正項數列及其算數平均數列與幾何平均數列斂散性之比較

張國男

正文 (論證及實例)

本篇之主旨, 係針對正項數列 $\{a_n\}$, 及其算術平均數列 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\}$, 與幾何平均數列 $\{(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 三者, 研究其斂散之蘊涵關係。爲廣流傳, 俾利教學, 特將探求所得之結果, 綜合整理之, 而撰成此短文, 獻與高中數理資優班師生及大專修習微積分課程之學生, 以供參考。

於本篇中, 恆以 C, R 與 N 分別表示所有複數, 所有實數與所有正整數所構成之集合。茲先引介下列之基本定義及重要備註:

定義: 設 $a_n \in C\ \forall n \in N$, 且 $\alpha \in C$。若任予 $\varepsilon > 0$, 必 (對應) 有 $p \in N$ (p 可隨 ε 之變動而變動), 能使 $|a_n-\alpha| < \varepsilon\ \forall n \geq p$, 則謂 (無窮) 數列 $\{a_n\}$ 有極限 α, 亦謂 α 爲數列 $\{a_n\}$ 之極限, 更謂數列 $\{a_n\}$ 收斂於α, 並記 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 或 $a_n \to \alpha$ 以表此事實; 此時 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在, 數列 $\{a_n\}$ 收斂。若無合乎上述條件之定數 α, 則謂 $\{a_n\}$ 無極限; 此時 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 不存在, 數列 $\{a_n\}$ 發散。

備註: 對於上述之定義, 宜作下列二項考察:

(一) 一數列 $\{a_n\}$ 若有極限, 則僅有一極限: 蓋若 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha_1$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha_2$, 且 $\alpha_1 \neq \alpha_2$, 則據上述定義, 對於 $\varepsilon = |\alpha_1 - \alpha_2| > 0$ 而言, 必有 p_1, $p_2 \in N$, 使 $|a_n - \alpha_1| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n \geq p_1$, 且 $|a_n - \alpha_2| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n \geq p_2$。取 $p = \max(p_1, p_2)$, 則當 $n \geq p$ 時, $\varepsilon = |\alpha_1 - \alpha_2| = |(a_n - \alpha_2) - (a_n - \alpha_1)| \leq |a_n - \alpha_2| + |a_n - \alpha_1| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, 矛盾! 故必 $\alpha_1 = \alpha_2$。由此, 遂知: 上述定義中「 數列 $\{a_n\}$ 有極限 α 」,「 α 爲數列 $\{a_n\}$ 之極限」, $\cdots$,「記 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 或 $a_n \to \alpha$ 以表此事實」等, 均爲合理之用語。

(二) 若 $a_n \in R$, $\forall n \in N$, 且 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 存在, 則必 $\alpha \in R$: 蓋若不然, 設 $\alpha = x + yi$, 其中 $x, y \in R$, 且 $y \neq 0$, 則據上述定義, 對於 $\varepsilon = |y| > 0$ 而言, 必有 $p \in N$, 使 $|a_p - \alpha| < \varepsilon$。因此, 遂得 $|y| \leq \sqrt{(a_p - x)^2 + y^2} < \varepsilon = |y|$, 矛盾! 故必 $\alpha \in R$。由是, 遂知: 實數數列若有極限, 則其極限必爲實數。

在正文中, 除非特別聲明, 否則恆限定 $a_n > 0\ \forall n \in N$; 再者, 除非附帶解說, 否則數列斂散之推導驗證, 俱以上述之定義爲據。

正項數列 $\{a_n\}$, 其算術平均數列 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k\}$, 與幾何平均數列 $\{(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 三者斂散之關係, 共可分爲六種, 如下列之問題1,2,3,4,5 與6所示。茲依序推證於後:

問題1: 若數列 $\{a_n\}$ 收斂, 則數列 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k\}$ 與 $\{(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 必俱收斂, 且 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k = \lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}$, 試證之。

證明: 因數列 $\{a_n\}$ 收斂, 故 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 爲定數。

