從尤拉公式到空間的平面分割

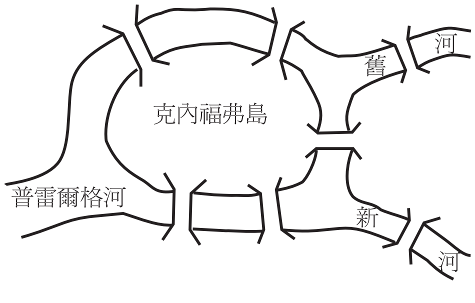
宋秉信

摘　要: 本文通過具體事例, 介紹拓樸學在初等數學中的應用。把歐拉定理引入初等幾何, 得到定理一。它為“直線分割平面問題”的求解提供一個模式。再將定理一縱向延伸, 也就是將布安加雷定理横向延伸, 得到定理二。它為“平面分割空間問題”的求解提供了一個模式。

關鍵詞: 頂點、面數、稜數、分割。

(一)

1735 年夏天的一個晚上, 哥德巴赫 (Goldbach) 對歐拉 (Euler, Leonhard) 說: “在我的故鄉, 東普魯士的哥尼斯堡 (Konigsberg), 有條普雷格爾河 (Pregl)。它分成兩叉流進城內, 然後在克內福弗島 (Kneiphof) 匯集。河面上有七座大橋, 把克內福弗島與兩岸城區相聯。島上有所古老的哥尼斯堡大學。每天傍晚時分, 大學生們都喜歡散步於這七座大橋之間”。說著哥德巴赫在紙上畫了張示意圖。(圖一)



圖一

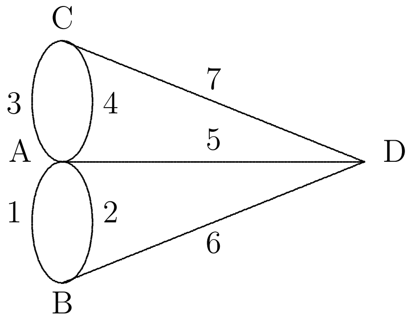
“有一天, 有一個大學生和同伴們打賭: 看誰能連著一次走遍這七座橋, 每座橋只准走過一次, 既不能重複也不准遺漏”。

“這雖然是一個普通的玩笑, 但是它卻難倒了哥尼斯堡所有的人。連以博學著稱的哥尼斯堡大學的教授們也感到一籌莫展”。

“故鄉的人們寫信找我, 要我幫助解決。我想你也許對這個問題會有興趣”。

歐拉將信從頭到尾認眞看了一遍。他認為這絕不是一個普通遊戲, 而是一個頗有價值的數學問題。在以後的思考中, 他首先想到的是德國大數學家萊布尼茲 (Leibniz, Gottfried Wilhelm) 在1679年寫的「幾何特徵」一書。他在研究紮記中寫道: “古希臘研究的幾何學, 是研究幾何量 (長度和角度) 大小及其測量方法的學科。萊布尼茲首先提出了幾

何學的另一個分支, 即位置幾何學。這個分支至今還很少爲人所知。它研究的對象只依賴於物體的相對位置和順序, 而與幾何量的大小無關”。根據這個思想, 他認爲兩岸的陸地和河中的小島只是聯結橋樑的節點, 它們的大小與這個問題無關, 所以可以縮成四個點。七座橋是必須經過的路線, 且每條路只允許走過一次, 可抽象成七條線來表示。如圖二。這樣,



(圖二)

歐拉把一個貌似複雜的實際問題抽象並簡化成圖二的形式, 即通過四個點, 七條線的“一筆畫”問題。而且歐拉從衆多人的失敗中想到, 這樣的走法可能根本就不存在。隨後, 他用 MM 方法出色地證實了自己的猜想是正確的。並於1736年完成了題爲「哥尼斯堡七橋問題」的著名論文。這篇論文奠定了數學的一個分支—「拓撲學」和「現代圖論」的基礎。在此基礎上歐拉又作出了一個重要貢獻, 這就是人所共知的“多面體公式”。

(二)

