映射數列問題

張忠輔 ● 楊世明

設 T 爲自然數集 $N \to N$ 的映射。任給 $n_0 \in N$, 連續施行疊代: $T(n_0) = n_1$, $T(n_1) = n_2, \ldots$, 一般地, $T(n_{k-1}) = n_k \in N$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ 則數列

$$n_0, n_1, \ldots, n_k, \ldots \tag{1}$$

就叫做 映射數列, 這種數列常呈現某種奇妙的性質, 如週期性等等。

易見, T 是 N 上的一個二元關係。考慮 N 的一個子集 N', 滿足: $m \in N' \Rightarrow T^{(m)} \in N'$ (即 N' 關於 T 封閉)。我們約定, 如果 $T(m) = n$, 則由 m 到 n 以有向孤 (m, n) 連接, 那麼就構成圖 (N', T), 該圖也稱爲數列 (1) 的圖論表示。不難知道, 數列 (1) 的性質與圖 (N', T) 的性質是相互對應的。

對 (1) 來說, 如存在一個非負整數 k 和一個最小的自然數 ℓ, 使得

$$T(n_k) = n_{k+1},$$
$$T(n_{k+1}) = n_{k+2}, \ldots,$$
$$T(n_{k+\ell-1}) = n_k$$

(即 $n_{k+\ell} = n_k$), 則 (1) 稱爲 週期數列, ℓ 叫做 週期, $\{n_k, n_{k+1}, \ldots, n_{k+\ell-1}\}$稱爲一個 週期節 (也叫循環節), 一個 週期節 在圖 (N', T) 中將形成一個圈 (稱爲 洞, 以週長 ℓ 表示其大小)。

按“鴿洞原理”, 數列 (1) 爲週期數列的一個顯然的充分條件是 $\{n_k\}$ 有界。由此不難證明: 如果數列 $\{n_k\}$ 自某項以後位數不增, 則它必爲週期數列。

關於數列 (1) 成爲週期數列的條件問題, 已有若干工作, 但至今未能較具體地解決如下問題:

whc1: 數列 (1) 爲週期數列的條件是什麼? (這裡,whc 表示問題或猜想, 下同)

1. 數碼方冪和問題

以 $T(n)$ 表示 n (在10進制下) 各位數碼的 m ($m \in N$) 次方之和。當 $m = 1$ 時, $T(n)$ 即爲 n 的數碼和, 容易證明, 這時, 在有限步內, 數列 (1) 必進入週期節 $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$, $\{7\}$, $\{8\}$ 或 $\{9\}$。我們考慮 $m = 2$ 的情形, 即數碼平方和問題。先看兩個例子:

取 $n_0 = 9331$, 則(1) 成爲:

$$9931, 100, 1, 1, 1, \ldots$$

取 $n_0 = 2986$, 則(1) 成爲:

$$2986, 185, 90, 81, 65, 61,$$

$$37, 58, 89, , 145, 42,$$

$$20, 4, 16, 37, 58, \ldots.$$

它們都是週期數列, 週期分別爲1和8。一般地, 有如下結論:

設 $T(n)$ 表 n $(n \in N)$ 在10進制下各個數碼的平方和, 則數列 $\{n_k\}$ 有如下兩條性質之一:

1° 存在 $k_0 \in N$, 使得當 $k \geq k_0$ 時, $n_k = 1$;

2° 存在 $k_0 \in N$, 使得當 $k \geq k_0$ 時, $n_k \in M = \{37, 58, 89, 145, 42, 20, 4, 16\}$。