(1) 設 $\varepsilon > 0$ 已予。因 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, 必有 $p \in N$, 使 $|a_n-\alpha| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n \geq p$。因 $\sum_{k=1}^p |a_k-\alpha|$ 爲固定之 (非負) 實數, 必有 $q \in N$, 使 $\frac{1}{p+m}\sum_{k=1}^p |a_k-\alpha| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall m \geq q$。由是, 可知 $|\frac{1}{p+m}\sum_{k=1}^{p+m} a_k - \alpha| = \frac{1}{p+m}|\sum_{k=1}^{p+m}(a_k-\alpha)| \leq \frac{1}{p+m}\sum_{k=1}^p |a_k - \alpha| + \frac{1}{p+m}\sum_{k=p+1}^{p+m}|a_k-\alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{m\varepsilon}{2(p+m)} < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ \forall m \geq q$, 故 $|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k - \alpha| < \varepsilon\ \forall n \geq p+q$, 遂證得 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k = \alpha$ 矣。

(2) 因已約定 $a_n > 0\ \forall n \in N$, 故由上述備註 (二) 知 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \in R$。若 $\alpha < 0$, 則據定義, 對於 $\varepsilon = -\frac{\alpha}{2} > 0$ 而言, 必有 $p \in N$, 使 $|a_p - \alpha| < \varepsilon = -\frac{\alpha}{2}$; 但 $a_p > 0$, 故得 $-\alpha < a_p - \alpha < -\frac{\alpha}{2}$, 矛盾! 遂知 $\alpha \geq 0$。(i) $\alpha = 0$ 時, 可推導如次: 設 $\varepsilon > 0$ 已予。由 (1), 可知 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k = 0$, 故必有 $p \in N$, 使 $|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k - 0| < \varepsilon\ \forall n \geq p$。據算術平均與幾何平均不等式, 遂有 $|(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}} - 0| \leq |\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k - 0| < \varepsilon\ \forall n \geq p$, 故證得 $\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}} = 0$ 矣。(ii) $\alpha > 0$ 時, 可推導如次: 若 $\varepsilon' > 0$ 已予, 可取一定數 ε, 使 $\varepsilon \leq \varepsilon'$, 且 $0 < \varepsilon < \alpha$。因 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, 必有 $p \in N$, 使 $\alpha - \frac{\varepsilon}{3} < a_n < \alpha + \frac{\varepsilon}{3}\ \forall n \geq p$。若令 $a = \prod_{k=1}^p \frac{a_k}{\alpha}$, 且 $c_n = (\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}$, 其中 $n \in N$, 則 $c_{p+m} = (\prod_{k=1}^{p+m} a_k)^{\frac{1}{p+m}} = \alpha a^{\frac{1}{p+m}}(\prod_{k=p+1}^{p+m}\frac{a_k}{\alpha})^{\frac{1}{p+m}}\ \forall m \in N$, 據上可得 $\alpha a^{\frac{1}{p+m}}(1-\frac{\varepsilon}{3\alpha})^{\frac{m}{p+m}} < c_{p+m} < \alpha a^{\frac{1}{p+m}}(1+\frac{\varepsilon}{3\alpha})^{\frac{m}{p+m}}\ \forall m \in N$。由此與 $1-\frac{\varepsilon}{3\alpha} < (1-\frac{\varepsilon}{3\alpha})^{\frac{m}{p+m}}$ 及 $(1+\frac{\varepsilon}{3\alpha})^{\frac{m}{p+m}} < 1+\frac{\varepsilon}{3\alpha}$, 知 $\alpha a^{\frac{1}{p+m}}(1-\frac{\varepsilon}{3\alpha}) < c_{p+m} < \alpha a^{\frac{1}{p+m}}(1+\frac{\varepsilon}{3\alpha})\ \forall m \in N$; 又, 若取 $q \in N$, 使 $q > \frac{\log_{10} a}{\log_{10}(1-\frac{\varepsilon}{3\alpha})} - p$, $q > \frac{\log_{10} a}{\log_{10}(1+\frac{\varepsilon}{3\alpha})} - p$, 則 $1-\frac{\varepsilon}{3\alpha} < a^{\frac{1}{p+m}} < 1+\frac{\varepsilon}{3\alpha}\ \forall m \geq q$; 合之, 得 $\alpha(1-\frac{\varepsilon}{3\alpha})^2 < c_{p+m} < \alpha(1+\frac{\varepsilon}{3\alpha})^2\ \forall m \geq q$。據此與 $1-\frac{\varepsilon}{\alpha} < (1-\frac{\varepsilon}{3\alpha})^2$ 及 $(1+\frac{\varepsilon}{3\alpha})^2 < 1+\frac{\varepsilon}{\alpha}$, 可知 $\alpha-\varepsilon < c_{p+m} < \alpha+\varepsilon\ \forall m \geq q$, 故 $|c_n - \alpha| < \varepsilon \leq \varepsilon'\ \forall n \geq p+q$, 遂證得 $\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}} = \alpha$ 矣。