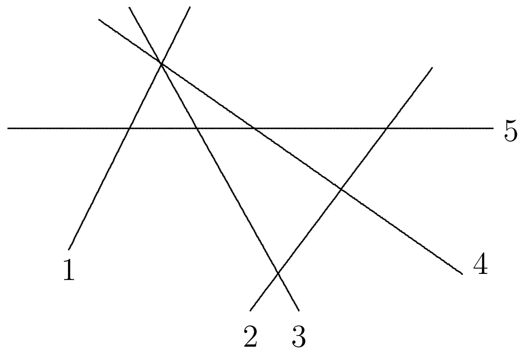
歐拉在研究任意的凸多面體時, 發現凸多面體頂點數、稜數與面數之間, 存在著以下的奇妙關係:

頂點數 $V-$ 稜數 $E+$ 面數 $F=2$。

這便是拓樸學中著名的歐拉定理。其中凸多面體中的頂點數、稜數、面數的關係式: $V-E+F=2$ 被後人稱之爲“歐拉示性數”。

我們知道, 這裡所說的邊可以是彎曲的, 而且都有兩個端點 (這兩個端點就是平面圖的頂點, 所謂邊就是兩個頂點之間的連線), 這樣的圖有而且只有一個無限面。

我們現在來研究另一種平面圖, 它是由一些直線構成的。我們把這種圖叫做直線網。如圖 (三) 就是一個由五條直線構成的平面圖。



(圖三)

定義 1: 在直線網中, 只有一個端點或沒有端點的邊叫做無限邊。邊界含無限邊的面叫做無限面。

由此可見, 直線網中不只一個無限面。如果直線網中有兩條邊所在的直線相交, 那麼該直線網一定是連通的。不連通的只是那些由互相平行的直線構成的直線網。其頂點數一定是 0, 面數比稜數多 1。

定理一: 如果是連通的直線網, 那麼有

$$V-E+F=1$$

其中 V、E、F 分別爲連通的直線網的頂點數, 邊數和面數。

證明: 我們不妨用一個足夠大的圓把直線網中的所有頂點都圈在裡面。結果每條無限邊都必然會與圓有且只有一個交點。因此, 圓上點的個數就是無限邊的條數, 用 E' 表示。而 E' 個點把圓分成 E' 段弧, 這些弧與直線網中的 F' 個無限面一一對應。於是有 $E'=F'$。抹掉直線網中所有的無限邊, 便得到一個拓樸學中的連通平面圖, 其頂點數、邊數、面數分別爲 V、$E-E'$、$F-F'+1$, 由歐拉定理, 得

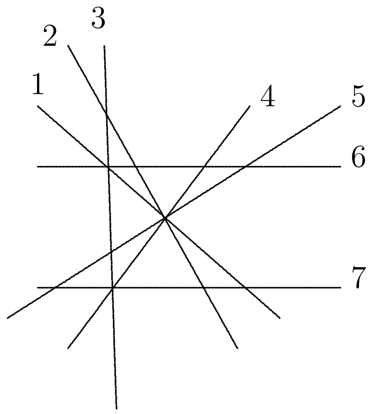
$$V-(E-E')+(F-F'+1)=2,$$

即 $V-E+F=1$。 (證畢)

註: (1) 對於不連通的直線網, 也有 $V-E+F=1$, 這是一個很明顯的事實。

(2) 歐拉定理對於直線網不成立。定理一僅僅是將歐拉定理加以延伸。

如圖四所示, 它是由7條直線構成的連通的直線網。其中 $V=16$, $E=41$, $F=26$, 則有 $V-E+F=16-41+26=1$。



(圖四)

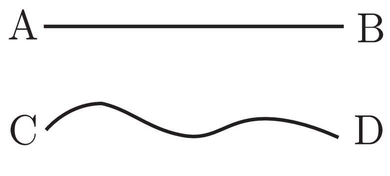
有了定理一, 爲我們求解 “直線分割平面”問題提供了一個數學模型。

例1: 平面上有 n 條直線, 其中任何兩條不平行, 任何三條不過同一點, 證明這 n 條直線把平面分成 $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ 個部分。

