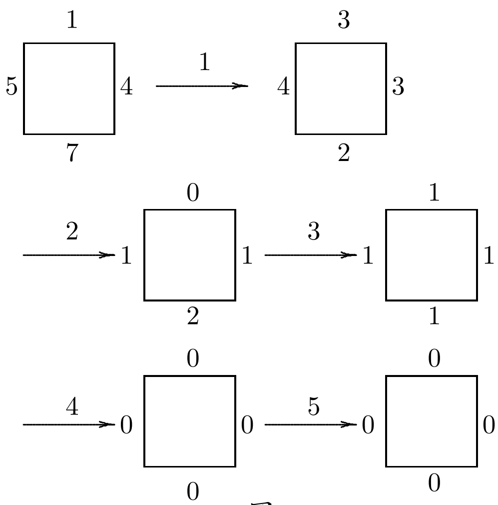
四邊形上數字的妙趣

蕭守仁

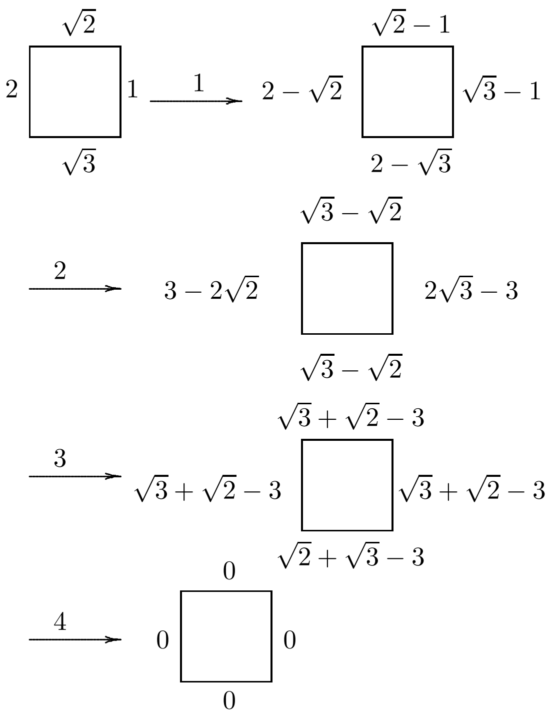
現在給你四個整數, 比如說 1、4、7、5, 請將它們依序放在四邊形的各邊上, 然後進行以下的運算: 將每一邊上的數與其左邊的數相減並把相減所得的差的絕對值 (事實上就是大減小) 代替左邊的數字, 這樣就完成一次運算。如果繼續這樣運算多次, 我們將發現四邊形上的數字都變成 0, 當然, 再運算一次仍是如此 (如圖一)。你可以試試別組整數, 看看是否仍有此現象。



圖一

有趣的是, 這種現象也發生在八邊形上, 更一般地, 2^n 邊形上都有此現象, 各位讀者不妨試試八邊形的例子, 雖然可能需要運算很多次, 但最後各邊總是能變成全是 0。接下來請你試著證明它吧! 有興趣的讀者請參考 [1]。不過, 這些現象都要求參與運算的數字是整數, 如果不是整數還有此現象嗎? 以四邊形爲例, 比如說各邊上的數字分別爲 $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{10}$, 事實上此情形和各邊上的數字分別爲 10、8、15、2 是沒有差別的 (將每一個數同乘以 20), 因此, 各邊皆爲分數 (有理數) 的情形和整數相同, 經運算多次後, 各邊總是能全變成 0, 所以一個有意思的問法是: 如果不全爲分數, 情形是如何呢?

