

# 建構主義與數學教育

鄭毓信

摘要：本文首先從一般角度指明了建構主義新近發展的主要特點及其教學涵義：它正經歷著由一元論、極端主義向多元論、“整合論”的發展，並從根本上構成了對傳統教學思想的嚴重挑戰；其次，筆者又針對數學教育的特殊性作出了進一步的論述：建構主義不僅為數學的本體論問題提供了合理的解答，而且也促成了數學觀的革命性變革，文中並從這樣的角度對“解釋”與“理解”、形式化與非形式化、“問題解決”與數學地思維等問題作出了辯證的分析。

關鍵詞：建構主義，數學教育

建構主義在數學教育領域中的興起已經有十幾個年頭了。儘管這既非一個有著明確目標的數學教育改革運動，也不能被看成一個系統的數學教育理論，但卻在這一領域中產生了十分重要的影響，特別是，在很多人看來，建構主義更可被看成數學教育界在九十年代的主要口號，另外，建構主義的影響也已超出數學教育而擴展到了一般的教育領域。為了清楚地指明建構主義對於數學教育的重要意義，以下我們將首先從一般的角度對建構主義的新近發展及其教學涵義作出論述；然後，在第二部分中，我們又將針對數學教育的特殊性對此作出進一步的分析。

## 一. 建構主義的新近發展及其

## 教學涵義

### 1) 極端的立場或必要的“互補”？

就建構主義在數學教育領域中的興起而言，無疑應當首先提及“極端建構主義”(radical constructivism)的觀點，因為，儘管建構主義的基本論點在哲學中有著較長的歷史，特別是，瑞士著名兒童心理學家、哲學家皮亞杰更已明確地提出了建構主義的認識論；但是，卻又是所說的極端建構主義在此首先發揮了開路先鋒的作用，並在一段時期內造成了“只有極端建構主義才是好的建構主義的影響”(J. Kilpatrick, 1987)。

具體地說，除去對認識活動建構性質的直接肯定以外，極端建構主義的一個主要特

徵就是在相關的哲學問題上採取了一種極端的立場，也即是對傳統的本體論問題和認識論問題上採取了徹底否定的立場。例如，這就正如極端建構主義的最主要代表人物 E. von Glasersfeld (1990) 所指出的：“建構主義的立場，如果認真對待的話，即是與知識、真理和客觀性等傳統概念直接相衝突的，它們要求從根本上去重建個人關於實在的觀念。”這也就是說，第一，我們完全不應去涉及客觀世界的存在性這樣一個“形而上學”的問題，而只應局限於經驗知識範圍。第二，認知是一個組織個人經驗世界的適應過程，這也就是說，我們應當用“適應”(fit) 的概念去取代傳統的“匹配”(match) 概念，也即採取一種直接的工具主義立場。

正因為極端建構主義對傳統的哲學問題採取了徹底否定的立場，從一開始起就有不少學者從這樣的角度對極端建構主義提出了尖銳的批評。例如，著名數學教育家 J. Kilpatrick(1987) 就曾這樣寫道：“極端建構主義是很極端，因為它拒絕大多數經驗主義者所支持的形而上學的現實主義，它要求它的擁護者放棄知道真實世界的努力。”另外，G. Goldin(1990) 則曾更為明確地提出，與極端建構主義的立場相對立，我們應當採取“溫和的建構主義”(mediated constructivism)，而後者則就以“經驗主義的知識論”作為直接的基礎。(在有關的論著中，我們還可看到“素樸建構主義”、“經驗導向建構主義”和“簡單建構主義”等提法，它們所採取的也都是這樣一種“經驗主義”[或者更為恰當地說，即是“實在論”]的立場。)

然而，如果說以上的論爭主要是從哲學的角度、特別是圍繞本體論問題展開的；那麼，從九十年代開始，教育領域中由極端建構主義所引出的爭論則可說是轉移到了一個新的焦點之上。這就是指：知識是否應當被看成純粹的個人建構，或是社會的共同建構？

正是在這樣的意義上，在當前我們即可看到所謂的“個人建構主義”(personal constructivism) 與“社會建構主義”(social-constructivism) 的直接對立。具體地說，個人建構主義事實上也可被看成建構主義的一種極端形式，因為，其主要特徵即是對認識活動“個體性質”的突出強調，並認為應當把這看成一種高度自主的活動，從而，“一百個學生就是一百個主體，並會有一百個不同的建構”。與此相對立，社會建構主義則認為個人的認知活動(包括智力的發展) 必然地是在一定的社會-文化環境中實現的，而且，所說的社會-文化環境對於個人的認知活動並有著重要的規範作用，從而，我們在此也就可以超越各個特殊個體而談及知識的客觀性(或者說，普遍性)。

與極端建構主義對於傳統哲學問題的否定一樣，個人建構主義和社會建構主義也並非全新的觀點。例如，就後者而言，我們即應特別提及前蘇聯的心理學家 L. Vygotsky 的論著(1978)；而這事實上也就是建構主義新近發展的一個重要特點，即是對 Vygotsky 的有關論點人們給予了普遍的重視和高度的評價。例如，這就正如英國學者 P. Ernest (1994b) 所指出的；“社會建構主義的一個共同出發點就是 Vygotsky 的理論。”