備註: (一) 由 (1) 之推導, 可知: 若 $a_n \in C\ \forall n \in N$, 且 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 存在, 則必 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k = \alpha$。換言之, 若數列 $\{a_n\}$ 收斂, 則其算術平均數列 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k\}$ 亦必收斂, 且 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k = \lim_{n\to\infty} a_n$; 根本不必限定 $a_n \in R$, 當然更無須限定 $a_n > 0$。

(二) 解答 (2) 之 (i), 即 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 之情形, 亦可仿 (2) 之 (ii) 而推導如次:

設 $\varepsilon > 0$ 已予。因 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, 必有 $p \in N$, 使 $|a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{2}$ 即 $0 < a_n < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq p$, 故 $0 < (\prod_{k=1}^{p+m} a_k)^{\frac{1}{p+m}} = (\prod_{k=1}^{p} a_k)^{\frac{1}{p+m}} (\prod_{k=p+1}^{p+m} a_k)^{\frac{1}{p+m}} < (\prod_{k=1}^{p} a_k)^{\frac{1}{p+m}} (\frac{\varepsilon}{2})^{\frac{m}{p+m}} = (\prod_{k=1}^{p} \frac{2a_k}{\varepsilon})^{\frac{1}{p+m}} (\frac{\varepsilon}{2})$ $\forall m \in N$。因 $\prod_{k=1}^{p} \frac{2a_k}{\varepsilon}$ 爲固定正數, 必有 $q \in N$ 使 $\prod_{k=1}^{p} \frac{2a_k}{\varepsilon} < 2^{p+q}$, 故 $0 < (\prod_{k=1}^{p} \frac{2a_k}{\varepsilon})^{\frac{1}{p+m}} < 2$ $\forall m \geq q$。據上, 遂知 $|(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} - 0| < 2(\frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon$ $\forall n \geq p+q$, 故證得 $\lim_{n\to\infty} (\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} = 0$ 矣。

(三) 若不限定極限之論證須據上述之定義, 且讀者已充分了解常用對數及指數函數之定義與其基本性質, 則解答 (2) 之 (ii), 即 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha > 0$ 之情形, 亦可推導如次: 因 $a_n > 0$ 且 $a_n \to \alpha$, 故 $\log_{10} a_n \to \log_{10} \alpha$。據此與 (1)[參考備註 (一), 注意 $\log_{10} a_n$ 未必爲正], 得 $\log_{10} (\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \log_{10} a_k \to \log_{10} \alpha$, 故 $(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} = 10^{\log_{10} (\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}} \to 10^{\log_{10} \alpha} = \alpha$。

(四) 早年, 大多數理工科系微積分教本均列有如下之習題: 若 $a_n \in R$ $\forall n \in N$, 且 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 存在, 則必 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = \alpha$, 試證之。