下面圖二是各邊分別爲 $\sqrt{2}$, 1, $\sqrt{3}$, 2 的情形



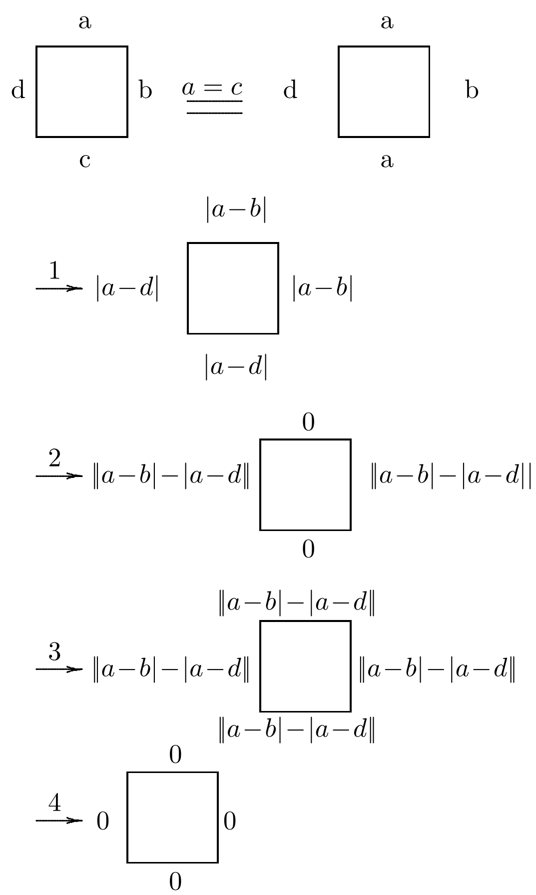
圖二

這個例子又加強了“最後總是全變爲0”這個猜想的正確性, 本文將就四邊形的情形深入探討。

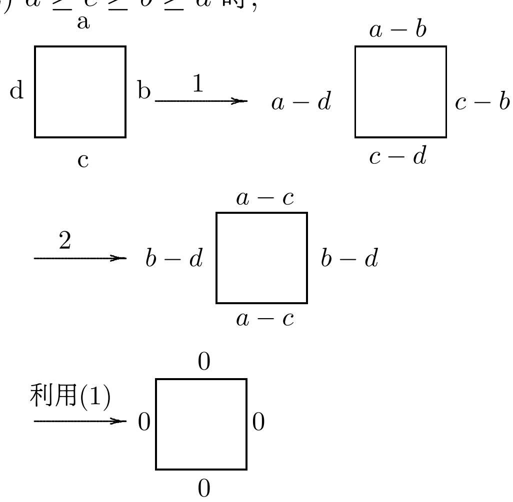
一、準備工作

首先不妨假設有4個非負實數 a, b, c, d 置於四邊形上 (因爲經一次運算後, 各邊皆變成非負實數), 以下細分成幾種情形來討論。

(1) $a = c$ 時,

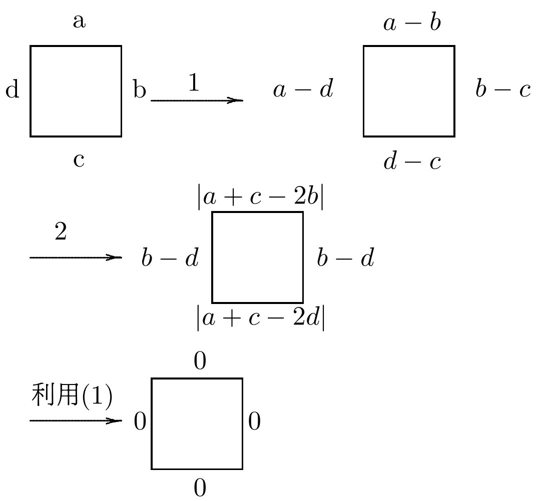


(2) $a \geq c \geq b \geq d$ 時,



(3) $a \geq c \geq d \geq b$ 時, 類似於 (2) 的情形, 最後各邊皆爲0。

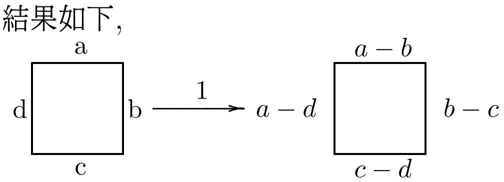
(4) $a \geq b \geq d \geq c$ 時,



(5) $a \geq d \geq b \geq c$ 時, 類似於 (4) 的情形, 最後各邊皆爲0。

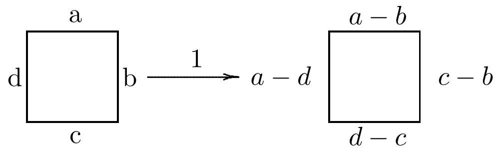
請注意, 前列的各種情形的最後結果都是各邊皆爲0, 此與是否爲整數無關。現在只剩下兩種情形尚待討論。