爲了證明, 設 $n_0 = \sum_{i=1}^{t} 10^{i-1} a_i$ (a_i 爲數碼 $0, 1, \ldots, 8$ 或 9)。則 $n_1 = T(n_0) = \sum_{i=1}^{t} a_i^2$, 於是

$$n_0 - n_1 = \sum_{i=2}^{t} (10^{i-1} - a_i) a_i - (a_1 - 1) a_1$$

因 $0 \leq a_i \leq 9$, 則 $(a_1 - 1)a_1 \leq 72$, 當 $t \geq 3$ 時, 如 $a_t \neq 0$, 則 $(10^{t-1} - a_t)a_t \geq 99$, 且對 $i = 2, 3, \ldots, t-1$, $(10^{i-1} - a_i)a_i \geq 0$。因此, 當 $t \geq 3$時, $n_0 - n_1 > 0$, 即

$$n_1 < n_0$$

這就說明, 只要 n_0 爲三位或三位以上的數, 求數碼平方和後, 就會減小。同樣, 如 n_1 仍是不低於三位的數, 那末 $n_2 < n_1, \ldots$, 因此在有限步之後必成爲一位或二位數 (當然, 可能再變爲三位數, 但不會再超過三位), 接前述判別準則, 知 $\{n_k\}$ 當爲週期數列。而且, 爲了具體地找出週期節, 僅考慮一、二位數就可以了。

設 $n_p = 10b_2 + b_1$, 則 $n_{p+1} = b_1^2 + b_2^2$, 作出數列

$$n_p, n_{p+1}, n_{p+2}, \ldots, n_{p+s}, \ldots$$

的圖論表示 (圖1-1), 它是圖 (N, T) 的一部分 (“根”部)。

此圖說明, 由不超過兩位的數 n_p 出發, 通過最多 9 次疊代, 即進入 $\{1\}$ 或 M。從而結論成立。

記 $T^1(n) = T(n)$; $T^2(n) = T(T^1(n))$, $\ldots, T^k(n) = T(T^{k-1}(n)), \ldots$, 對任意的 $n \in N$, 上面已證明, 當 $m = 2$ 時, 存在最小的非負數 $k_0(n) = k_0$, 使 $T^{k_0}(n) = 1$ 或 $T^{k_0}(n) \in M$ (我們稱這個 k_0 爲 n 關於 T 的到 M 或 $\{1\}$ 的路程。那麼我們問:

whc2: 能否求出 $k_0(n)$ 的解析式? n 滿足什麼條件時, 有 $T^{k_0}(n) \in \{1\}$ (或 M)?

對 $n = \sum_{i=0}^{t} 10^i a_i, a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, 設 $T(n) = \sum_{i=0}^{t} a_i^m (m \in N)$, 上海市一位中學生戚淳昊1988年曾研究過此問題。並找到了當 $m = 3$ 時, (N, T) 中的七個圈:

$$\{1\}, \{153\}, \{370\}, \{371\}, \{407\}$$

$$\{55, 250, 133\}, \{160, 217, 352\}$$

1992年4月, 馮躍峰認爲應存在九個圈, 另外兩個是

$$\{919, 1459\}, \{136, 244\}$$

當 $m = 4$ 時, 他找到了兩個圈

$$\{1\}, \{1138, 4179, 9219,$$

$$13139, 6725, 4338, 4514\}$$

在一般情形下, 圖 (N, T) 是否一定有圈? 對此, 馮證明了如下

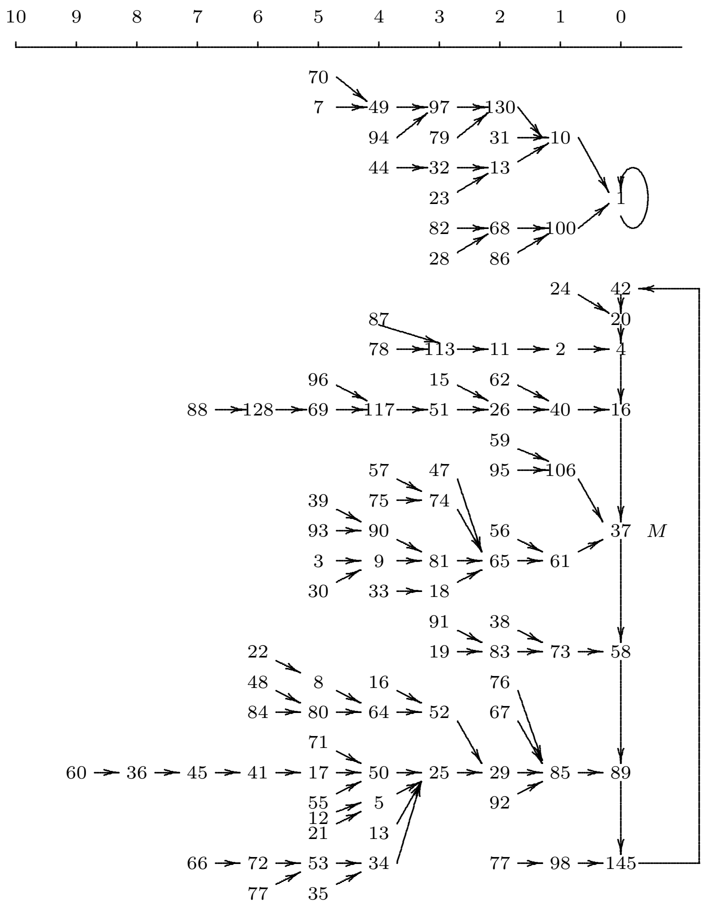

圖 $1-1$

定理1-1: 對任何 $n\in N$, $n=a_0+a_1\cdot 10+\cdots+a_t\cdot 10^t$, (其中 $a_0,a_1,\ldots,a_t$ 爲數碼, $a_t\neq 0$), 設 $T(n)=a_0^m+\cdots+a_t^m$ ($m\in N$), 則 (1) 必爲週期數列, 即圖 (N,T) 中必有圈。

只須證明存在 n_0, 當 $n>n_0$ 時, $T(n)$ 位數不增即可。事實上, 可證更強的結果: 當 $n>n_0$ 時, $T(n)\le n$。爲此, 考察

$$\begin{aligned} n-T(n)&=\sum_{i=0}^{t}(10^i a_i-a_i^m)\\ &=\sum_{i=0}^{t}a_i(10^i-a_i^{m-1}) \end{aligned}$$

構造函數

$$f(x)=x(10^t-x^{m-1})\ (0\le x\le 9)$$

則

$$f'(x)=10^t-mx^{m-1}\ge 10^t-m\cdot 9^{m-1}$$

設 $m\cdot 9^{m-1}$爲 k 位數, 取 $n_0=\max(10^k,10^m)$, 由於 $a_t\neq 0$, 則當 $n>n_0$ 時, $t\ge\max(k,m)$, 於是

$$f'(x)\ge 10^t-m\cdot 9^{m-1}>0$$

從而 $f(x)$ 在 [0,9] 上單調遞增, 而 $1\le a_t\le 9$, 故 $f(a_t)\ge f(1)$ 即

$$a_t(10^t-a_t^{m-1})\ge 1\cdot(10^t-1)\ge 10^k-1$$

再由 $t \geq m$, 得

$$
\begin{aligned}
& n-T(n) \\
= & a_t(10^t-a_t^{m-1})+a_{t-1}(10^{t-1}-a_{t-1}^{m-1}) \\
& +\cdots+a_{m-1}(10^{m-1}-a_{m-1}^{m-1}) \\
& +a_{m-2}(10^{m-2}-a_{m-2}^{m-1})+\cdots \\
& +a_1(10-a_1^{m-1})+a_0(1-a_0^{m-1}) \\
\geq & a_t(10^t-a_t^{m-1})+a_{m-2}(10^{m-2}-a_{m-2}^{m-1}) \\
& +\cdots+a_1(10-a_1^{m-1})+a_0(1-a_0^{m-1}) \\
\geq & 10^k-1+9(0-9^{m-1})(m-1) \\
\geq & 10^k-1-m\cdot 9^m \geq 0
\end{aligned}
$$

(最後一步是因爲: $m\cdot 9^m$ 爲 k 位數, 而 10^k-1 爲 k 位數中最大的)。所以當 $n>n_0$ 時, $T(n)\leq n$ 。證畢。

由證明過程可見:

