凡偶完全數都是以下面的形式出現： $2^{n-1}(2^n - 1)$ ，其中 $2^n - 1$ 是質數。

另外，數學家亦證明了以下的定理：

定理：如果 $2^n - 1$ 是質數，那麼 n 必定是質數。

但是要注意，當 n 是質數時， $2^n - 1$ 不一定是質數。因此要尋找偶完全數就變成找某一些質數 n ，使得 $2^n - 1$ 是一個質數。我們稱形如 $M_n = 2^n - 1$ 的數為麥爽數 (Mersenne Numbers)。麥爽 (M. Mersenne 1588-1648) 是法國巴黎的一個神學家及數學家，他是最早尋找麥爽質數的人。直至十八世紀，已經驗證是質數的麥爽數有 8 個，分別當 n 等 2、3、5、7、13、17、19 和 31 的時候。1978 年底，美國加州兩個大學生利用電腦證明了 $2^{21701} - 1$ (即第 25 個麥爽質數) 是質數。直到 1996 年為止，共發現了 35 個麥爽質數 (第 35 個麥爽質數是 $2^{1398269} - 1$)，也是透過超級電腦的幫助及長時間的運算而尋找得到的。

探究活動：

步驟 (一)：用滑鼠指向「麥爽數」標籤並單擊，畫面會轉置到工作紙「麥爽數」，如圖五。用滑鼠指向儲存格 C4 並拖曳至儲存格 D4，然後下拉至儲存格 D18。試觀察當 n 在 1 至 50 範圍以內時，有多少個麥爽數 M_n 是質數？

n	$M_n = 2^n - 1$	M_n 是否質數?
2	3	TRUE
3	7	
5	31	
7	127	
11	2047	
13	8191	
17	131071	
19	524287	
23	8388607	
29	536870911	
31	2147483647	
37	137438953471	
41	2199023255551	
43	8785842127	
47	137438953471	

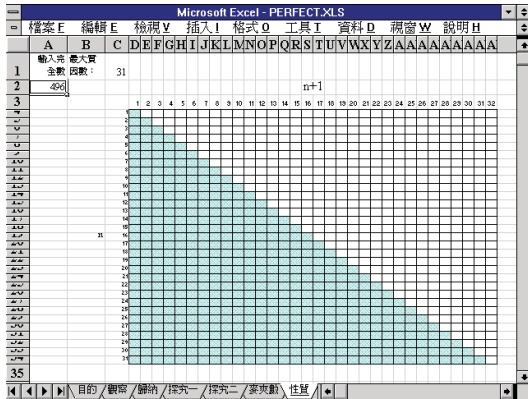
圖五

6. 探究完全數的有趣性質

完全數有很多有趣的性質，教師可以引導學生加以探究。以下是其中一個例子：

探究活動：

步驟 (一)：用滑鼠指向「性質」標籤並單擊，畫面會轉置到工作紙「性質」，如圖六。請在儲存格 A2 鍵入一個已知的偶完全數 (1 - 1000 範圍以內)。儲存格 C1 會自動顯示這個偶完全數的質因數。試觀察畫面中央的長方形，並回答以下的問題：



圖六

提問：請問圖中顯示的長方形面積與鍵入之偶完全數有甚麼關係？

(答案：等於該偶完全數的兩倍。)

提問：圖中顯示的三角形面積與鍵入之偶完全數有甚麼關係？

(答案：兩者相等。)

提問：偶完全數是否一定是三角形數？試給予解釋。

(答案：是。因為 $2^{n-1}(2^n - 1)$ 可以 $m(m+1)/2$ 的形式表示，其中 $m = 2^n - 1$ 。)

7. 總結及討論

本文旨在介紹如何利用 Microsoft Excel 去引導學生探究完全數的基本性質、認識何謂麥爽數，並了解尋找完全數在歷史上的進展過程。教師在設計此類型的試算表工作紙的時候，有幾點原則值得注意：(1) 教材設計要符合學生的數學學習程度，避免過深或過淺；(2) 儘量引導學生自己發現數學概念，取替教師直述定義的模式；(3) 善用試算表的