一般地說，這事實上也就是大部分數學教育工作者現今所採取的一個普遍立場，即是認為應當明確肯定認識活動“個體性質”與“社會性質”的互補性。例如，這就正如 H. Bauersfeld (1992) 所指出的，一個適當的基本立場應是“極端建構主義的原則……及對於社會維度在個人建構活動中的作用和教室中社會作用過程的一種整合的和互補的說明。”顯然，這即應被看成對於建構主義基本立場的重要發展或改進。

另外，從理論的角度看，筆者認為，我們在此又應清楚地指明以下幾點：

第一，相對於個人建構主義而言，社會建構主義顯然是更為合理的，因為，如果我們絕對地去肯定認識活動的主觀性，那麼，就如數學哲學中對於直覺主義的批判所早已清楚地表明了（鄭毓信，1986），最終就必然走向“數學唯我主義”或“數學神秘主義”，而這當然是與數學的科學性直接相違背的。

但是，應當強調的是，筆者認為，除去“普遍性”這一涵義以外，我們還應在一種更為基本的意義上去肯定知識的客觀性，也即應當明確肯定認識的客觀基礎。更為一般地說，這也就是指，認識應當被看成建構和反映的一種辯證統一：儘管就其直接形式而言，認識是主體的主動建構，或者說，即是一個意義賦予（sense making）的過程，但是，歸根結蒂地說，這種活動的目的則又在於如何正確地去反映客觀世界，也即如何使得所建構起的意義能夠正確地反映事物的本質。

顯然，在所說的意義上，我們也就可以更為清楚地看出建構主義的積極意義：這正是

對於機械反映論的直接反對，也即清楚地表明了認識活動的能動性質。

第二，即如上面所已指出的，除去建構和反映的統一以外，認識活動事實上也是“個體性”與“社會性”的一種辯證統一。這就是說，在充分肯定認識活動個體性質的同時，我們又應清楚地看到認識並非一種純粹的個人行為，而必定是在一定的社會環境之中進行的，從而，我們也就應當明確地肯定認識活動的社會性質。

值得指出的是，在一些學者（例如，S.Lerman, 1994）看來，對於認識活動“個體性質”與“社會性質”的這種整合必然地包含有內在的矛盾，因為，任何社會性的外部作用，即如個體間的相互交流、批評等，最終都必需通過所謂的“內化”才可能對各個主體的認識活動產生實際的影響，而後者事實上就是一個“個體化”的過程，從而也就是對於所說的認識活動的社會性質（或者說，知識的普遍性質）的直接否定。

然而，筆者認為，我們在此不應把所說的普遍性看成是一種絕對的同一性，勿寧說，這正是個體性與普遍性的一種辯證統一：儘管各個個體的認識活動都有其一定的特殊性，但是，從整體上說，在各個個體之間又必然地表現出一定的共同性，特別是，後者即就是社會規範性作用的一個直接後果，並是與一定的動態過程直接相聯繫的。從而，總的來說，我們在此所看到的就是一種動態的平衡，而非絕對的對立。

第三，在充分肯定社會建構主義積極意義的同時，我們也應清楚地看到其在理論上

的局限性或不足之處。具體地說，除去上述關於建構與反映活動辯證關係的分析以外，我們在此並應特別提及“社會建構主義”的一種極端形式，也即對於“權威和權力”在認識活動中作用的片面強調。例如，正是在這樣的意義上，一些學者（例如，M. Foucault, 1980）提出，與個人建構活動的自主性相對立，我們應當明確肯定社會機制的“收斂運作”，而又因為後者主要地是依靠權威和權力這樣一些非理性因素實現的，因此，這也就清楚地表明了認識活動的非理性性質。

然而，筆者認為，以上關於認識活動與客觀世界關係的分析事實上也已清楚地指明了非理性主義的錯誤性。具體地說，儘管我們可以、而且應當承認人們的認識活動必然地要受到其所處的社會-文化環境的影響，但是，又只是獨立存在的物質世界才構成了人們認識活動的最終淵源和依據，而且，認識的最終目的又在於對真理的認識，從而，儘管在認識的過程中有許多對中心目的偏離，我們並可在一定程度上看到權力或權威等非理性因素在此發揮了重要的作用，但是，所有這些偏離又不可能走得太遠，並遲早都會被拉回到真理的道路上。從而，從總體上說，我們即就應當明確地肯定認識、特別是科學活動的合理性。（對此並可參見曹天予，1994）

## 2) 對於傳統教學思想的嚴重挑戰

就建構主義在數學教育、乃至一般教育領域中的影響而言，人們無疑特別關心它的教學涵義；然而，就一些初期的論文來看，有不少教育工作者在這一問題上似乎採取了一

種頗為“消極”的態度。這即是指，儘管他們也承認建構主義有著直接的教學涵義，但同時則又認為這些結論並非建構主義所特有，從而事實上就只是一些“老生常談”。

例如，von Glasersfeld 曾依據自己的極端建構主義立場指明了其在教學上的五個重要結論：（1）對於教學與訓練的明確區分；（2）相對於外部的行為我們應當更加重視學習者內在的思維過程；（3）語言溝通並不能將知識直接傳遞給學生，而應是指導學生學習的過程；（4）學生的錯誤應成爲了解學生思維的重要線索；（5）應當充分肯定“教學面談”（teaching interview）在教學中的重要作用。然而，也正是通過對這五個結論的具體分析，Kilpatrick(1987) 指出，“這五個結論……顯然也符合其它哲學的立場。”從而，“這種教學觀（就）並非建構主義者的專利。”