(五) 設 α 爲固定之正數, 令 $a_n = \alpha$ $\forall n \in N$, 則 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = (\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} = \alpha$ $\forall n \in N$。若 $\varepsilon > 0$ 已予, 則因 $|a_n - \alpha| = 0 < \varepsilon$ $\forall n \in N$, 故 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$; 遂知此爲 $\{a_n\}$, $\{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k\}$ 與 $\{(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 俱收斂於 α (其實三數列全同) 之一簡明實例。

問題 2: 試舉一數列 $\{a_n\}$, 使 $\{a_n\}$ 發散, $\{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k\}$ 與 $\{(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 俱收斂, 且 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} (\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}$, 並驗證之。

解答: 令

$$a_n = \begin{cases} 2 \text{ (若 } n = \ell^2, \text{而 } \ell \in N), \\ 1 \text{ (若 } n \in N \backslash \{\ell^2 | \ell \in N\})。\end{cases}$$

(1) 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 爲定數, 則必有 $p \in N$, 使 $|a_n - \alpha| < \frac{1}{2}$ $\forall n \geq p$, 故 $1 = |a_{p^2+1} - a_{p^2}| = |(a_{p^2+1} - \alpha) - (a_{p^2} - \alpha)| \leq |a_{p^2+1} - \alpha| + |a_{p^2} - \alpha| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, 矛盾! 遂知數列 $\{a_n\}$ 發散。

(2) 若 $n \in N$, 則必有 $\ell \in N$, 使 $\ell^2 \leq n < (\ell+1)^2$, 故 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n+\ell}{n} = 1 + \frac{\ell}{n}$, 遂知 $1 < \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \leq 1 + \frac{\sqrt{n}}{n} = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$。設 $\varepsilon > 0$ 已予。若取 $p \in N$, 使 $p > (\frac{1}{\varepsilon})^2$, 則據上可得 $-\varepsilon < \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k - 1 \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{p}} < \varepsilon$ $\forall n \geq p$, 故 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = 1$, 即數列 $\{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k\}$ 收斂於 1。

(3) 設 $\varepsilon > 0$ 已予。因 $1 < (\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{\ell}{n}} \leq 2^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$, 若取 $p \in N$, 使 $p > [\frac{1}{\log_2(1+\varepsilon)}]^2$, 則 $-\varepsilon < (\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} - 1 \leq 2^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \leq 2^{\frac{1}{\sqrt{p}}} - 1 < \varepsilon$ $\forall n \geq p$, 故 $\lim_{n\to\infty} (\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} = 1$, 即數列 $\{(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 收斂於 1。

由 (1)∼(3), 即知數列 $\{a_n\}$ 確實合乎條件。

備註: (一) $\{a_n\}$ 之建構: 考慮各項均爲 1 之無窮數列 [參見問題 1 備註 (五)], 將其第 ℓ^2 項 $(\ell \in N)$ 俱改爲 2, 即得本題所舉之數列 $\{a_n\}$。由於 a_{ℓ^2} 與 a_{ℓ^2+1} 之差恆爲 1, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k$ 與 1 之距離 $= \frac{\ell}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$,

且 $(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}$ 與1之比值介於1與 $2^{\frac{\ell}{n}} \le 2^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$ 之間, 直覺認為數列 $\{a_n\}$ 發散, 且 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\}$ 與 $\{(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 俱收斂於1。[正式論證見上示解答]

(二) 類似實例:

$$a_n=\begin{cases}3(\text{若}n=\ell^2,\text{而}\ell\in N),\\1(\text{若}n\in N\backslash\{\ell^2|\ell\in N\});\end{cases}$$

$$a_n=\begin{cases}4(\text{若}n=\ell^2,\text{而}\ell\in N),\\1(\text{若}n\in N\backslash\{\ell^2|\ell\in N\});\end{cases}\cdots。$$

$$a_n=\begin{cases}2(\text{若}n=\ell^3,\text{而}\ell\in N),\\1(\text{若}n\in N\backslash\{\ell^3|\ell\in N\});\end{cases}$$

$$a_n=\begin{cases}2(\text{若}n=\ell^4,\text{而}\ell\in N),\\1(\text{若}n\in N\backslash\{\ell^4|\ell\in N\});\end{cases}\cdots。$$