(6) $a \geq b \geq c \geq d$ 時, 經過一次運算結果如下,



請注意 $a-d=(a-b)+(b-c)+(c-d)$, 也就是說 $a-d$ 是其中最大者, 因此由 (1), (2),(3),(4), (5) 的討論可知, 除非 $a-b \geq b-c \geq c-d$ 或 $c-d \geq b-c \geq a-b$, 否則最後各邊仍將全爲0。

(7) $a \geq d \geq c \geq b$ 時, 情形類似於 (6),



其中 $a-b=(a-d)+(d-c)+(c-b)$, 因此 $a-b$ 爲最大項, 由 (1) $\sim$ (5) 的討論可知, 除非 $a-d \geq d-c \geq c-b$ 或 $c-b \geq d-c \geq a-d$, 否則最後各邊仍將全爲0。

二、進一步的討論

由前一節的討論可以知道:

1. 不管一開始的數字爲何, 運算過程中一出現 (1) $\sim$ (5) 任一種情形, 最後結果便是全爲0。
2. 爲使每一次運算的結果不是全爲0, 除非每次的結果都能如 (6) 或 (7) 的情形。

現在讓我們假設 $a \geq b \geq c \geq d$ 且經一次運算後有 $a-d \geq a-b \geq b-c \geq c-d$ ($a-d \geq c-d \geq b-c \geq a-b$ 的情形也請仿此討論之), 因此不妨一開始設四個數爲 $a_0+b_0+c_0, a_0, b_0, c_0$ 且 $a_0 \geq b_0 \geq c_0 \geq 0$, 經過一次運算後變成 $b_0+c_0, a_0-b_0, b_0-c_0, a_0+b_0$, 顯然 a_0+b_0 最大而且 $b_0+c_0 \geq b_0-c_0$, 因此如果 (1) $\sim$ (5) 沒有發生, 則必然有$a_0+b_0 \geq b_0+c_0 \geq a_0-b_0 \geq b_0-c_0$。不妨設 $a_1=b_0+c_0$, $b_1=a_0-b_0$, $c_1=b_0-c_0$, 則新的數可寫成 $a_1+b_1+c_1, a_1, b_1, c_1$ 而且 $a_1 \geq b_1 \geq c_1 \geq 0$, 在此也請注意到, 如果 $c_0=0$, 那麼 $a_1=c_1$, 此爲 (1) 的情形。因此, 如果一直保持在 (6) 或 (7) 的情

形, 則必須 $c_0>0$, 同理 $c_1>0$。因此如果 (1) $\sim$ (5) 都沒有出現, 那麼對於任意正整數 n 必然有

$$(2.1)\quad a_n=b_{n-1}+c_{n-1},\ b_n=a_{n-1}-b_{n-1},\ c_n=b_{n-1}-c_{n-1}\quad \text{且}\quad a_n>b_n>c_n>0,\ a_0>b_0>c_0>0。$$

三、解決數學問題

現在我們已經把問題化約成“數學”的形式: 是否存在 a_0,b_0,c_0 滿足 (2.1) 的要求呢? 首先注意到 $a_n+b_n+c_n=a_{n-1}+b_{n-1}<a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}$, 也就是說 $a_n+b_n+c_n$ 是嚴格遞減, 因此 $a_n+b_n+c_n$ 的的極限値存在, 設爲m, 則可表示成

$$\begin{aligned} m&=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n+c_n)\\ &=\lim_{n\to\infty}(a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}) \end{aligned}$$