1) n_0的理論值估得比較大, 實際上開始進入週期要早得多, 即非週期部分的項數比 n_0 小得多。

2) 設 $p\in N$, $p\geq 2$, $n=\sum_{i=0}^t a_ip^i$, $a_i\in\{0,1,\ldots,p-1\}$, $T(n)=\sum_{i=0}^t a_i^m$ $(m\in N)$, 則上述證明對圖 (N,T) 是完全適用的, 即可完全類似地證明圖 (N,T) 中必有圈。

根據 $m=1,2,3,4$ 的結果, 對 $p=10$, 馮躍峰猜想:

當 m 爲奇數時, (N,T) 中有9個圈; 當 m 爲偶數時, (N,T) 中有2個圈。

1993年5月, 江蘇沭陽的張延衛找到 $m=4$ 時 (N,T) 中的6個圈, 從而否定了馮猜想; 但還未弄淸。

whc3: 對 $p=10$ 和 $m\in N$, 圖 (N,T) 中有多少個圈? 怎樣構造這些圈? 大小如何? 還有什麼規律和性質?

whc4: 在 $p(p\in N, p\neq 1)$ 進制下, 圖 (N,T) 有幾個圈? 圈數同 p 有何關係? 怎樣構造這些圈?

whc5: (自然數數碼和的方冪問題) 設 $m\geq 2$ 爲自然數, 對 $p\in N$, $p\geq 2$, $n=\sum_{i=0}^t a_ip^i$, 設 $T(n)=(\sum_{i=0}^t a_i)^m$, 考慮數列 (1) 和圖 (N,T) 的性質及其與方冪和問題之間的關係。

2. $(3n+1)$ 問題

漢堡大學的庫拉茲 (Collatz)1985年底發表一篇文章, 談到他早在1928-1933年期間想到的一個問題,1952年後逐漸傳播出去的情形。到八十年代初, 已有若干工作。此問題由於表述簡明, 又有難度, 激起不少人的興趣。庫拉茲本人稱爲 “$(3n+1)$ 問題”, 有文獻稱爲“庫接茲問題”, 日本人稱爲“角谷猜想”, 問題至今尙未解決。

whc6: ($(3n+1)$ 問題) 對任一自然數 $n\geq 2$, 反復施行運算: 若 n 爲奇數, 乘以3再加1; 若 n 爲偶數, 則除以2, 那末計算到最後, 總得1。

米田信夫對7000億以內的數進行驗算, 結果都對。如果對 $n\in N$, 取

$$
T(n)=\begin{cases} 1, \text{若} n=1, \\ \frac{n}{2}, \text{若} n=2k, k\in N, \\ 3n+1, \text{若} n=2k+1, k\in N. \end{cases}
$$

那麼就是要證明: 對任意 $n_0 \in N$, 數列 (1) 成爲

$$n_0, n_1, \ldots, n_t, 1.1, 1, \ldots \qquad (2)$$

(t 爲非負整數), 如稱滿足 (2) 的自然 n_0 爲庫拉茲數, 全部庫拉茲數構成的集合記作 N_c, 那末 $(3n+1)$ 問題就是要證明。

whc6′: $N_c = N$。

我們有 $1 \in N_c$, $2^k \in N_c (k \in N)$, 而且由於對 $k \in N$, 有 $T^k(2^k m) = m$, 則有

定理1-2: $m \in N_c \Rightarrow 2^k m \in N_c (k \in N)$。

將 $T(n)$ 分別記爲 $T_0(1) = 1$, $T_1(2m) = m$, $T_2(2m+1) = 3(2m+1)+1$, 則易證如下的

定理1-3: $m \in N_c \Leftrightarrow$ 存在 $k \in N$, 對 $m \in N$ 施行若干次運算 T_1, T_2 後化爲 2^k。

充分性是顯然的, 現證必要性: 設 $m \in N_c$, 則按定義:

$$T_1^k T_2 T_1^{k_\ell} T_2 T_1^{k_{\ell-1}} T_2 \cdots T_2 T_1^{k_1}(m) = 1 \quad (3)$$