就教學上的具體建議而言，筆者認為，Kilpatrick 的上述結論確實有一定的道理；但是，我們同時則又必須清楚地看到這樣兩點：

第一，純粹的經驗之談並不能等同於理論指導下的自覺實踐。

事實上，這本身也就是一個人所皆知的真理，即感覺到了的東西我們不一定能正確地認識它，而只有認識了的東西我們才能更爲深刻地去感覺它。一般地說，這顯然也就清楚地指明了自覺的理論學習對於改善教學的特殊重要性，特別是，只有上升到了應有的理論高度，相應的教學實踐才可能成爲一種真正的自覺行動。

第二,相對於教學上的具體建議而言,建構主義更體現了一種基本的理論立場或教學思想。

具體地說,這首先就是指對於教學理論的自覺反思和徹底批判。這就如 N. Nodding(1990)所指出的,“建構主義的特殊力量就在於使我們對教學過程作出批判性和具有想像力的思考。相信建構主義的前提,這就使得我們不再單純地去尋找解答,而是擁有了可以借以對教學方法的可能選擇作出判斷的有力準則。”

其次,也正是通過所說的自覺反思和徹底批判,我們即可清楚地看到:建構主義並非簡單的“老生常談”,而是構成了對於傳統教學思想(更為一般地說,即是傳統教法設計理論)的嚴重挑戰。

以下我們就集中地對建構主義的這種“革命性”涵義作出進一步的分析。

首先,作為對於傳統教法設計理論基礎的自覺反思,人們現已普遍地認識到,傳統的教法設計理論主要地即是以行為主義心理學、尤其是斯金納的學習理論為基礎發展起來的,特別是,以下即就是其最為基本的指導思想:教學工作就是要通過提供適當的強化以控制相應的學習過程、從而獲得所希望的教學結果(更為準確地說,即是提高獲得所期望的教學結果的概率[可能性])。

從而,如果結合行為主義的主要特徵進行分析,我們就可看出,傳統的教法設計理論事實上包括了這樣一些基本的理論前提:

(1) 關於知識的客觀主義(objectivism)觀點;(2) 關於知識的還原主義(re-

ductionism);(3) 關於教學活動的決定論觀點(determinism);(4) 教法的控制性質。

對於傳統教法設計理論的上述基礎人們早就從各種不同的角度提出了批評。例如,從知覺的整體性出發,格式塔心理學家們就對關於知識的還原主義立場提出了尖銳的批評;另外,由於關於教學活動的決定論觀點完全抹殺了學生的個體差異(或者說,這種差異只是被局限於各個學生在準備知識掌握程度上的不同),因此這一觀點也遭到了普遍的批評。但是,從整體上說,這種早期的批評主要地又只是一種修正性的工作,即是力圖對傳統的教法設計理論作出必要的修正或改進;與此相反,現今所出現的則是對於傳統教法設計理論基礎的徹底否定,而這主要就來自建構主義的挑戰。

當然,建構主義並非一個孤立的發展,而是與其它方面的研究直接相呼應的,特別是,我們在此即應清楚地看到心理學的研究由行為主義轉向認知心理學所造成的重要影響。

事實上,即使就一些具體問題而言,我們就可清楚地看到在認知心理學與傳統的教法設計理論之間所存在的重要差別或不相容性。例如,與所說的還原論傾向相對立,認知心理學的一個重要特徵就是對於認知結構整體性質的突出強調,而這顯然也就是對於知識整體性的直接肯定;另外,近年來關於“情境認知”(situated cognition)的研究則又清楚地表明了知識的環境相關性或知識的社會-文化性質,從而也就對上述關於知識的“客觀主義”觀點提出了嚴重的挑戰。

然而,相對於這種局部的批判而言,建構主義則可說是構成了對於傳統教法設計理

論基礎更爲全面和徹底的否定。也正因爲此，在一些學者（例如，P. Cooper, 1993）看來，我們就可把“行爲主義”、“認知心理學”（或者說，“認知主義”）和“建構主義”看成三個不同的相繼階段。

具體地說，儘管“建構主義”並不能被看成一個高度統一的理論，而是包括有多種不同的觀點，但是，所有這些不同的觀點又有著明顯的共同點，即都明確肯定了學習是學習者以已有的知識和經驗爲基礎的主動的建構活動。顯然，這種關於學習活動主動建構性的斷言即是與傳統教法設計理論的控制性質直接相對立的；另外，由於學習者的個體差異（這不僅是指已有的知識，而且還包括了認知風格、學習態度、信心、觀念、學習動機等多種成分）在建構主義的立場中得到了直接的反映，所說的主動建構性、特別是新的學習活動與學習者已有知識和經驗的直接相關性則又清楚地表明了學習活動的動態性質，因此，這也就構成了對傳統教法設計理論的決定論觀點的直接否定；最後，認識活動的建構性質顯然也就表明了知識不應被看成純客觀的、中性的，勿寧說，其中也必然地“滲雜”有一定的“人性”的成分。

從而，總的來說，建構主義就構成了對於傳統教法設計理論基礎的直接否定。也正因爲此，在不少學者（例如，J. Lowyck & J. Elen, 1993）看來，我們現今所面臨的就是“教法設計中的範式轉變”或“教法設計理論基礎的根本性變革”，或者說，今天的迫切需要即是“對於教法設計的重新認識”（reconceptualization）。