但是$a_n+b_n+c_n=a_{n-1}+b_{n-1}$, 因此

$$\lim_{n\to\infty}c_{n-1}=m-m=0$$

又因爲$c_n=b_{n-1}-c_{n-1}$, 故有

$$\lim_{n\to\infty}b_{n-1}=\lim_{n\to\infty}(c_n+c_{n-1})=0$$

進而

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(b_{n-1}+c_{n-1})=0$$

因此

$$(3.1)\quad \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}c_n=0$$

這是很有用的觀察, 以下將用它來求 a_0, b_0, c_0。把 (2.1) 寫成矩陣的形式

$$(3.2)\quad \begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{n-1}\\b_{n-1}\\c_{n-1}\end{pmatrix}$$

因此

$$(3.3)\quad \begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}a_0\\b_0\\c_0\end{pmatrix}$$

(接下來的部分需要一些矩陣的理論, 不熟悉的讀者請跳過, 在附錄裡有較基礎的推導, 請參考)。稱 $\begin{bmatrix}0&1&1\\1&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$ 爲矩陣 A, 考慮將 A 對角化, 矩陣 A 的特徵方程式是

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix}0-\lambda&1&1\\1&-1-\lambda&0\\0&1&-1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

即 $\lambda^3+2\lambda^2-2=0$。利用堪根定理仔細檢查可以知道此方程式有一個小於 1 的正實根, 設爲 α, 另二根爲共軛複數根 β,γ, 但 $|\beta|=|\gamma|>1$, 所以由 (3.3) 不難知道 a_n,b_n,c_n 可表示成以下形式

$$\begin{aligned} a_n&=\ell_1\alpha^n+\ell_2\beta^n+\ell_3\gamma^n\\ b_n&=m_1\alpha^n+m_2\beta^n+m_3\gamma^n\\ c_n&=n_1\alpha^n+n_2\beta^n+n_3\gamma^n \end{aligned}$$

但是 $|\alpha|<1$ 且由 (3.1) 可知

$$\ell_2\beta^n+\ell_3\gamma^n\to 0 \text{ 當 } n\to\infty$$

因爲 $|\beta| > 1$ 且 $|\gamma| > 1$, 因此若假設 $\ell_2 \neq 0$, 那麼 $\ell_3 \neq 0$, 而且

$$1+\frac{\ell_3}{\ell_2}\Big(\frac{\gamma}{\beta}\Big)^n \to 0 \text{ 當 } n \to \infty$$

即有

$$\Big(\frac{\gamma}{\beta}\Big)^n \to -\frac{\ell_2}{\ell_3} \text{ 當 } n \to \infty$$

但 $|\frac{\gamma}{\beta}| = 1$, 因此 $\frac{\gamma}{\beta} = 1$, 但這是不可能的 (因爲 β, γ 爲共軛複數), 故 $\ell_2 = \ell_3 = 0$, 同理 $m_2 = m_3 = 0$, $n_2 = n_3 = 0$, 所以 a_n, b_n, c_n, 可寫成

$$a_n = \ell_1\alpha^n, b_n = m_1\alpha^n, c_n = n_1\alpha^n \tag{3.4}$$

再利用 (3.2) 即得知

$$\alpha\begin{pmatrix}\ell_1\\ m_1\\ n_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ell_1\\ m_1\\ n_1\end{pmatrix} \tag{3.5}$$

因此 $\begin{pmatrix}\ell_1\\ m_1\\ n_1\end{pmatrix}$ 是矩陣 A 對應於特徵值 α 的特徵向量, 請注意由 (3.2) 和 (3.5) 不難看出

$$(a_0, b_0, c_0) = (\ell_1, m_1, n_1)$$

現在尚有兩件事必須驗證, 首先必須說明可以找到適當的ℓ_1, m_1, n_1 使得 $\ell_1 > m_1 > n_1 > 0$, 再者必須說明 $a_n > b_n > c_n > 0$, 事實上, 只要證明可以找到 $\ell_1 > m_1 > n_1$, 則由 (3.4) 即可得證 $a_n > b_n > c_n > 0$。利用 (3.5), ℓ_1, m_1, n_1 滿足

$$-\alpha\ell_1 + m_1 + n_1 = 0$$
$$\ell_1 + (-1-\alpha)m_1 = 0$$
$$m_1 + (-1-\alpha)n_1 = 0$$