問題3: 試舉一數列 $\{a_n\}$, 使 $\{a_n\}$ 發散, $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\}$ 與 $\{(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 俱收斂, 且 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k \ne \lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}$, 並驗證之。

解答: 令

$$a_n=\begin{cases}2(\text{若}n\text{為正奇數}),\\\frac{1}{2}(\text{若}n\text{為正偶數}),\end{cases}$$

則

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\begin{cases}\frac{5}{4}+\frac{3}{4n}(\text{若}n\text{為正奇數}),\\\frac{5}{4}(\text{若}n\text{為正偶數}),\end{cases}$$

$$(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}=\begin{cases}2^{\frac{1}{n}}(\text{若}n\text{為正奇數}),\\1(\text{若}n\text{為正偶數})。\end{cases}$$

(1) 若 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ 為定數, 則必有 $p\in N$, 使 $|a_n-\alpha|<\frac{1}{2}\ \forall n\ge p$, 故 $\frac{3}{2}=|a_{p+1}-a_p|=|(a_{p+1}-\alpha)-(a_p-\alpha)|\le|a_{p+1}-\alpha|+|a_p-\alpha|<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, 矛盾! 遂知 $\lim_{n\to\infty}a_n$ 不存在, 即數列 $\{a_n\}$ 發散。

(2) 若 $n=2j+1(j\in N\cup\{0\})$, 則 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{n}[(2+\frac{1}{2})j+2]=\frac{1}{n}[\frac{5}{2}(\frac{n-1}{2})+2]=\frac{5}{4}+\frac{3}{4n}$; 若 $n=2j(j\in N)$, 則 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{n}(2+\frac{1}{2})j=\frac{1}{n}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{n}{2}=\frac{5}{4}$。設 $\varepsilon>0$ 已予。若取 $p\in N$, 使 $p>\frac{3}{4\varepsilon}$, 則 $|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k-\frac{5}{4}|\le\frac{3}{4n}\le\frac{3}{4p}<\varepsilon\ \forall n\ge p$, 故 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{5}{4}$, 即數列 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\}$ 收斂於 $\frac{5}{4}$。

(3) 設 $\varepsilon>0$ 已予。若取 $p\in N$, 使 $p>\frac{1}{\log_2(1+\varepsilon)}$, 則 $0\le(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}-1\le2^{\frac{1}{n}}-1\le2^{\frac{1}{p}}-1<\varepsilon\ \forall n\ge p$, 故 $|(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}-1|<\varepsilon\ \forall n\ge p$, 遂知 $\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}=1$, 即數列 $\{(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 收斂於1。

由 (1)∼(3), 即知數列 $\{a_n\}$ 確實合乎條件。

備註: (一) 由於 a_{2n-1} 與 a_{2n} 之差恆為 $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k$ 與 $\frac{5}{4}$ 之距離 $\le\frac{3}{4n}$, 且 $(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}$ 與1之比值介於1與 $2^{\frac{1}{n}}$ 之間, 直覺認為數列 $\{a_n\}$ 發散, $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\}$ 收斂於 $\frac{5}{4}$, $\{(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 收斂於1。[正式論證見上示解答]

(二) 類似實例:

$$a_n=\begin{cases}3(\text{若}n\text{為正奇數}),\\\frac{1}{3}(\text{若}n\text{為正偶數});\end{cases}$$

$$a_n=\begin{cases}4(\text{若}n\text{為正奇數}),\\\frac{1}{4}(\text{若}n\text{為正偶數});\end{cases}\cdots。$$

問題4: 試舉一數列 $\{a_n\}$, 使 $\{a_n\}$ 與

$\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\}$ 俱發散, 且 $\{(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 收斂, 並驗證之。

解答: 令

$$a_n=\begin{cases} n(若n爲正奇數),\\ \frac{1}{n-1}(若n爲正偶數),\end{cases}$$

$b_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k$, $c_n=(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}$。