其中, $k, k_\ell, \ldots, k_2 \in N$, k_1 爲非負整數 (約定 $T_1^0(m) = m$)。但只有 $T_1^k(2^k) = 1$, 因此由 (3) 知 $T_2 T_1^{k_\ell} T_2 \cdots T_2 T_1^{k_1}(m) = 2^k$。

由定義可直接推出

定理1-4: $n \in N_c \Rightarrow T(n) \in N_c$。

我們來考慮 (無限有向) 圖 (N, T), 由於除1以外, 奇數僅是 $T_1(n)$ 的結果, 因此, 奇數頂點的出入次數都是1, 偶數頂點的出次數爲1, 但 λ 次數可以爲2(當且僅當 $2m \equiv 1 \pmod 3$ 時, 頂點 $2m$ 的 λ 次數爲2), 在圖1-2中, 畫的是圖 (N, T) 的一部分。

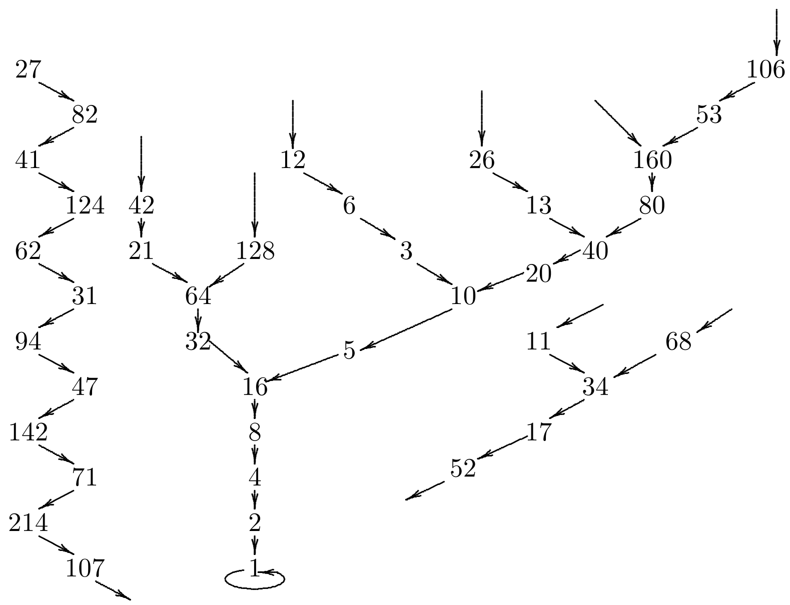

圖 1 − 2

如果其中沒有圈和指向無窮的分支 (圖 1-3), 它就是一個“向根”樹, 樹的根部是1, 那麼 whc6′成立。而如果它是連通的, 就不會有圈或伸向無窮的分支, 否則就會出現如圖 1-3所示的分叉點 A, 其出現次數爲2, 這同 $T(n)$ 爲映射相矛盾。而沒圈和無窮分支且連通的圖即爲“向根”樹。因此, $(3n+1)$ 問題等價於

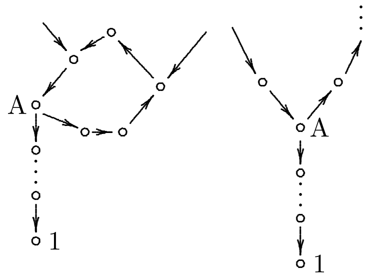

圖 $1-3$

whc6″: 圖 (N,T) 是連通的。

設 $m\in N_c$ 滿足關係式 (3), 則 m 稱爲 ℓ 次 庫拉茲數; 比如 $g_0(k)=2^k(k=0,1,2,\ldots)$ 爲零次庫拉茲數; 對於 $t\in N$ 和非負整數 k,

$$g_1(k,t)=2^k(4^t+4^{t-1}+\cdots+4+1)$$

爲1次庫拉茲數; 由圖1-2可見,26,13等爲2次庫拉茲數。不難驗證,11爲4次的, 而27爲41次庫拉茲數。

whc7: $\ell(\ell=2,3,4,\ldots)$次庫拉茲數的解析式是什麼?