顯然，與前述的“消極”態度相比，後一認識是更爲正確的；然而，應當強調的是，筆者認爲，我們在此也應防止由一個極端走向另一個極端，也即應當反對由於採取了極端的立場而認定教法設計理論（注意：這不僅僅是指傳統教法設計理論）乃至全部的教學工作都根本不具有任何的積極意義。

具體地說，正如前面所已指出的，這正是極端建構主義的一個重要特徵，即是在絕對的意義上肯定了認識活動個體特殊性：每個人都是以自己的特殊方式（idiosyncratic ways）去認識世界的。特殊地，由於學習活動作爲主體在特定環境之中所進行的意義賦予無疑具有個體的特殊性，並是因時、因地而異的，因此，在持有這種觀點的人看來，學習活動的進程和結果就完全不可預期，也即沒有任何嚴格意義上的規律性可言；進而，又由於學習活動被看成純粹的個人行爲，因此，任何規範性的教學活動就不僅不可能達到預期的目的，而且也沒有任何積極的作用，恰恰相反，這種外部干涉只可能起到消極的干擾作用。從而，在這樣的意義上，極端建構主義即就意味著“教法設計的死亡”！

當然，上述的極端立場是不可能爲人們所普遍接受的；但是，筆者以爲，我們在此又不能停留於“不現實”、“過激”等素樸的批評，而應從理論的高度去作出深入的分析。事實上，由前面的論述我們已經知道，極端建構主義不僅不應被看成建構主義的唯一可能形式，而且，這種極端形式在理論上並有著嚴重的局限性或錯誤性。特殊地，就目前的論題而言，我們則應特別強調在認識活動的個體性

與社會性、以及個體的特殊性與普遍性之間的所存在的辯證關係。

具體地說，儘管每個人的學習活動都有其各自的特殊性，但是，從總體上說，各個個體之間又必然有著一定的共同性，而後者則就構成了教學規律的根本依據，這也就是說，學習活動不應被看成完全不可預期和沒有規律的。(當然，所說的教學規律又並非機械的法則，即如我們只需嚴格按照事先指定的步驟去進行教學就可獲得預期的結果；與此相反，我們在此必須充分注意個體的特殊性。顯然，後者事實上也就清楚地表明了教學活動的創造性、能動性。)另外，認識活動的社會性質顯然也就清楚地表明了教學作為一種規範性活動的合理性，特別是，這更不應被看成是與認識活動的主動建構性直接相矛盾的，勿寧說，前者正是後者能得以不斷深化和發展的一個必要條件。(類似地，作為問題的另一方面，我們又應強調指出，這裡所說的規範化又並非是指通過外部的控制去達到絕對的統一性，恰恰相反，教學活動的規範性就是要有效地去促進學生對於知識的建構，特別是，我們即應清楚地去揭示相應的思維活動的合理性，從而使學生的學習成為一種自覺的理性行為，即是建立在清醒的自我意識、自覺的反思和理性的選擇之上。)

綜上可見，我們現今所面臨的就並非“教法設計的死亡”，而應是“教法設計的重建”；另外，實現後一目標的關鍵則又在於我們必須正確地去認識和處理在建構與反映、認識活動的個體性與社會性、知識的客觀性與主觀性、個體的特殊性與普遍性、教學活動

的規範性和學生的自主性等諸多因素之間所存在的辯證關係。

## 二. 建構主義與數學教育

以上我們從一般角度指明了建構主義的教育涵義；一個容易想到的問題是：什麼又是建構主義對於數學教育的特殊意義？或者說，是否存在有這樣的特殊意義？

事實上，就建構主義在教育領域中的興起而言，應當說與數學教育的特殊性有著密切的聯繫。例如，von Glasersfeld 主要地就是依據數學教學的實踐發展起了自己的極端建構主義。另外，更為一般地說，這又正如 Kilpatrick(1987)所指出的，“建構主義……似乎對數學教育家的思考與活動有特別強烈的衝擊。這些衝擊大多數無疑地是由於我們對於數學和數學學習的觀點所造成的。”然而，就發展的主流而言，建構主義與數學教育的這種特殊聯繫卻似乎越來越淡化了。例如，就數學教育家現今所撰寫的關於建構主義的大多數論著而言，在其中都很少能夠看到關於數學教育特殊性的任何論述。

當然，這種由特殊到一般的發展應當說是有其很大合理性的，因為，作為一種認識論，建構主義顯然具有超出數學教育這一特殊範圍的普遍意義，另外，又正如以上的分析所已表明的，我們也只有從這種更為廣泛的角度去進行分析，才能達到更大的理論高度。但是，從數學教育的角度看，這又的確是一個十分自然的願望，即是希望建構主義與數學教育之間的聯繫能變得更為密切一些。