(1) 若 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ 爲定數, 則必有 $p\in N$, 使 $|a_n-\alpha|<1\ \forall n\geq p$, 故 $2=|a_{2p+1}-a_{2p-1}|=|(a_{2p+1}-\alpha)-(a_{2p-1}-\alpha)|\leq|a_{2p+1}-\alpha|+|a_{2p-1}-\alpha|<1+1=2$, 矛盾! 遂知 $\lim_{n\to\infty}a_n$ 不存在, 即數列 $\{a_n\}$ 發散。

(2) 由 $b_{2n-1}\geq\frac{1}{2n-1}\sum_{j=1}^{n}a_{2j-1}=\frac{1}{2n-1}\sum_{j=1}^{n}(2j-1)=\frac{n^2}{2n-1}=\frac{n}{2}+\frac{n}{2(2n-1)}>\frac{n}{2}\ \forall n\in N$, 可知數列 $\{b_n\}$ 發散: 蓋若 $\{b_n\}$ 收斂, 設 $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$, 則必有 $p\in N$, 使 $|b_n-\beta|<1\ \forall n\geq p$, 故 $b_n=|(b_n-\beta)+\beta|\leq|b_n-\beta|+|\beta|<1+\beta\ \forall n\geq p$; 取 $n\in N$, 使 $n\geq p$ 且 $n\geq 2(1+\beta)$, 則得 $b_{2n-1}<1+\beta\leq\frac{n}{2}<b_{2n-1}$, 矛盾!

(3) 顯然,

$$c_n=\begin{cases} n^{\frac{1}{n}}(若n爲正奇數),\\ 1(若n爲正偶數)。\end{cases}$$

令 $n^{\frac{1}{n}}=1+h_n(n\in N)$, 則 $h_1=0$, $h_n>0(n\geq 2)$。當 $n\geq 2$ 時, 由 $n=(1+h_n)^n=1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2}h_n^2+\cdots$, 得 $n-1>\frac{n(n-1)}{2}h_n^2$; 故 $h_n<\sqrt{\frac{2}{n}}\ \forall n\in N$。設 $\varepsilon>0$ 已予。若取 $p\in N$, 使 $p>\frac{2}{\varepsilon^2}$, 則 $|c_n-1|\leq h_n<\sqrt{\frac{2}{n}}\leq\sqrt{\frac{2}{p}}<\varepsilon\ \forall n\geq p$, 故 $\lim_{n\to\infty}c_n=1$, 即數列 $\{c_n\}$ 收斂於1。

由 (1)~(3), 即知數列 $\{a_n\}$ 確實合乎條件。

備註: (一) 多數微積分教本均列有「試證 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$」或「試求 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$」之習題。[參見上示解答 (3)]

(二) 本題實例之建構, 其難度較高。解題之靈感, 來自 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ 之事實 [見備註 (一)]; 據

$$(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}=\begin{cases} n^{\frac{1}{n}}(若n爲正奇數)\\ 1(若n爲正偶數)\end{cases}$$

反推之, 即得數列 $\{a_n\}$。

(三) 類似實例:

$$a_n=\begin{cases} \frac{1}{n}(若n爲正奇數),\\ n-1(若n爲正偶數);\end{cases}$$

$$a_n=\begin{cases} 1(若n=1),\\ n-1(若n爲大於1之奇數),\\ \frac{1}{n}(若n爲正偶數);\end{cases}$$

$$a_n=\begin{cases} 1(若n=1),\\ \frac{1}{n-1}(若n爲大於1之奇數),\\ n(若n爲正偶數)。\end{cases}$$

問題5: 試舉一數列$\{a_n\}$, 使 $\{a_n\}$ 與 $\{(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 俱發散, 且 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\}$ 收斂, 並驗證之。

解答: 令

$$a_n=\begin{cases} \frac{1}{2^n}(若n=2^\ell-1, 而\ell\in N),\\ 2(若n\in N\backslash\{2^\ell-1|\ell\in N\}),\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k,\ c_n=\Big(\prod_{k=1}^{n}a_k\Big)^{\frac{1}{n}}。$$