計算及繪圖功能，增加學生學習時的互動性 (Interactivness) 和趣味性；(4) 在適當時候使用試算表的巨集 (Macro)，減省學生繁複的輸入指令 (Input commands)，讓學生的注意力可以集中在數學概念的學習或探究本身。

以下是與本文相關的一些補充資料，供讀者參考之用：

討論 (一)：

目前第 9 個麥爽質數 $2^{61} - 1$ ，在 Windows 3.1 版本下運作的 Excel 5.0 會誤算出它是合成數。這是由於 Excel 的內儲整數位值的限制，所以任何大於 $2^{49} - 1$ 的質數都不可能被正確試驗出。因此 Excel 5.0 只能有限地應用於課堂中作為探究的工具，某些需要多位值的數字運算必須依賴另一類高計算軟件幫助，例如 Maple 或 Mathematica 之類的電腦代數系統。以檢驗麥爽質數為例，Excel 5.0 只能準確計算到第 8 個麥爽質數 $2^{31} - 1$ ，而 Maple¹ 可以在小於兩分鐘內計算到第 14 個麥爽質數 $2^{607} - 1$ ，其位數 (number of digits) 有 183 位。如果測試時間延長至 30 鐘，Maple 亦可以準確計算到第 33 個麥爽質數 $2^{859433} - 1$ 。有興趣的讀者可以參加國際網絡 Internet 上的 GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search) 的義工，共同尋找新的麥爽質數。

討論 (二)：

¹ 測試是在 Pentium 133MHz (48Mb RAM) 的微型電腦上進行。

在工作紙「麥爽數」中，我們曾經運用到一個自設的函數 `isprime`，其算法 (algorithm) 是應用了愛氏篩原理。有興趣的讀者可以參考基本的數論著作 (例如:[4]、[5]) 或專門討論算法的書籍 (例如:[6])。

討論 (三):

現今所找到的完全數都是偶數，會不會有奇完全數存在呢？至今還沒有人能回答。不過，有數學家曾經證明到：「如果存在奇完全數，它必定大過 10^{300} ，且最少有 8 個不同的質因子。」由此看來，單靠筆算是不能找出一個奇完全數的！

討論 (四):

偶完全數是否有無限多個，至今仍然是個謎？現今找到的偶完全數 M_n 僅有 33 個。利用電腦代數系統 Maple 的幫助，可以在 30 分鐘內計算到首 33 個偶完全數，其 n 之對應值為 2、3、5、7、13、17、19、31、61、89、107、127、521、607、1279、2203、2281、3217、4253、4423、9689、9941、11213、19937、21701、23209、44497、86243、110503、132049、216091、756839 及 859433。

參考資料:

1. Y. K. Man, C. K. Leung, S. C. Kong (1997), *Teaching Calculus using computer algebra: a comparative study.*, Proceeding of the ACSA Biennial Conference. Sydney: University of Sydney, Australia.

2. 陳俊生 (1997), 試算表也可以用來學微積分,「數學傳播」, 第81期, 頁45-53。
3. G. Taylor-Russell (1994), *Maple at The University Of North London*, Proceeding of the Maple Summer Workshop and Symposium (ed. R.J. Lopez), 167-172. New York: Birkhauser.
4. 文耀光、梁志強、吳銳堅 (1997),「基礎數學引論」, 香港: 香港教育圖書公司。
5. A. Adler, & J. E. Coury (1995), *The Theory of Numbers — A Text & Source book of Problems*, London: Jones & Bartlett Publishers.
6. R. E. Crandall (1996), *Advanced Topics in Scientific Computing*, New York: Springer-Verlag.

- 本文作者現任教於香港教育學院。

聯絡地址:

(1) 文耀光博士, 香港教育學院數學系, 香港新界大埔露屏路10號。

(2) 江紹祥先生, 香港教育學院科學系, 香港新界大埔露屏路10號。

電子郵件:

ykman@math.ied.edu.hk;

sckong@sci.ied.edu.hk

- 讀者如有興趣獲得本文作者設計給予演作之程式 `perfect.xls`, 歡迎用空郵或電子郵件與作者聯絡。