

丘成桐院士演講：

我研究數學的經驗

時間：1997年6月19日

地點：新竹交通大學應用數學系

整理人：許正雄、林松山

主持人林松山致辭：

今天我們非常高興能夠請到丘成桐院士來演講，不是講深奧的數學而是講怎麼去做深奧的數學，好的數學。這講題是「我研究數學的經驗」，是丘院士研究數學的經驗，我們歡迎丘院士。

* * * * *

今天林松山教授叫我講關於應用數學的問題，我想了一想，講作學問的經驗也好。因為我來台灣也差不多五年了，我想國內很多研究人員做研究的方法並不見得是最好的，但是派出去的很多年輕人在國外卻十分出色，為什麼呢？這是很值得思考的。所以，我想講講我自己的經驗，讓大家參考一下。

我想首要的當然是要有熱忱，我們在整個做學問的路上要披荆斬棘，假如沒有熱忱的話，就沒有辦法成就一個大學問。前幾天看我父親的遺作，其中有

屈原：路曼曼其修遠兮，
吾將上下而求索。

做學問的路很長很遠，我們要上下求索，盡量去求真和美，能否堅持下去是成功的一個重要因素。

舉個例子，在一些有名的研究所，競爭很厲害，尤其在物理或者其它實驗科學方面的研究，真是分秒必爭；一個題目剛開始成熟，大家知道其他人也會做這個問題，很多博士後或教授往往聚在一起工作到深夜，甚至整

個晚上不睡覺。這裏當然有競爭的因素，希望達到一個目標，比人家快一點；可是另一方面也是因為求真的熱忱很大，激勵著我們，不肯放鬆。否則的話，很多有終身職的教授，沒有必要這樣拼命，可是很多人還是願意這樣幹，熱忱是很重要的推動力量。

我們要曉得，作研究的路是很遠的，一定要在低潮時還能堅持下去。很多人覺得若不在一流的學術中心，就不能做深奧的研究。有些人到了最好的地方，卻不敢去碰重要的題目。這有很多不同的原因，等一下我們再慢慢談，其中最要緊的我想是基本的功夫沒有做好。

我們所做的命題，最後的時候可能留下很簡單漂亮的結果，但是中間往往要花大量的計算我們才曉得這結果是怎麼得到的。做好的研究不是一朝一夕得來的，往往做了一百次，九十九次是錯的，最後一次才成功。但成功以後，作者只跟你講成功的結果，不會跟你講九十九次失敗的經驗。錯誤的經驗往往是很好笑的，我們經常犯很明顯的錯誤，快做完的時候才知道。可是發表結果的時候很少會提起錯誤的那部份，其實犯錯誤的結果會讓你眼睛明亮，幫助你看清楚前面的路。

能夠做不對的結果，已經是很不錯了，因為很多初學的人連怎麼開始做這個題目都搞不清楚。譬如來講；你給我一個化學上的問題，我連從什麼地方著手都不知道，因為我沒有做化學的基本功夫，我根本不曉得要從什麼地方開始。

一個好的數學家至少要能夠掌握兩門以上的基本功夫。基本功夫不是一朝一夕學來

的。譬如講；有代數的、有分析的、有幾何的等種種不同的方法，我們在中學的時候就開始學。有些人喜歡幾何，覺得代數沒有什麼意思不想學，或者是學代數的人不想學幾何，各種想法都有，可是最後我們發現真的做研究時全部工具都要用上。

有人說我只做一個特殊的題目就永遠只去做這方面的研究，結果連這方面的問題也不見得做得好。因為數學的發展不斷地在改變。自然界提供給我們的問題，不會因為你是幾何學家就單純地只提供幾何方面的問題，幾何與其他領域的學問往往結合在一起。到了做題目的時候，要用到其他工具，沒有辦法去了解，就比其他吃虧了。

例如，數學中很重要的一門「群表示論」，很多地方不教這門課，可是在應用科學或者理論科學要用到，「群表示論」在物理也要用到。有些好的數學家可以很技巧地運用「群表示論」分析很多問題。我們可能沒有這些技巧，是因為我們基本功夫沒有做好的緣故。「群表示論」大概是進了研究院或者大學後半期的時候學的。中國數學家在這方面的訓練不夠，因此不如國外學者，可見有些基本學科一定要學好，同時要很早就學。

我們做數學的不單要學數學的基本功夫，物理上的基本功夫也要學，同時在大學時就要學。對力學、電磁學我們都要有某種程度的了解，因為物理跟數學這十多年來的發展越來越接近，很多問題是物理學提供的。假如對這些基本觀念完全不懂得的話，我們看到這些題目時就比不上其他懂得這方面的數學家，他們能夠很快的融會貫通。在這個年