(1) 若 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ 爲定數, 則必有 $p\in N$, 使 $|a_n-\alpha|<\frac{3}{4}\ \forall n\geq p$; 取

$n_1=2^p-1$, $n_2=2^p$, 則得 $\frac{3}{2}=|2-\frac{1}{2}|\le |a_{n_2}-a_{n_1}|=|(a_{n_2}-\alpha)-(a_{n_1}-\alpha)|\le |a_{n_2}-\alpha|+|a_{n_1}-\alpha|<\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$, 矛盾! 遂知 $\lim_{n\to\infty}a_n$ 不存在, 即數列 $\{a_n\}$ 發散。

(2) 若 $n\in N$, 則必有 $\ell\in N$, 使 $2^\ell-1\le n<2^{\ell+1}-1$, 於是易得 $\frac{2(n-\ell)}{n}<b_n<2$。又, 由 $n\ge 2^\ell-1=(1+1)^\ell-1\ge \ell+\frac{\ell(\ell-1)}{2}>\frac{\ell^2}{2}$, 可知 $\ell<\sqrt{2n}$。合之, 即得 $2-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n}}<b_n<2$, 故 $|b_n-2|<\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\ \forall n\in N$。設 $\varepsilon>0$ 已予。若取 $p\in N$, 使 $p>\frac{8}{\varepsilon^2}$, 則 $|b_n-2|<\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n}}<\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{p}}<\varepsilon\ \forall n\ge p$, 故 $\lim_{n\to\infty}b_n=2$, 即數列 $\{b_n\}$ 收斂於 2。

(3) 注意 $n=2^\ell-1$ 時 $c_n=\frac{1}{2}$, $n=2^{\ell+1}-2$ 時 $c_n=1$, 可知數列 $\{c_n\}$ 發散: 蓋若 $\{c_n\}$ 收斂, 設 $\lim_{n\to\infty}c_n=\gamma$, 則必有 $p\in N$, 使 $|c_n-\gamma|<\frac{1}{4}\ \forall n\ge p$; 取 $n_1=2^p-1$, $n_2=2^{p+1}-2$, 則得 $\frac{1}{2}=|c_{n_2}-c_{n_1}|=|(c_{n_2}-\gamma)-(c_{n_1}-\gamma)|\le |c_{n_2}-\gamma|+|c_{n_1}-\gamma|<\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$, 矛盾!

由 (1)~(3), 即知數列 $\{a_n\}$ 確實合乎條件。

備註: (一) 本題實例之建構, 其難度甚高。筆者解題之策略, 係設計數列 $\{\prod_{k=1}^n a_k\}$, 使其自第 $n_1=2^\ell-1$ 項至第 $n_2=2^{\ell+1}-2$ 項 $(\ell\in N)$ 之値, 由 $\frac{1}{2^{n_1}}$ 逐項倍增以至於1。[參考備註 (二) 所示諸例]

(二) 類似實例:

$$a_n=\begin{cases}3^{-(2n+3)}(\text{若}n=3^\ell-2,\text{而}\ell\in N),\\ 3(\text{若}n\in N\backslash\{3^\ell-2|\ell\in N\});\end{cases}$$

$$a_n=\begin{cases}4^{-(3n+8)}(\text{若}n=4^\ell-3,\text{而}\ell\in N),\\ 4(\text{若}n\in N\backslash\{4^\ell-3|\ell\in N\});\end{cases}$$

$$a_n=\begin{cases}5^{-(4n+15)}(\text{若}n=5^\ell-4,\text{而}\ell\in N),\\ 5(\text{若}n\in N\backslash\{5^\ell-4|\ell\in N\});\end{cases}$$

$\cdots$。

問題6: 試舉一數列 $\{a_n\}$, 使 $\{a_n\}$, $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k\}$ 與 $\{(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 俱發散, 並驗證之。