因此

$$\begin{aligned}\ell_1 &= (1+\alpha)m_1\\ n_1 &= \frac{1}{1+\alpha}m_1\end{aligned} \tag{3.6}$$

若取 $m_1 > 0$, 則因爲 $0 < \alpha < 1$ 而有 $\ell_1 > m_1 > n_1 > 0$, 而且 $l_1 : m_1 : n_1 = (1+\alpha)^2 : (1+\alpha) : 1$。如果令 $\beta = 1+\alpha$, 則 β 是滿足 $\lambda^3 = \lambda^2 + \lambda + 1$ 的唯一正實根。現在可以寫出以下的結論:

1. 如果4個數 a, b, c, d 滿足 (1) $\sim$ (5) 任一種情形, 經過有限次運算後必全爲0。
2. 如果4個數 a, b, c, d 滿足 (6) 或 (7) 的情形, 且經過一次運算後, 仍符合 (6) 或 (7), 並設依大小排列成, $a_0 + b_0 + c_0$, a_0, b_0, c_0, (i) 若 $a_0 > b_0 > c_0 > 0$ 且 $a_0 : b_0 : c_0 = \beta^2 : \beta : 1$, 其中 β 是 $\lambda^3 = \lambda^2 + \lambda + 1$ 的正實根, 則經任意多次運算, 四邊形上的數仍全不爲0。(但其極限確實全爲0),(ii) 否則經有限次運算後仍將全爲0。

四、未完成的工作

雖然就四邊形而言, 已經能夠完全判斷四邊形上的數能否在有限次運算後全變爲0, 但是對於那些在有限次運算後全變爲0的情形還不能事先知道需要運算幾次, 再者, 是不是任給一個正整數 n, 總是能給出一組數 (四個實數 a, b, c, d) 使得恰好經過 n 次運算後全部變爲0? 當然, 有興趣的讀者一定也會問一般 2^n 邊形上的數的情形又是如何

呢? 這些問題筆者也不清楚, 或許你能給出完整的答案!

附錄:

對於遞迴式 (2.1) 有一個比較基礎的解法。首先由 (2.1) 可得 $a_{n-1}=b_n+b_{n-1}$, 因此 $b_{n+1}+b_n=b_{n-1}+c_{n-1}$, 再由 $b_{n-1}=c_n+c_{n-1}$, 進一步得到 $c_{n+2}+c_{n+1}+c_{n+1}+c_n=c_n+c_{n-1}+c_{n-1}$, 也就是

$$c_{n+2}+2c_{n+1}-2c_{n-1}=0$$

用一般解線性遞迴式的方法, 先解 $x^3+2x^2-2=0$。(此方程式和正文中的矩陣 A 的特徵方程式相同) 由堪根定理, 不難得知其有一小於1的正實根 α, 另有兩個共軛複數根 β,γ, 且 $|\beta|>1$。因此

$$c_n=n_1\alpha^n+n_2\beta^n+n_3\gamma^n$$

但是由 (3.1) 知道 $lim_{n\to\infty}c_n=0$, 所以當 $n\to\infty$ 時, $n_2\beta^n+n_3\gamma^n\to 0$。此時如果 $n_2\neq 0$,, 那麼因爲 $|\beta|>1$, 所以 $n_3\neq 0$, 而有 $(\frac{\gamma}{\beta})^n\to -\frac{n_2}{n_3}$, 進而可得 $\frac{\gamma}{\beta}=1$ (因爲 $(\frac{\gamma}{\beta})^{n+1}=\frac{\gamma}{\beta}\cdot(\frac{\gamma}{\beta})^n$ 而 $(\frac{\gamma}{\beta})^{n+1}\to -\frac{n_2}{n_3}$, $(\frac{\gamma}{\beta})^n\to -\frac{n_2}{n_3}$) 但 β,γ 爲共軛複數, 所以這是不可能的, 因此可知 $n_2=n_3=0$。現在可以知道, 事實上 $c_n=n_1\alpha^n$, 再利用 (2.1) 可得 $b_n=c_{n+1}+c_n=n_1\alpha^{n+1}+n_1\alpha^n=(1+\alpha)n_1\alpha^n$ 而 $a_n=b_{n+1}+b_n=(1+\alpha)^2n_1\alpha^n$。請注意到 $c_0=n_1$, $b_0=(1+\alpha)n_1$, $a_0=(1+\alpha)^n n_1$, 因此只要取任一 $n_1>0$, 就有 $a_0>b_0>0$, 且 $a_n>b_n>c_n>0$。