以下就是後一方向上的一個初步探討。

## 1) 從數學的本體論問題談起

儘管對於本體論問題的徹底排斥正是極端建構主義的一個主要特徵，但是，筆者認為，為了清楚地認識建構主義對於數學教育的特殊意義，我們又必須從數學的本體論問題談起。

事實上，這也正是數學相對於一般自然科學的一個重要差異，即與一般自然學科的研究對象不同，數學對象並不能被看成現實世界中的真實存在。例如，誰曾見到過一，我們只能見到某一個人、某一棵樹、某一間房，而決不會見到作為數學研究對象的真正的“一”（注意，在此不應把“一”的概念與其符號相混淆）。從而，即使就最簡單的數學對象而言，也都是抽象思維的產物。但是，在數學中我們所從事的顯然又是一種客觀的研究，例如，我們既不能隨意地把 7 說成是 4 與 5 的和，也不能毫無根據地去斷言哥德巴赫猜想的真假。從而，我們在此似乎就陷入了一種兩難的處境，而這事實上也就是多年來一直困擾著數學哲學家的一個難題：我們究竟應當如何去看數學對象的實在性問題？

筆者認為，建構主義事實上即已為數學的本體論問題提供了一個合理的解答：數學抽象就其本質而言是一種建構的活動：數學對象正是通過這樣的活動得到了建構。

具體地說，作為數學建構活動的具體分析，我們在此首先即應明確肯定這種活動的形式特性：數學對象是借助於明確的定義得到建構的，而且，在嚴格的數學研究中，無論所涉及的對象是否具有明顯的直觀意義，我們又只能依據相應的定義和明確給出的規則

去進行推理，而不能求助於直觀。從而，即使某個數學概念在最初只是某一個人的“發明創造”，但是，一旦這一對象得到了“建構”，它就立即獲得了確定的“客觀內容”，對此即使其“發明者”也只能客觀地加以研究，而不能再任意地加以改變。從而，數學抽象活動的形式特性就實際地保證了數學對象由主觀的“心智建構”(mental construction) 向相對獨立的“心智對象”(mental entity) 的轉化。

其次，就如以上關於認識活動社會性質的分析，我們在此也應清楚地看到數學建構活動的社會性質，特別是，個人的創造必須取決於相應的社會共同體（“數學共同體”）的“判決”：只有為數學共同體所一致接受的數學概念（以及方法、問題等）才能真正成為數學的組成成分。從而，數學對象也就不能被看成純粹的個人建構，而是數學共同體的共同建構，或者說，正是由個體向群體的轉移直接促成了數學對象由所說的“心智對象”向“客觀對象”(objective entity) 的進一步轉化。（關於數學建構活動的社會性可參見 Ernest, 1991; 鄭毓信, 1995a）

以上關於數學抽象活動建構性質的分析顯然有著重要的教學涵義，特別是，這就更為清楚地表明了數學學習活動的建構性質：由於數學概念除相應的符號外並不具有直接的物質表現，因此，數學對象的認識首先就是一個建構的過程，這也就是說，如果我們不能在思想中實際地去建構出相應的對象，也即使“外化”了的對象重新轉化為思維的內在成分，則就不可能獲得真正的數學知識。



## 2) 數學觀的根本性變革

以上關於數學建構活動社會性質的分析事實上也為我們深入理解數學的本質提供了一個新的視角，即數學不應被等同於事實性結論的匯集，而應主要地被看成人類的一種創造性活動。

具體地說，這也就是所謂的“數學活動論”(Kitcher, 1984; 鄭毓信, 1991) 的主要內容。首先，如果我們不再唯一地著眼於數學活動的最終產物，而更加注重於對過程本身的深入分析，那麼，一個直接的結論就是：由於數學活動包括有問題、方法、語言等多個環節，因此，數學就不應被等同事實性結論的匯集，而應被看成一個由“問題”、“方法”、“語言”、“命題 (事實性結論)” 等多種成分所組成的一個複合體。

其次，更為重要的是，我們在此又應清楚地看到以下的事實：在現代社會中，數學家們總是作為相應的社會共同體的一員來從事自己的研究活動的，也即必然地處在一定的社會規範之下，又由於這往往是一種不自覺的行為，因此在很大程度上就可被歸結為傳統的力量，這也就是說，每個數學家無論其自覺與否總處在一定的數學傳統之中，也即是按照一定的數學傳統來從事自己的研究活動的。

從而，如果把前述的“問題”、“方法”、“語言”、“命題”等統稱為“數學的知識成分”，那麼，以上關於數學傳統的分析則就從一個更為廣泛的角度指明了數學 (活動) 的“內涵”，這就是說，“數學傳統”作為“數學

的觀念成分”也應被看成數學的一個重要組成成分。

容易看出，上述關於數學活動社會性質的分析與現代“科學-技術-社會”(STS) 的研究取向是十分一致的；另外，就數學本身而言，這則又直接涉及到了數學觀的根本性變化，而這事實上也就是數學哲學現代發展的最主要特點 (鄭毓信, 1995b)，即動態的、易謬的 (或者說，經驗和擬經驗的) 數學觀現已逐漸取代傳統的靜態的、絕對主義的數學觀在數學中占據了主導的地位。

顯然，數學觀的上述變化也有著重要的教育涵義，特別是，從動態的角度看，“數學的觀念成分”顯然比“數學的知識成分”更為重要，從而，我們也就應當將傳統的繼承看成數學教育的一個基本目標，這也就是說，與具體知識內容的學習相比，我們應當更加重視如何去幫助學生學會數學地思維。