代，很多數學問題往往是從其它的學問如理論物理、應用數學或其它的科學裡來的，這些學科甚至提供靈感和方法。我們想了很久的一些問題，往往因此得到解決，假使我們從來都不接觸其他科學的話，就完全落伍了。

舉個例子來講，代數幾何學家這二十多年來已有長遠的發展。可是這幾年來，有一些困難的問題用古典的方法或者纖維叢的方法都沒有辦法解決，結果理論物理學家幫助他們看到解決這些問題的可能路線。由於本身知識的局限，很多代數幾何學家沒有辦法去接受這些專家的看法。可是物理學家畢竟提供了解決這些問題的方向，他們又覺得很難為情，因為他們沒有辦法去了解這種新的方法，所以這是一個很困擾的問題。假使你不肯學物理學上的基本功夫，你就很難接受這個新的挑戰。記得我看過一本書，序言裡面講作者很感謝代數學家 Albert，為什麼呢？他說，Albert教我代數，使我面對代數問題的時候不會恐慌，能夠坐下來好好的對付它。基本功夫的成熟在於看問題時，可不可以坐下來就能夠想辦法來對付它。我們往往看到問題時一下子就慌得不曉得怎麼辦，因此就放棄了好的題目，我想大家都有這個經驗。往往因為基本功夫沒練好，當一個深入的題目或理論出現的時候，我們就拒絕去接受，甚至認為這些題目不重要，這是去解釋自己為什麼不能夠去做某一個問題時最容易的方法，結果當然是一無所得了。

訓練基本功夫一定要早，甚至中學時代開始。基本功夫怎樣學好呢？看書當然很重要，但是看書看完了就放在一邊，看了兩、三

本書後就以爲懂了，這是不夠的，其實最重要的是去做習題，因為只有在做習題時你才能曉得什麼命題你不懂，也理解到前人遇到的困難在那裡。習題不單在課本裡找，在上課和聽討論班時也可以找。我們很多學生上課的時候不願意去寫筆記，不做筆記的話根本不可能去唸任何學科。因為一般來說演講的題目是根本不在書本裏的，或者是還沒有發表的。我常覺得很奇怪，為什麼學生不去作筆記，他認為他懂了，其實明明不懂。因為可能連講課的人自己都還沒搞懂，可是聽講的人不願意去作筆記，不去跟演講者交談，也不去跟其他老師討論。往往聽完以後就全部忘掉了。沒有筆記可供參考，怎麼可能不忘掉呢？另一個訓練基本功的方法就是要找出自己最不好的地方在那裡。我們看「群表示論」的時候，有一大套理論。單看理論是不夠的，在應用時往往要知道群表示是怎麼分解，你不能夠將它分解清楚，則理論對你一點好處都沒有。又例如一個方程式的估值問題，能不能瞭解其中的方法，就全靠實際計算經驗，不是光唸一兩本書就足夠的。舉例來說，我的兒子最近剛學因式分解，老師教他一大堆怎麼分解整數方程的問題。他學了，也學得很好，同時也學了找根的方法。可是有一次考試時他不知道怎麼做因式分解，我跟他說，你明明曉得怎麼找根，為什麼不能夠做因式分解？原來他學的時候沒有想到找根跟因式分解是一件事情。所以在訓練基本功的時候，要去想清楚數學命題間的關係，了解清楚為什麼要解這些命題。

我們去看很多人寫前人的事，寫了很多很漂亮的介紹和深入的批評。可是你自己沒

有經歷過這一條路的話，事實上很難了解困難在什麼地方，為什麼人家會這樣子想。要得到這個經驗，不單要做習題，還要做比較困難的習題。

做困難的習題有什麼好處呢？困難的習題往往是幾個比較基本的問題的組合。我自己看書的時候，常常會一下子就看完了一本書，覺得很高興，因為看完了；可是重新再看，反而什麼都不懂。我想大家都會有這個經驗，主要的原因是什麼呢？我們沒有學好這個學科，做比較困難的題目的時候，你就發覺會遇到困難。尤其是我們做書中習題的時候，往往覺得似是而非，在腦子裡面想，以為已經懂了、可以解決了、就一廂情願地以為解決了，這樣就很快地看完那一本書，事實上這是欺騙自己，也不是訓練基本功的方法。一個好的題目，你應當坐下來用筆寫下來，一步一步地想，結果你會發現很多基本的步驟你根本沒有弄清楚。當你弄清楚的時候，你去看你以前需要的定理在那裡、怎麼證的、我想你會慢慢了解整個學問的精義在那裡。