解答: 令 $a_n=n^n$, $b_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k$, $c_n=(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}$, $n\in N$。因 $\{a_n\}$ 爲遞增數列, 故 $a_n\ge b_n$。據算術平均與幾何平均不等式, 知 $b_n\ge c_n$。顯然, $c_n\ge n$。合之, 得 $a_n\ge b_n\ge c_n\ge n\ \forall n\in N$。若 $\lim_{n\to\infty}c_n=\gamma$ 存在, 則必有 $p\in N$, 使 $|c_n-\gamma|<1\ \forall n\ge p$, 故 $c_n=|(c_n-\gamma)+\gamma|\le|c_n-\gamma|+|\gamma|<1+\gamma\ \forall n\ge p$; 取 $n\in N$, 使 $n\ge p$, 且 $n\ge 1+\gamma$, 則得 $c_n<1+\gamma\le n\le c_n$, 矛盾! 遂知 $\lim_{n\to\infty}c_n$ 不存在, 即數列 $\{c_n\}$發散。同理, 可知數列 $\{b_n\}$ 與 $\{a_n\}$ 亦俱發散。

備註: (一) 本題之實例極易建構。

(二) 類似實例:

$$a_n=n^{2n},$$
$$a_n=n^{3n},\ldots。$$
$$a_n=n^{n^2},$$
$$a_n=n^{n^3},\ldots。$$

衆所周知: 逕據定義以推導驗證, 與建構合乎條件之淺顯實例, 此二者俱爲重要之數學課題。本文之作, 其意蓋在此也。

附錄 (參考試題)

茲謹提出下列試題, 供數學教師參考使用。

試題1: 證明或否證下列各命題:

(1) 若 $a_n > 0\ \forall n \in N$, 且 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 爲定數, 則 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \alpha$。

(2) 若 $a_n > 0\ \forall n \in N$, 且 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 爲定數, 則 $\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} = \alpha$。

(3) 若 $a_n > 0\ \forall n \in N$, 且 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \alpha$ 爲定數, 則 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$。

(4) 若 $a_n > 0\ \forall n \in N$, 且 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \alpha$ 爲定數, 則 $\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} = \alpha$。

(5) 若 $a_n > 0\ \forall n \in N$, 且 $\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} = \alpha$ 爲定數, 則 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$。

(6) 若 $a_n > 0\ \forall n \in N$, 且 $\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} = \alpha$ 爲定數, 則 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \alpha$。

試題2: 證明及舉證:

(1) 若正項數列 $\{a_n\}$ 收斂 (即 $a_n > 0\ \forall n \in N$, 且 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 爲定數), 則數列 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ 與 $\{(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 必俱收斂, 且 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}$, 試證之。

(2) 試舉一發散正項數列 $\{a_n\}$, 使數列 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ 與 $\{(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 俱收斂, 且 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}$, 並驗證之。

試題3: 證明或否證下列各命題:

(1) 若 $a_n > 0\ \forall n \in N$, 且數列 $\{(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 收斂, 則數列 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ 必收斂。

(2) 若 $a_n > 0\ \forall n \in N$, 且數列 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ 收斂, 則數列 $\{(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 必收斂。

試題4: 證明或否證下列各命題:

(1) 若 $a_n > 0\ \forall n \in N$, 且數列 $\{a_n\}$ 收斂, 則數列 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ 必收斂。

(2) 若 $a_n > 0\ \forall n \in N$, 且數列 $\{a_n\}$ 收斂, 則數列 $\{(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 必收斂。

(3) 若 $a_n > 0\ \forall n \in N$, 且數列 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ 收斂, 則數列 $\{a_n\}$ 必收斂。

(4) 若 $a_n > 0\ \forall n \in N$, 且數列 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ 收斂, 則數列 $\{(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 必收斂。

(5) 若 $a_n > 0\ \forall n \in N$, 且數列 $\{(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 收斂, 則數列 $\{a_n\}$ 必收斂。

(6) 若 $a_n > 0\ \forall n \in N$, 且數列 $\{(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 收斂, 則數列 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ 必收斂。

—本文作者已於任教台灣大學數學系25年後退休—