參考資料

1. 方塊數論, 中華民國第三十五屆科學展覽高中組第三名作品, 張建祥、王重凱 (作者), 林漢良、王玲玉 (指導老師)。

—本文作者任教於彰化師大數學系—

黃金分割的審美價值

張 雄

據數學史記載, “黃金分割”是由公元前6世紀古希臘哲學家、數學家畢達哥拉斯及其學派發現的。歐幾里得「幾何原本」第二卷是述說畢氏及其弟子的著述, 其中第十一節寫

道:“以點 H 按中末比截直線 AB, 使成黃金分割, 即 $AB:AH=AH:HB$”。「幾何原本」中還給出了求得黃金比的五種方法。

若設 $AB=1$, $AH=x$, 則上面等式變爲 $1\cdot x=x\cdot(1-x)$, 即 $x^2=1\cdot(1-x)$, 整理得一元二次方程 $x^2+x-1=0$, 解之得 $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$。

0.618 叫做“黃金數”。而“黃金比”這個名稱爲古希臘著名哲學家柏拉圖所命名。在歐洲又把“黃金比”稱爲黃金分割律”, 並且這一名稱是由19世紀德國美學家蔡辛提出來的。他深入研究了這一比例, 認爲黃金分割無論在藝術, 還是在自然中都是形式美的最佳比例關係。

畢達哥拉斯學派關於“美是和諧的比例”的美學觀點, 自古到今始終被美學家作爲形式美的一條法則。而如今連中學生都十分熟悉的黃金分割, 卻是何等誘人! 其中有著深奧的機理。中世紀德國數學家、天文學家開普勒指出: “幾何學中有兩件瑰寶, 一是畢達哥拉斯定理, 一是黃金分割律”, 他宣稱黃金分割是造物主賜予自然界傳宗接代的美妙之意 [1]。文藝復興時期, 黃金分割被視爲最神聖的比例。例如達 · 芬奇在「論繪畫」一書中指出: “美感完全建立在各部分之間神聖比例的關係上, 各特徵必須同時作用, 才能產生使觀衆往往如醉如痴的和諧比例”[2]。黃金分割在數學、美學、人體、藝術、自然中顯示出巨大的作用, 推動了人們在它指導下去認識世界和改造世界。難怪16世紀威尼斯數學家帕喬里稱之爲 “神賜的比例”。

黃金分割自產生起就成爲一條公認的著名美學定律, 被廣泛應用於音樂、繪畫、雕塑等藝術形式和建築之中。例如, 古希臘雅典的巴特農神殿, 就是按黃金分割比例來建造神殿的 (大理石柱廊高恰好占整個神殿高度的 0.618)。古埃及修建的胡夫大金字塔, 其高與底部正方形邊長之比爲 0.62。埃菲爾建造巴黎大鐵塔在比例上應用的也是黃金分割法。現在, 人們常在高塔的黃金分割點處建造樓閣或設置平臺, 能使平直、單調的塔身變得多彩多姿, 而在摩天大樓的黃金分割點處設置腰線或裝飾物, 則可使整個樓顯得宏偉而雅緻。拿藝術作品來說, 古希臘時代著名的雕塑: 米洛斯的納維斯女神塑像、智慧女神雅典娜和太陽神阿波羅塑像, 是故意延長雙腿, 使肚臍到脚底的高度與全身高度之比爲 0.618。因爲藝術家早就發現人的形體以下肢與身高之比爲 0.618 爲最美, 但生活中這樣的形體比例很少, 所以詩人荷馬早就指出: “單憑擴大腿和脚的尺度, 就可以產生一種崇高的儀容[3]。達 · 芬奇、提香、善切提利的作品中的許多比例關係, 也爲 0.618。