## 3) 建構主義與數學教學

以上的論述可以說主要屬於數學哲學的範圍，但這顯然又不能被認為是與實際的數學教學活動完全無關的，恰恰相反，就如數學家總處在一定的數學傳統之中，數學教師無論其自覺與否也總是在一定觀念指導下從事自己的教學活動的。特殊地，由以上的論述我們也就可以清楚地看出，以下幾個問題即可被認為對於數學教學有著特別重要的意義，或者說，這即可被看成建構主義對於數學教學特殊意義之所在：

### (1) 意義賦予與文化繼承

以上已經指明了建構活動對於數學學習的特殊重要性，這就是指，如果我們不能首先在思想中實際地去建構出相應的對象，則就不可能獲得任何真正的數學知識。然而，應當強調的是，所說的建構活動又不能簡單地被理解為如何在頭腦中機械地去重複有關對象的形式定義，勿寧說，這主要是一個意義賦予的過程，也即如何把新的概念與主體已有的知識和經驗聯繫起來，從而使之成為可以理解的和有意義的。

從而，就抽象的數學概念而言，所說的“意義賦予”事實上就包含有“具體化”(visualization)的涵義，即是如何使抽象的數學概念與主體已有的經驗或知識聯繫起來，從而成為“十分直觀明了”的東西。(當然，對於這裡所說的“具體”和“抽象”我們必須作相對的理解。這就正如著名數學家 R. Courant 所指出的：“一個人必須牢記，‘具體’、‘抽象’、‘個別’和‘一般’這些術語在數學中沒有穩定的和絕對的含義。它們主要涉及一個思想框架，一個知識狀態以及數學本體的特徵。例如已被列為熟悉的事物很容易被看作具體的。”載「數學家談數學本質」，北京大學出版社，1989年，第121頁。)另外，除去由“抽象”向“具體”的過渡以外，這常常又包含有由現象到本質、由局部到整體的過渡，也即是從整體上建立起了關於對象本質的深入認識。

顯然，相對於數學概念的外在表現形式—符號—而言，所說的“意義賦予”也可說是一個“解釋”(interpretation)的過程，從而，解釋的問題對數學的學習和教學活動

來說就可被認為具有特別的重要性，特別是，從建構主義的角度看，我們在此即就應明確肯定解釋活動的個體特殊性。這也就如 Ernest(1994b)所指出的：“建構主義的中心論題之一即是個體的解釋。”“沒有任何一種意義能如此地得以傳遞，以保證解釋的唯一性。”

當然，就數學學習活動而言，又存在有一個如何依據數學概念的“社會意義”去對各個個體經由相對獨立的建構活動所獲得的“個體意義”進行調整的過程。從而，相對於意義賦予而言，數學學習同時也是一個“文化繼承”的過程。這也就是說，數學學習不僅是一種“解釋”的活動，而且也是一個對數學對象的社會意義進行“理解”的過程。這也就如 van Oers 所指出的，數學學習即是對由文化歷史所傳遞給我們的數學作出意義賦予的過程。

綜上可見，數學知識的建構即是“個人意義”和“社會意義”的一種整合。這也就是說，儘管數學學習在一定意義上即是一個規範化的過程，也即是要通過適當的途徑將“個人意義”統一到相應的“社會意義”，但是，這又並非是一種絕對的統一，勿寧說，不同的個體在此仍然具有一定的自由度，即如同一個數學概念在不同的個體那裡完全可能具有不同的心理表徵；另外，所說的整合又是一個動態的過程，即必然地包括有一個發展、調整、變化甚至是反復的過程，特別是，我們在此更應清楚地看到所已得到建立的認識（包括錯誤觀念）的頑固性。

顯然，上述的分析事實上也就清楚地表明這樣一點：與單純的“解釋”相比，以下的

問題對於數學的學習和教學來說是更為重要的，即我們必須特別注意如何去處理好上述的“解釋”與“理解”、也即“意義賦予”與“文化繼承”的關係。

### (2) 形式化與非形式化

依據以上的論述，我們也就可以對數學教學中的形式化與非形式化的關係問題作出如下的進一步分析：

首先，我們應當明確地肯定數學的形式特性。這也就是指，數學並非對於真實事物或現象的直接研究，而是以抽象思維的產物作為直接的研究對象。也正是這樣的意義上，我們即可以明確地提出如下的“模式建構形式化原則”(鄭毓信，1990)：在數學的研究中，應當借助於明確的定義去構造出相應的量化模式，並以此為直接對象從事純形式的研究。

其次，我們又應強調指出，無論就數學教學或數學研究而言，過分地強調形式化的作法都是不足取的，因為，就如前面所已指出的，數學的認識作為一種建構活動即是一個意義賦予的過程，特別是，其中必然地包含有由“抽象”向“具體”的過渡。

也正是在這樣的意義上，筆者以為，“淡化形式，注重實質”這一主張(陳重穆，1993)就有著十分重要的意義。這也就是說，我們應當反對對形式上完美性的片面追求，即如什麼都要來個定義，分類則又務需作到不重不漏等；與此相反，我們應當“淡化形式”，也即應當允許非形式化，特別是，我們應當“淡化概念”，也即“不要把形式化的概念放在最前”，不要把概念看成是“百分之百的不可變動、神聖不可侵犯”，“不要單純在概念本身上下功夫”，而應把重點放在對實質的領悟上。