所以說，動筆去做習題是很重要的，我們做大學生的時候還願意做這個事，往往做研究生的時候，自以為了不起，畢業以後更不用講，以為自己都懂了，事實上似是而非。所以我們一定要動手去做，當你在一門課裡面，基本功搞得很清楚同時開始動筆計算以後，你就發現書裡面很多是錯的。在能發現書本裡的錯誤時，你的基本功也不錯了。有課外書往往可以幫忙糾正書本的錯誤，我們這個時代的學生不看課外書，連本身的教科書也不看，很使人失望。

做研究時，自己要去找自己的思路。我做大學生第一年的時候，開始將數學整體去看，同時一點一點地推導，有些幾何或分析上的問題，我覺得可以慢慢將它連起來就覺得很高興。

我講這個事情是什麼原因呢？我覺得現在很多大學生和研究生對於宏觀的數學看法並不熱情。能夠做完課本上的題目，就覺得很滿足。沒有整體的去想數學，無論幾何或者代數，我們需要知道研究的是什麼事情？追求的是什麼對象？去考慮這些事情其實並不會花你太多時間，可是整體性的想法一定需要成熟的基本工夫才能形成。就算很瑣碎的事情你都要有相當的認識，才能對整個科學有一個基本的看法、一個大範圍的看法。

現在談談我個人的經驗，記得唸中學的時候我學了平面幾何。大家都曉得平面幾何很漂亮，我也覺得很有意思。書本上的平面幾何問題大概我都懂得怎麼做。可是我覺得還是不太夠，所以我將很多基本的問題連在一起，之後開始慢慢想。去發現一些書本沒有的問題，去想書本的方法能夠有什麼用處，是不是大部份平面幾何上的問題都可以用這些方法去解決？其中有一個問題我發覺沒有辦法去解決，花了很多功夫去想，參考了很多課外書，最後很高興找到一本書講那個問題不可能用圓規和直尺來解決，書上用代數的方法來解釋這個命題。因為試過很多不同的想法，完全不曉得圓規和直尺有時解決不了平面幾何上的問題，因此看到人家將這個問題解釋清楚，就覺得很滿意；那時候是中學生，沒有了解 Galois 理論，所以還是搞不太清楚是怎

樣證明的，可是至少曉得有些問題是不能用圓規和直尺去解決的；也因為經過很長的思考，所以對幾何學清楚很多，也開始欣賞到做數學的精義。我想我們做一個習題或研究，最好花些功夫去想想整個問題的來龍去脈，也多看一些參考書，這樣幫助很大。因為數學無非是很多方法放在一起解決很多不同的問題。當我們了解到整個方法的局限，基本功夫也做得很好了。基本功夫沒搞清楚的話，沒有條件去講某人學問好，某人學問不好。

從前在香港唸大學的時候，環境比現在差得多，圖書館根本沒有什麼書，也沒有什麼很好的導師，但還是看了些課外書，也看了不少文章。但現在回想起來浪費了很多精力，這是因為眼界太淺、坐井觀天，不知數學的發展方向的緣故。以後到了 Berkeley，也看了很多文章，得益良多。一方面當地圖書館收藏豐富，一方面良師益友的交往，心中開始建立對數學的看法，知道什麼是好的數學，什麼是好的文章。中學的時候，老師跟我們講：好的書要看，不好的書也要看。因此不好的書我也看，你可能覺得奇怪；我覺得一定要辨別什麼是好的書，什麼是不好的書。在看文章的時候，一定要搞清楚有些作者寫的文章是一般的，有些作者的著作是了不起的，從不好的文章裡面，你也可以看到許多現代的發展。因為有時候，從簡單的寫法裡面，反而比較容易入手，可是你一定要曉得它的命題並不見得是有意思的，一定要經過自己大腦仔細去想。它裡面的組織往往是有的，普通水平的文章裡面，往往會引用有名的文章，介紹裡面的內容，同時往往會寫得比較容易一點。你看了以

後，要曉得怎樣和好的文章比較。這是我自己的經驗，你不一定要這樣子做。我的建議是大部份的時間看大數學家的作品，小部份時間瀏覽一般作品，並做比較。

我當研究生的時候，有時候從早到晚都在圖書館看期刊、看書。當時 Berkeley 沒有研究室，研究生沒有研究室很好，整天在圖書館裡面坐。幾乎主要期刊的文章我都看過，這並不表示仔細的看，但至少主要的定理都看過。當時大部份定理看不懂，看不懂沒有什麼關係。往往要花很多功夫才能夠在細節的部份搞清楚一篇好的文章。因此第一眼就看得懂的文章，一般來說不見得太好。（並不是講一定不好，簡單的文章有時也有創見。）多看文章讓你曉得當時的人對於某一個方向的問題重視，對你幫助很大。