如今, 黃金分割的審美價值和應用範圍在不斷擴大。在舞臺表演上, 演員如果站在舞臺的黃金分割點處, 聽衆在臺下就感覺很勻稱, 而且聲音的傳播效果也最好。在演奏樂器時, 如果將二胡上的“千斤”放在琴弦的黃金分割點處, 則音樂可達到最佳。由於符合寬、長之比爲 0.618 的矩形被普遍認爲是美的 (畢氏學派曾作了大量實驗), 因此, 後世人也認爲在工藝美術和日常用品的長寬設計中採用這個比例, 就能引起美感, 令人賞心悅目, 如書本、櫃櫥、門窗等。據錢仁康教授說:“藝術上的‘黃金分割’比例, 和音樂中高潮的位置有密切關係。我們分析許多著名

的音樂作品，發覺其中高潮的出現，大多和黃金分割點相接近。”劉大白的「詩外形律詳說」則認爲，“詩歌中的五音停和七音停最接近於黃金分割”[4]。象徵主義詩人馬拉美甚至認爲，美的詩歌其“印刷符號”也“應依黃金分割律排列”。一些書法家在論及書法時認爲，漢字結構的重心大多數宜在偏左上方，以符合黃金分割律爲美。啓功先生在「論書絕句百首」中有詩云：“用筆何爲結字難，縱橫聚散最相關。一從證及黃金律，頓覺金牛骨隙寬。”

饒有興趣的是，植物學家們觀察到某些植物的生長也是按黃金分割的序列排列的。當一株嫩芽抽枝吐葉時，如果從這株嫩枝的頂端看下去，可以看到葉子的排列成一對數螺線，而葉子在螺旋線上的距離恰好符合黃金分割。人們按照車前草葉形排列的數學模式設計出來的螺旋形高樓大廈，每一房間都能得到充足的陽光。無獨有偶，向日葵的種子也是按特定的對數螺線弧排列的，而它們在螺旋線上的距離竟也服從黃金分割規律。其實，中世紀意大利數學家菲波那契就發現美妙的植物葉片、花瓣、松果殼瓣從小到大的序列即是以 $0.618:1$ 的近似值排列的。現代科學家還發現，當大腦呈現的“貝他”腦電波，其低頻率與高頻率之比是 0.618 的近似值 (8 赫茲與 12.9 赫茲之比) 時，人的心身最具快感。甚至，當大自然的氣溫在攝氏 23 度與人的體溫 37 度之比爲 0.618 時，這氣溫就是最適宜於人的身心，最使人感到舒適。在現代最優化理論中，黃金分割能使我們用較少的實驗找到合適的工藝條件或合理的配方。可見，黃金分割的審美價值已遠遠超出了藝術的範疇，物質世界的組成、大地萬物的誕生以及世間的許多事物，都和黃金分割有著千絲萬縷的關係。它不僅是哲學的領悟、數學的技巧和藝術的完美之間最驚人的結合，而且還是構成世界與宇宙原動力的內部規律。它體現著人類能感覺到的蘊藏在這個世界之後的神奇結構和深奧理性。