第三，與單純地強調“淡化形式”相比，我們更應清楚地看到在形式與非形式之間所存在的辯證關係。

具體地說，這首先就是指形式與非形式的相對性。例如，正如上面所已提及的，即使就  $1+2=2+1$  這樣的簡單等式來說，事實上就已充分體現了數學的形式特性；然而，與前者相比， $a+b=b+a$  顯然又達到了更高的抽象層次，從而，在這一層次上， $1+2=2+1$  也就可以被看成“十分直觀明瞭的”。

再者，數學的無限發展事實上即可被看成是在形式化與非形式化的辯證運動中得以實現的(鄭毓信，1995b)，特別是，這又不應被看成一個單向的運動，而是在不斷上升到更高抽象程度的同時也包括了由“形式”向“非形式”的過渡或轉變。由於數學的學習活動在一定意義上即可被看成數學歷史發展過程的一個“縮影”，因此，這也就十分清楚地表明了：數學思維的發展就只有通過對於“形式”與“非形式”的不斷調和和整合才能真正得以實現。

綜上可見，在數學教學中我們也就不應片面地去強調其中的任何一個方面，而應根據學生的認知水平認真地去處理好形式化與非形式化的辯證關係，特別是，我們既應善於為抽象的數學概念建構起具體的“心理意義”，同時則又應當善於從抽象的高度去把握具體的對象。

### (3) “問題解決”與數學地思維

最後，我們再來對“問題解決”(problem solving)這一口號作一具體分析。由於這正是數學教育界在八十年代的主要口號，即是認為應當以“問題解決”作為學校數學教

育的中心，因此，這一討論就有著重要的現實意義。

首先，筆者認為，“問題解決”這一數學教育改革運動確實有其一定的合理性。具體地說，除去時代的要求和數學觀的變革這樣一些更為廣泛的考慮（鄭毓信，1993），建構主義也可說是為此提供了直接的論據，因為，如果我們堅持學習是主體主動的建構這樣一個基本的立場，那麼，一個必然的結論就是：最好的學習方法就是動手去作。就數學學習而言，這也就是指，“學數學就是作數學（“knowing” mathematics is “doing” mathematics）”，也即我們應當讓學生通過“問題解決”來學習數學。因為，這不僅使學生真正處於主動的地位，並可通過積極的探索去建立自己的理解和意義，而且，由於這事實上就是把學生擺到了與數學家同樣的位置之上，因此，除去具體數學知識和技能的學習以外，這就更為有利於數學觀念（或者說，數學傳統）的養成，再者，“問題解決”顯然也有助於同學間的合作和相互促進，而由認識活動的社會性我們已經知道，這也正是成功的學習活動的一個必要條件。

一般地說，這事實上也就是所謂的“活動導向教學”（an activity approach）何以在現代獲得普遍重視的重要原因。然而，從教學的角度看，在此顯然又存在這樣的問題，即是應當如何去處理好“問題解決”與基本知識和技能的學習這兩者之間的關係？另外，數學教育界更經由對這些年來“問題解決”的教學實踐進行反思而得出了這樣的共識：“數學教育應當‘過程’與‘結果’並重”（黃毅英，1993）。

顯然，這事實上就表明“問題解決”這一口號也具有一定的局限性或不足之處。

為了清楚地說明問題，我們在此即可考慮這樣一個問題：數學活動是否就“等同於”“問題解決”？

顯然，作為一種直接的回答，我們即應指出，除“問題解決”以外，“問題提出”（problem posing）也應被看成數學活動的一個重要組成成分；另外，從更為深入的角度看，這一問題則又直接涉及到了這樣的一個基本事實，即數學家們總是不滿足於某些具體結果或結論的得出，並總是希望能獲得更為深入的理解，而這不僅直接導致了對於嚴格的邏輯證明的尋求，而且也促使數學家積極地去從事進一步的研究，即如在這些看上去並無聯繫的事實背後是否隱藏著某種普遍的理論？這些事實能否被納入某個統一的數學結構？等等；他們也總是希望能達到更大的簡單性和精緻性，即如是否存在更為簡單的證明？能否對相應的表述方式（包括符號等）作出適當的改進？等等。

容易看出，數學家的上述行為正是“數學傳統”的一種直接表現。這也就是說，數學家們之所以不滿足於已有的工作，並總是希望通過新的研究去發展和深化認識，即如達到新的更大的普遍性、更大的嚴格性、新的更高層次上的和諧性等，主要就是由於傳統的力量。從而，上述的事實上也就是與前述關於數學本質的新的認識完全一致的，即數學不應被等同於各種具體的知識和技能，而主要地應被看成人類的一種創造性活動，一種在特定傳統指導下的活動。

也正是出於這樣的考慮，一些數學家對現行數學教育中所出現的一些偏向提出了尖銳的批評。例如，為了使數學對大多數學生來說成為更有吸引力和力所能及的，“開放性問題”在現代的數學教育中得到了廣泛的應用，因為，普遍認為，與具有唯一正確解答、甚至唯一正確解題方法的“傳統問題”相比，開放性問題更適於使所有的學生參與到解題活動之中：他們可以依據各自的水平去進行求解。但是，在實踐中卻又經常可以看到這樣的現象，即學生們（甚至包括教師）只是滿足於用某種方法（包括觀察、實驗和猜測）求得了問題的解答、而不再去作進一步的思考和研究，甚至未能對所獲得結果的正確性（包括完整性）作出必要的檢驗或證明。從而，“在現實中，開放性問題在某些場合正在成為不求甚解和不加檢驗的猜測的同義詞。”上述的情況當然引起了數學家們的嚴重不安，特別是，“儘管這一討論僅限於開放性問題，但對於新改革的某些方面的大致了解已經使數學家對數學教育的前進方向產生了疑慮。”（詳可見鄭毓信，1994）。