很多學生跑來問我問題，我跟他講某某年有誰做過、做到什麼階段，他們聽了很驚訝，為什麼我曉得？其實誰都沒有跟我講，大部份是我在文章上看的。做研究的時候，需要曉得的是誰做過、在什麼地方可以找到這方面的文獻。有了這個幫助以後，就可以跑去圖書館找這個文件。甚至你只要曉得那一個年代誰碰過這個問題，也有很大的好處。

你有追求的熱情又培養好基本工夫以後，應當將不同的看法融會貫通。到了這一步以後，你可以開始找自己的題目。因為你開始曉得整個數學界在追求什麼目標，想解決什麼問題。

一個數學家怎麼找自己的問題是很重要的。當然有不同的找法，有些人要發展一套理論，有些人要解決難題。理論的目標最後

還是要解決問題的，所以解決重要問題是發展一般理論中很重要的一環。舉例來說，像 Poincaré conjecture，它是三維拓樸中最主要的猜想，我們曉得前人花了很多心血去解決它，到了現在有很多不同的嘗試方法，各自成一氣候。這個命題已經變成一門學科而不再是一個孤立的問題。當這個猜想徹底解決後，三維空間的結構了解才算圓滿。另一方面有些人為什麼只對 Poincaré Conjecture 有興趣，對其他問題興趣不大，那是因為它是公認的難題。我想選題方面每個人有不同的看法。我有很多朋友是很出名的數學家，他們一輩子只想解決出名的問題，我認為這種選題方法是錯誤的。在數學上，我們應該有整個系統的想法，想整個數學的目的在那裡、應當解決什麼問題。

你們或許唸過王國維講的做大學問的三個階段，第一個階段是晏殊說的

昨夜西風凋碧樹，
獨上高樓，望盡天涯路。

要解釋這一段話，我要再說明基本功夫的重要性。如果基本功夫沒有做好，你根本望不遠。你叫中學生去望盡天涯路，根本是不可能的事，最後只能講一些空談的話。對數學或者科學的歷史不了解的話，你根本沒有資格去談以後的事。

現在很多學生，尤其是研究生，我覺得很頭痛，叫他做一個小題目，做了以後，一輩子不願意放。不停的寫小文章，寫了文章當然可以發表，對某些年輕人來講，他認為這樣子很好，不用想重要的問題。今天能夠寫一篇小文章，明天能夠寫一篇小文章，就可以升等。

假如寫不出來的話，生活上會受到困擾。這都是對的，可是真的要做一個好的題目，其實也不見得那麼難。一些研究生的論文是歷史上有名的著作。為什麼他們能夠花三、四年的工夫，做出這麼出色的工作？他們是從不懂到懂，然後還要再向前進。這表示要做好的題目，並不是像你想像要花很多很多的時間才能夠做到，問題是你的決心夠不夠。昨夜西風凋碧樹，就是說你要望很遠的話，要將前面小的樹去掉，才能看得遠。假如我們眼界裡面的都是小題目，永遠都看不遠。我們要懂得怎麼放棄些渣滓，才能夠做一些好的題目，這是一個很重要的決定。你不願意放棄你明明曉得不會有前途的問題，就永遠做不到好的問題。這是一個很困難的選擇，因為畢業和升等是很困擾的問題，你不願放棄沒有前途的小問題，那你永遠不會成就大學問。

我記得我剛學幾何時，當時流行度量幾何，所有工具都是用三角比較定理得來的，我始終覺得這對幾何的刻劃不夠深刻。後來我和我的朋友和學生開始一系列用微分方程作為工具的幾何研究，得到不少結果。我很慶幸當時願意放棄一些小的成果，走一條自己的路。

我們選題的時候，可以跟出名的數學家、跟導師討論或者是從書本上得到啟發，可是最後的思考一定要有自己的想法才能成就大學問。假如沒有自己的想法，則始終跟著人家走、是沒有辦法做好學問的。所以要獨上高樓，去找自己認為重要的研究方向，去開創自己的路線。