1994年9月, 福州的林世保獲得如下結果:

1) 對 $\ell\in N$ 和非負整數 $k_i(i=1,2,\ldots,\ell)$ 使得

$$g_\ell=\frac{1}{3^\ell}(2^{k_1+\cdots+k_\ell}-3^{\ell-1}-3^{\ell-2}\cdot 2^{k_1}-3^{\ell-3}\cdot 2^{k_1+k_2}-\cdots-2^{k_1+\cdots+k_{\ell-1}})$$

爲正整數, 則 g_ℓ 是 ℓ 次庫拉茲數。事實上, 這不過是方程 (3) 求解的結果, 例如, 二次 (奇) 庫拉茲數的表達式爲

$$g_2=\frac{1}{9}[2^{2k}(2^{6k_1+2}-1)-3]\text{或}$$
$$g_2=\frac{1}{9}[2^{2k+1}(2^{6k_1+4}-1)-3]$$

2) 當 $g_\ell\equiv 1(\bmod 3)$ 時, $g_\ell g_1+\frac{g_\ell-1}{3}$ 是 $\ell+1$ 次庫拉茲數; 當 $g_2\equiv 2(\bmod 3)$ 時, $2g_\ell g_1+\frac{2g_\ell-1}{3}$ 是 $\ell+1$ 次庫拉茲數。

3) $4g_\ell+1$ 也是庫拉茲數。

3. $(3n+1)$ 問題的推廣

早在1987年, 安徽一位數學教師對 $(3n+1)$ 問題就做了系統的推廣,1990年五月,「自然雜誌」在發表他的文章的同時, 通過“編者按”評價說:

> “「角谷猜想的推廣」雖出自一位業餘數學愛好者之手,但猜想有據, 推斷有理, 顯示出一定的數學功底。本刊特予刊載, 若有朝一日誰能沿著該文的思路一舉解決了角谷猜想,千萬不要忘記了這位在艱苦條件下勤奮自學的業餘愛好者呵!”

一個尚未解決的問題或猜想, 再“推廣”有什麼意義嗎? 希爾伯特說:

> “在解決一個問題時, 如果我們沒有獲得成功, 原因常常在於我們沒有認識到更一般的觀點, 即眼下要解決的問題不過是一連串有關問題中的一個環節。採取這樣的觀點之後, 不僅我們所研究的問題會容易得到解決, 同時還會獲得一種能用於相關問題的普通方法。”

張對 $(3n+1)$ 問題的推廣, 正是給出了一連串有關的問題和這類問題的一般觀點, 從而使問題表現出更明顯的規律性, 特別顯示出問題不僅同兩個素數 2 和 3 有關, 而是同整個素數數列密切聯繫, 從而揭示出問題的深刻意義。

如果把 $(3n+1)$ 問題 (**whc 6**) 叫做猜想1, 作代換 $1\to 3^k$ (k 爲非負整數) 就得

猜想 $1'$ ($(3n+3^k)$ 問題): 設 k 爲給定的非負整數, 對任一自然數 m,

(1) 若 m 爲偶數, 則用 2 除 m;

(2) 若 m 爲奇數, 則用 3 乘 m 再加 3^k。

對上述運算結果行上述運算, 則經有限次後, 總得 3^k。

猜想 2 ($(5n+1)$ 問題): 對任一自然數 m,

(1) 若 $2\mid m$ 或 $3\mid m$, 則用 2 或 3 除 m;

(2) 若 $2\nmid m$ 且 $3\nmid m$, 則用 5 乘 m 再加1,

對上述運算結果再行上述運算, 有限次後總爲1。

在 $(5n+1)$ 問題中, 作代換 $1\to 5^k$ ($k\in\overline{Z^-}$), 其他不變, 則得

猜想 $2'$: $(5n+5^k)$ 問題。

猜想 3 ($(7n+1)$ 問題): 對任一自然數 m,

(1) 若 $2\mid m$ 或 $3\mid m$ 或 $5\mid m$, 則用 2, 3或5除 m;