當然，我們並不能因為在實踐中出現了一些偏差就對新的改革運動持絕對否定的態度；但是，在筆者看來，這又的確從一個側面清楚地表明了“問題解決”的局限性。這就是指，與單純地強調“問題解決”相比，我們應當更為明確地提出這樣的主張：“求取解答並繼續前進”（A. Schoenfeld, 1994）。更為一般地說，這也就是指，我們應當把幫助學生學會數學地思維看成數學教育的主要目標。從而，與“問題解決”相比，“數學地思維”就是一個更為恰當的口號。

綜上可見，這正是搞好數學教學的關鍵所在，即我們必須堅持必要的理論高度，同時則又應當注意處理好在一般教學與數學教學之間所存在的辯證關係。顯然，本文也就是這一方向上的一個努力。

## 參考文獻

1. Bauersfeld, H. (1992), Classroom culture from a social constructivist's perspective, *Educational Studies in Mathematics*, 23, 467-81.
2. Cobb, P. (1994), Constructivism and Learning, in Husen, T. & Postlethwaite (eds), *The International Encyclopedia of Education*, Oxford: Pergamon.
3. Cooper, P. (1993), Paradigm Shift in Designed Instruction: From Behaviorism to Cognitivism to Constructivism, *Educational Technology*, 1993, May, 12-19.
4. Davis, R. & Maher, C. & Noddings (1990) (eds), *Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics*, NCTM.
5. Ernest, P. (1991), *The Philosophy of Mathematics Education*, London: The Falmer Press.
6. Ernest, P. (1994a) (eds), *Mathematics, Education and Philosophy: An International Perspective*, London: The Falmer Press.
7. Ernest, P. (1994b) (eds), *Constructing Mathematical Knowledge: Epistemology and Mathematics Education*, London: The Falmer Press.
8. Foucault, M. (1980), *Power/Knowledge*, New York: Pantheon Books.
9. Goldin, G. (1990), Epistemology, Constructivism, and Discovery Learning Mathematics, in Davis, R. & Maher, C. & Noddings, N. (eds), *Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics*, NCTM, 31-47.
10. Kelly, G. (1955), *The Psychology of Personal Constructs*, Vol. 2, New York: Norton.

11. Kilpatrick, J. (1987), What Constructivism might be in Mathematics Education, in Bergeron, J. & Herscovics, N. & Kieran, C. (eds), Proceedings of the 11th International Conference of PME, Montreal: University of Montreal, 2-27.
12. Kitcher, P. (1984), The Nature of Mathematical Knowledge, Oxford University Press.
13. Lerman, S. (1994), Articulating Theories of Mathematics Learning, in Ernest, P. (eds), Constructing Mathematical Knowledge: Epistemology and Mathematics Education, 41-49.
14. Lowyck, J. & Elen, J. (1993), Transitions in the Theroetical Foundation of Instructional Design, in Duffy, T. & Lowyck, J. & Jonassen, D. (eds), Designing Environments for Constructive Learning, Springer-Verlag, 213-30.
15. Noddings, N. (1990), Constructivism in Mathematics Education. in Davis, R. & Maher. C. & Noddings N. (eds), Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics, NCTM, 7-18.
16. Schoenfeld, A. (1994) (eds), Mathematical Thinking and Problem Solving, Lawrence Erlbaum Associates.
17. Von Glasersfeld, E. (1990), An Exposition of Constructivism: Why Some Like it Radical, in Davis, R. & Maher, C. & Noddings, N. (eds), Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics, NCTM, 19-25.
18. Von Glasersfeld. E. (1995), Radical Constructivism: A way of Knowing and Learning, London: the Falmer Press.
19. Vygotsky, L. (1978) Mind in Society, Harverd Univer. Press.
20. Winn, W. (1993), A Constructivist Critique of the Assumptions of Instructional Design, in Duffy, T. & Lowyck, J. & Jonassen D. (eds), Designing Environments for Constructive Learning, Springer-Verlag, 189-212.
21. 曹天予 (1994), 社會建構論意味著什麼? 自然辯證法通訊, 1994年第四期。
22. 鄭毓信 (1986), 西方數學哲學, 人民出版社。
23. 鄭毓信 (1990), 數學抽象的基本準則: 模式建構形式化原則, 數學通報, 1990年第十一期。
24. 鄭毓信 (1991), 數學方法論, 廣西教育出版社。
25. 鄭毓信 (1993), “問題解決”與數學教育, 數學傳播, 1993年第四期。
26. 鄭毓信 (1994), 關於大眾數學的反思, 數學教育學報, 1994年第二期。
27. 鄭毓信 (1995a), 數學教育哲學, 四川教育出版社。
28. 鄭毓信 (1995b), 數學哲學中的革命, 哲學與文化, 1995年第八期。
29. 陳重穆、宋乃慶 (1993), 淡化形式、注重實質, 數學教育學報, 1993年第二期。
30. 黃毅英 (1993), 數學教育目的性之轉移, 數學傳播, 1993年第三期。

—本文作者任教於南京大學哲學系