王國維在談學問的第二階段裏引用了柳永的詞：

衣帶漸寬終不悔，
為伊消得人憔悴。

尋找真理的熱情就如年輕的戀人對自己對象的追慕，那是很重要的事。在追求一個好的命題的時候，中間要花很多功夫，有時候甚至是很痛苦的。可是我們只要相信，最後的成果是值得的，我們就會花很多功夫去做，就像愛情一樣。很多年輕人找對象時，朝思暮想，但做學問時卻沒有這種態度。假如做學問沒有熱情沒有持久力的話，就不可能做成大學問。屈原說「亦余心之所善兮，雖九死其猶未悔」比柳永更來得澈底。接著下來大家都曉得王國維的第三階段是

眾裡尋他千百度，
驀然回首，那人卻在，
燈火闌珊處。

這是辛棄疾的詞，基本上我們都有這種感覺。凡作過文章的人就有這種經驗。我們花很多功夫做一個好的命題，新思緒來臨時，每每徹夜難眠。有時候想得辛苦了，就一睡睡很久。假如你做學問做到這個地步，你會解決很多意想不到的問題。

我們做學問跟愛情不太一樣，有時候不一定看到原來既定的目標，而是看到其它有趣的問題。就像我剛才講的，我們要解決 Poincaré conjecture，最後還沒解決它，可是往往解決了其它命題，這是數學史上常常有的。這是因為我們做這個題目的時候，不曉得走法對不對；可是你將這個工具全部搞好，基本的想法、有意思的想法都懂得以後，就可以解決很多問題了。在路上走的時候，思想不

要太頑固。你要知道還有其它有意思的問題。發展了一套的想法以後，往往恰好可以解決這些問題。

因此，在整個做研究的過程裡面，眼睛要睜開。眼睛怎麼睜開呢？很多學生不願意去聽 colloquium，也不願意去聽其它人的 seminar。不聽 seminar 就不曉得人家在做什麼東西。明明你的方法可以解決他們在做的問題，但你眼睛閉起來、看不到，這是一個很大的困難。很多學生尤其是中國學生，講我的論文是做這個，這個 seminar 與我的論文無關，我不願意去聽、不願意去看、不願意去跟人家來往、不願意去跟人家交談。結果本來你的論文明明可以做得比人家好，你卻讓這個機會溜掉，可能你的方法剛好可以解決人家的問題。因為你不願意去聽、去看，你就錯過了這個機會。

一個人的思維、能力有限，不可能不靠人家的幫忙。什麼是人家的幫忙呢？一方面是看文章，聽 seminar，一方面就是請教名家。你自己去請教別人的時候，百分之九十五的情形下，別人不曉得你在做什麼，也不可能提供直接的意見。（假如能夠直接提供意見，幫你直接解決問題的話，你這個問題不見得是很重要的問題。）但不要緊，多請教別人總有好處，至少曉得這個問題有多好，還是不好。假如你怕發問，就在 seminar 或 colloquium 的時候多聽，就算聽不懂講者的話，也看他寫的頭幾個字，大致上會知道他在做什麼題目。至於比較複雜的內容，你可能覺得莫名其妙，可是你還是可以發現得到不少好處。所以能夠盡量去聽不同的課，對你是有很

大好處的；唸純數學的也應當去聽應用數學或物理方面的課。聽 seminar 時，即使不懂也沒有什麼損失，反正總比在家裡無聊看電視好。

怎樣在孤立的地方，也能夠做好的學問？舉個例子來講，十四年前，復旦大學有一位學生，他要來跟我，我答應了。結果因為當時復旦大學的校長怕留學生全部走掉了，所以不准他出國，因此他沒有辦法來跟我。但是他將我在80年代寫的問題集，在大概一百題中，選了一個題目去做，拼命的在做。我不曉得他在做這一個題目，雖然他在一個比較孤立的地方，可是十多年堅持下來，去年終於做出很重要的結果。我覺得很高興，因為這是一個很不簡單的問題。可見找對了題目，同時拼命的花功夫去做，就算不跟人家來往，也不見得做

不出成績來。當然我不知道他是不是完全不跟人家來往，因為復旦大學裡面也有一些很不錯的數學家。交大、清華不能講是孤立的地方。在這個條件下，我覺得絕對是可以做好學問的地方。

今天講的是我唸書的經驗，希望你能夠參考。不見得每一個人同意，每一個數學家都有對學問不同的看法，你可以追隨不同的路線。可是最開始所講基本功夫要做好這一點，總是少不掉的。然後要盡量去開發自己的領域，題目一定要做重要的。即使後來得到的是比較小的結果，總比一開始只想做不重要的題目來得好。到了解決主要的問題以後，你對整個學問的看法會有所不同。今天就講到這裡，謝謝大家。