證明: 因 n 條直線中任何兩條不平行, 所以知道在 n 條直線中的任何一條都與另外 $n-1$ 條直線相交。故每條直線上都有 n 條邊和 $n-1$ 個頂點, 其中每個頂點都是兩條直線公共的。由此可知, $V=\frac{1}{2}n(n-1)$, $E=n^2$, 由定理一, 得

$$\begin{aligned}F&=E+1-V\\&=n^2+1-\frac{1}{2}n(n-1)\\&=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+1\\&=\frac{1}{2}(n^2+n+2)。\qquad \text{(證畢)}\end{aligned}$$

例2: 平面上有 n 條拋物線, 其中每兩條只相交於兩個點, 並且每三條都不相交於同一點。求證這 n 條拋物線把平面分成 n^2+1 個平面。



(圖五)

證明: 在拓撲學中對於直線與曲線被看成是相同的, 因爲它們中的每一條都代表兩點之間的道路。如圖五中直線 AB 與曲線 CD。這樣一來, 我們可以把拋物線看作是直

線。因爲

$$V=\frac{1}{2}n(2n-2)=n^2-n,$$
$$E=n(2n-1)=2n^2-n。$$

根據定理一, 得

$$\begin{aligned}F&=E-V+1\\&=2n^2-n-(n^2-n)+1\\&=n^2+1. \qquad \text{(證畢)}\end{aligned}$$

例3: $n(n\geq 3)$ 條直線將平面分割成多少塊? 試就下列情況加以解答:

i) n 條直線中恰有 $p(p\geq 2)$ 條互相平行, 此外沒有再相互平行的。而且 n 條直線中沒有三條相交於同一個點;

ii) n 條直線中恰有 $K(K\geq 3)$ 條相交於同一個點, 除這個交點外, 再沒有多於兩條的直線相交於同一點, 而且也沒有兩條直線互相平行。

解: (i) 因爲互相平行的 p 條直線中的每一條都與 $(n-p)$ 條直線相交。另外, $(n-p)$ 條直線中的每一條都與 $(n-1)$ 條直線相交, 所以有:

$$E=p(n-p+1)+(n-p)\cdot n.$$

又因沒有三條直線相交於一點, 所以有:

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{2}[p(n-p)+(n-p)(n-1)]\\&=\frac{1}{2}(n-p)(p+n-1).\end{aligned}$$

根據定理一, 得

$$\begin{aligned}F&=E-V+1\\&=p(n-p+1)+(n-p)\cdot n\\&\quad-\frac{1}{2}(n-p)(p+n-1)+1\\&=p(n-p+1)+(n-p)\\&\quad\cdot[n-\frac{1}{2}(n+p-1)]+1\\&=p(n-p+1)+\frac{1}{2}\\&\quad\cdot(n-p)(n-p+1)+1\\&=\frac{1}{2}(n+p)(n-p+1)+1。\end{aligned}$$

(ii) 除它們的公共點外, 共點的 k 條直線中的每一條直線上都有 $(n-k)$ 個頂點, 另外 $(n-k)$ 條直線中的每一條直線上都有 $(n-1)$ 個頂點。因此,

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{2}[k(n-k)+(n-k)(n-1)]+1\\&=\frac{1}{2}(n-k)(n+k-1)+1,\\E&=k(n-k+2)+(n-k)\cdot n。\end{aligned}$$

根據定理一, 得

$$\begin{aligned}F&=E-V+1\\&=k(n-k+2)+(n-k)n\\&\quad-[\frac{1}{2}(n-k)(n+k-1)+1]+1\\&=k(n-k+2)+\frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)\\&=k(n-k+1)+k\\&\quad+\frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)\\&=\frac{1}{2}(n+k)(n-k+1)+k。\end{aligned}$$

(三)

布安加雷曾將歐拉定理推廣到 n 維空間, 代替頂點、稜和面數的是 $0,1,2,\cdots,n-1$ 維的形象。設這些形象的個數分別用 u_0, $u_1,u_2,\ldots,u_{n-1}$ 表示, 則對於和簡單的多面

體相當的流形有下列關係式, 即布安加雷定理:

$$u_0 - u_1 + u_2 - \cdots + (-1)^{n-1}u_{n-1}$$
$$= 1 - (-1)^n \qquad (n \in N)$$