然而，黃金分割爲什麼成爲人們普遍喜愛的一種美的比例關係呢？　這始終被染著瑰麗詭秘的色彩。兩千五百年來，人們用各種方式企圖給予理論上的論證，但都不很成功。德國近代實驗美學家費希納曾根據黃金分割原理作心理學實驗，發現在用於實驗的幾何圖形中，最被人喜愛的比例關係十分接近黃金分割。但這仍未揭示出黃金分割具有審美價值的深層原因。後來從人類本身尋找答案的觀點得到人們的普遍接受。古今中外許多著名的稱之爲“美” 的建築，大多是模擬自然界的傑作，如我國“擬天”的傑作—北京天壇，1975年美國芝加哥的“擬山”的世界最高建築西爾斯大樓 (高 440 米 110 層，蘇姆設計)，1973年奧大利亞的悉尼歌劇院的“擬海”建築，“科威特之塔”的“擬月”。陳聲海提出，人們最熟悉、最喜愛、最尊敬、接觸最頻繁的還是人類自身，因而在建築藝術中也要“擬人”[5]。例如古今中外的絕大部分宮殿、廟宇、陵墓、紀念堂及一部分城市均採用了“左右對稱，前後有別，上下迥異”的“人體式”布局。人體形象中間高，兩旁低的特徵，被模擬到建築物上就形成對稱布置的中高兩低的“橫向三段式”。有的則進一步模擬人們歡迎或擁抱的姿態，使建築物形成左右

對稱中間高、左右高低錯落並靠前、平面略呈“I”或“王”字形的“橫向五段或七段” 式的布局。還有模擬人體“上段小, 中段大而實, 下段虛長”的“垂直三段式”布局, 北京“四合院”從布局上則模擬了人們牽兒帶女的家庭序列。50年代, 北京工業設計院編寫了一本「建築資料集」收集了我國各地成年人人體尺寸的調查, 男性中等人體軀幹部分寬高比爲 1 : 1.61878, 高中低三類人體平均計算其比爲 1 : 1.61, 女性也差不多。世界各地民族體高差別較大, 但軀幹部分的寬高比都接近 1 : 1.618, 並且人類在進化過程中其軀幹部分變化也最小。自古至今人們十分崇尚人體美, 特別是古希臘民族, 社會上不少專家、學者研究人體美。正因爲黃金分割符合人體的寬高比, 人類在長期社會實踐中, 它與人的特殊生理和心理結構形成了協調關係, 因而對它感到習慣進而轉爲喜愛, 並形成“擬人化”的審美尺度。這與普羅塔哥拉提出的“人是萬物的尺度” 這一著名命題相一致, 這是一個不同於自然本體論的人本學命題。

除上述觀點外, 筆者還認爲, 黃金分割之所以具有審美價值, 是在於黃金分割是一種自然界的客觀規律。如果僅僅把黃金分割的審美價值歸之於它符合人身軀幹寬高之比這樣的審美“擬人化”, 那麼, 黃金分割在生物學上和其它一些科學技術上的意義將無法解釋。如前所述, 許多植物都按此比例生長, 葉子或枝條在枝幹上呈螺旋上昇中, 如果把第一片葉子在水平面上的投影作爲計算角度的起點, 那麼第二片葉子的投影恰好在這個周角的黃金分割處, 即相鄰兩片葉子投影間的夾角爲 $(1-\frac{\sqrt{5}-1}{2})360^\circ \approx 137.50776^\circ$。因爲 $\sqrt{5}$ 是無理數即無限不循環小數, 故這樣分布可以保證下面的任何一片葉子永遠不會被上面的某一片葉子所完全覆蓋, 這就可使下面的葉子得到足夠的光照。植物怎麼知道黃金分割或擬人呢? 筆者的觀點是, 黃金分割是自然界固有的一種規律, 具有“天然合理”的意義, 它同其他自然規律一樣, 被人類在長期的生活實踐活動中所逐漸認識和發現, 同時審美活動又要符合自然規律, 從而便使黃金分割賦于了審美價值。這說明了黃金分割是“自然人化”的結果, 其中體現著人的本質力量和自由形式。也證實了黃金分割的數學美學意義及理性特徵。

參考文獻

1. [1][3][4] 丁文復, 黃金分割及其應用,「美育」, 1983年第3期。
2. [2] 徐本順、殷啓正, 數學中的美學方法, 江蘇教育出版社, 1991年版, 第90頁。
3. [5] 陳聲海, 建築藝術中的模擬、擬人傾向,「潛科學」, 1981年第1期,「光明日報」, 1981年7月21日。

—本文作者任教於中國陝西教育學院數學系—