如果在布安加雷定理中令 $n = 4$, 並把它嫁接到由一些平面構成的平面網中, 可得到一個新的定理。

定義2: 若干個平面把空間分割成 n 個部分, 我們把這 n 部分空間稱爲體。面界如果是含無限面的體, 那麼該體稱之爲無限體。

定理二: n 個不全平行的平面構成一個平面網, 如果其中有 V 個頂點, E 條稜, F 個面, 這些平面把空間分割成 S 個部分, 那麼有關係式:

$$V - E + F - S = -1$$

成立。

證明: 分兩種情況進行討論:

(i) 若 $V = 0$ 時, 則構成平面網的所有平面都經過同一條直線, 或者它們的交線互相平行。這時平面網中的稜都是無限稜, 作一個與這些稜垂直的平面, 則在這個平面上必然會出現一個連通的直線網。其頂點數、邊數、面數分別爲 E、F、S。由定理一知, $E - F + S = 1$ 。於是有:

$$\begin{aligned} V - E + F - S &= V - (E - F + S) \\ &= 0 - 1 = -1。\end{aligned}$$

ii) 若 $V \neq 0$ 時, 那麼我們可以用一個足夠大的球面將所有的頂點都罩在這個球面裡面。結果會在球面上出現一個連通圖, 它可以經過橡皮變形成爲一個簡單多面體。當然, 其頂點數、稜數、面數分別等於平面網中的無限稜條數 E', 無限面個數 F', 無限體個數 S'。根據歐拉定理, 有 $E' - F' + S' = 2$。

我們拿掉所有的無限稜, 便得到一個拓樸學中和簡單多面體相當的流形, 其頂點數、稜數、面數、體數分別爲 V、$E - E'$、$F - F'$、$S - S' + 1$, 由布安加雷定理, 得

$$V - (E - E') + (F - F') - (S - S' + 1) = 0$$

即

$$(V - E + F - S) + (E' - F' + S') - 1 = 0$$

所以, 有

$$V - E + F - S = -1。\qquad (證畢)$$

註: (i) 定理中條件是 n 個不全平行的平面構成一個平面網。而對於由互相平行的平面構成的平面網, 定理也是成立的。因爲這時 $V = E = 0$, $S = F + 1$, 所以 $V - E + F - S = -1$。

(ii) 用平面 α 任意分割平面網 W, 得到一個新平面網 W', 結果平面 α 上有一個直線網。設其面數爲 F, 又設平面網 W、W' 的體數分別爲 S、S', 則 $S' = S + F$。

例4: 空間有任何兩個不平行, 任何三個不共線, 任何四個不共點的 n 個平面。求證這 n 個平面把空間分割成 $\frac{1}{6}(n^3 + 5n + 6)$ 個部分。

證明: 因爲每個平面上都有一個由 $n-1$ 條直線 (其中任何兩條不平行, 任何三條不過

同一點) 構成的直線網, 其頂點數、邊數、面數分別爲:

$$V_0=\frac{1}{2}(n-1)(n-2),\ E_0=(n-1)^2$$
$$F_0=\frac{1}{2}[(n-1)^2+(n-1)+2]$$
$$=\frac{1}{2}(n^2-n+2)。$$

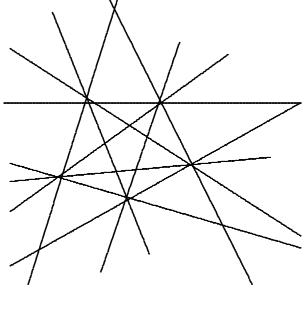
從而有: $V=\frac{1}{3}nV_0=\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$; $E=\frac{1}{2}nE_0=\frac{1}{2}n(n-1)^2$; $F=nF_0=\frac{1}{2}n(n^2-n+2)$。

根據定理二, 有

$$\begin{aligned}S&=V-E+F+1\\&=\frac{1}{6}(n^3-3n^2+2n)\\&\quad-\frac{1}{2}(n^3-2n^2+n)\\&\quad+\frac{1}{2}(n^3-n^2+2n)+1\\&=\frac{1}{6}(n^3+5n+6)。\qquad (證畢)\end{aligned}$$

例5: 正十二面體的各個面延伸後, 所得的十二個平面把空間分割成多少個部分?

解: 根據題設中的條件知, 十二個平面構成一個平面網, 其中每個平面上都有一個由五對平行直線構成的直線網, 其頂點數、邊數、面數分別爲 16、50、36。如圖六。



(圖六)

由於直線網中的 15 個頂點中屬於四條直線的公共點的頂點有 5 個, 它們中的每一個都是五個平面的公共點。而屬於兩條直線的公共點的頂點有 10 個, 它們中的每一個都是三個平面的公共點。因此, 可以知道, $V=\frac{1}{5}(5\times 12)+\frac{1}{3}(10\times 12)=52$。

由於正十二面體的各個面延伸後, 任何三個平面都不共線, 因此有:

$$E=\frac{1}{2}(50\times 12)=300,\ F=36\times 12=432。$$

根據定理二, 有

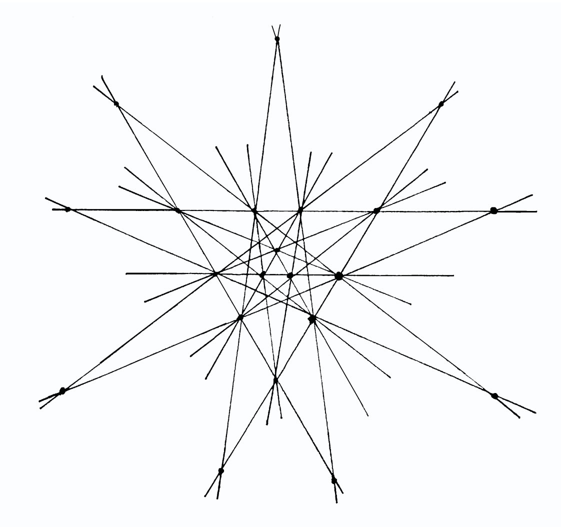
$$\begin{aligned}S&=V-E+F+1\\&=52-300+432+1=185。\end{aligned}$$

答: 可把空間分割成 185 個部分。

註: 在例4中, 令 $n=12$, 則 $S=\frac{1}{6}(n^3+5n+6)=\frac{1}{6}(12^3+5\times 12+6)=299$。這就是說十二個平面最多可把空間分割成 299 個部分。而本題的結果比它小得多, 這是不足爲奇的。

例6: 正二十面體的各個面延伸後, 所得的二十個平面把空間分割成多少個部分?

解: 如圖七所示, 因爲正二十面體的各個面延伸後所得的二十個平面上都有這樣一張直線網。



圖七

所以, 有

$$V=\frac{1}{6}(6\times 20)+\frac{1}{5}(6\times 20)+\frac{1}{4}(6\times 20)+\frac{1}{3}(30\times 20)=274。$$

$$E=\frac{1}{2}(150\times 20)=1500,$$

$$F=103\times 20=2060。$$

根據定理二, 得

$$S=V-E+F+1=274-1500+2060+1=835。$$

答: 所得二十個平面把空間分割成 835 個部分。

註: 若令 $n=20$, 由例 4 中條件可知二十個平面最多可把空間分割成1351個部分。

值得注意的是在例5, 例6中, 用所得的結果除以它們相應的最大可能值, 其商都非常接近黃金分割數 0.618, 如例6中: $835\div 1351\approx 0.6180606\cdots$ 例5中: $185\div 299\approx 0.618729$。

由"歐拉示性數"可以證明正多面體只有五種: 正四面體、正六面體、正八面體、正十二面體、正二十面體。我猜想這五種正多面體都有這一性質。

參考資料

1. D. 希爾伯特和康福森合著, 直觀幾何, 北京高教出版社, 王聯芳譯, 84年。
2. 儲嘉康, 歐拉, 四川出版社, 84年, p.58-59 。
3. 全日制十年制高中 「數學」 課本第三冊, p144, 北京, 教育出版社。

—本文作者任教於中國湖南省湘潭教育學院數學系—