(2) 若 2, 3, 5 均不能整除 m, 則用7乘 m 再加1,

對上述運算結果再行上述運算, 有限次後必得 1。

在猜想 3 中作代換 $1\to 7^k$ ($k\in\overline{Z^-}$) 得

猜想$3'$: $(7n+7^k)$ 問題。

猜想 4 ($(11n+1)$ 問題): 對任一自然數 m,

(1) 若2,3,5,7中至少一個整除 m, 則用它去除 m;

(2) 若2,3,5,7均不能整除 m, 則用11乘 m 再加1。

對上述運算結果再行上述運算, 則經有限次後, 結果或爲1, 或出現循環“17-47-37-17”。

如果記 $\psi_1=\{1\}$, $\psi_2=\{17,47,37\}$, 則上述猜想結論可說成: “$\cdots$ 經有限次後, 結果或屬於 ψ_1, 或屬於 ψ_2”。記 $\psi_1'=\{11^k\}$, $\psi_2'=\{17\times 11^k, 47\times 11^k, 37\times 11^k\}$ ($k\in\overline{Z^-}$) 在猜想4中作代換 $1\to 11^k$, $\psi_1\to\psi_1', \psi_2\to\psi_2'$, 則有

猜想 $4'$: $(11n+11^k)$ 問題。

由以上不難看出, 猜想 $1-4$ 分別爲猜想 $1'-4'$ 當 $k=0$ 時的特殊情形。意味深長的是, 有

定理1-5: 如果猜想 $1-4$ 成立, 則猜想 $1'-4'$ 也成立。

我們僅證: 如4成立, 則 $4'$ 成立。

對給定的非負整數 k, 設從某自然數 m_0 開始, 施行猜想 $4'$ 運算過程:

$$m_0 \to m_1 \to m_2 \to \cdots \to m_i \to \cdots$$

其中 m_i 是由 $11m_{i-1}+11^k$ 中約去素因子 2,3,5,7而得, 用 F_i 表示約去的所有素因子的和, 則

$$11m_{i-1}+11^k = F_i m_i$$

再設 $m_i = 11^{\ell} n_i$, $11 \nmid n_i (i=0,1,2,\ldots)$ 下面分兩種情形討論:

若 $\ell_0 \geq k$, 則 $11m_0+11^k = 11^{\ell_0+1}n_0+11^k = 11^k(11^{\ell_0-k+1}+1) = F_1m_1 = 11^{\ell_1}n_1F_1$。由素因子分解唯一性定理, 知 $\ell_1=k$, 同樣可證 $\ell_2=\ell_3=\cdots=k$;

若 $\ell_0 < k$, 則 $11m_0+11^k = 11^{\ell_0+1}n_0+11^k = 11^{\ell_0+1}(n_0+11^{k-\ell_o+1}) = F_1m_1 = 11^{\ell_1}n_1F_1$。因 $11 \nmid n_1F_1$, 故 $\ell_1 \geq \ell_0+1$; 如仍有 $\ell_1 < k$, 則同樣可得 $\ell_2 \geq \ell_1+1$, 如此下去, 因 k 爲有限數, 故必有某 t, 使 $\ell_t \geq k$。

綜合上述兩種情形, 必有某 t, 使 $\ell_t = \ell_{t+1} = \cdots = k$, 於是

$$\begin{aligned} m_{t+1} &= (11m_t+11^k)/F_{t+1} \\ &= (11^{k+1}n_t+11^k)/F_{t+1} \\ &= 11^k(11n_t+1)/F_{t+1}, \\ m_{t+2} &= 11^k(11n_{t+1}+1)/F_{t+2}, \\ m_{t+3} &= 11^k(11n_{t+2}+1)/F_{t+3}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

把這運算過程中每個 m_i 除去因子 11^k, 正是從 n_t 起, 按猜想4的規定施行運算的過程, 由於假定猜想4成立, 它最後結果屬於 ψ_1 或 ψ_2; 由 ψ_1', ψ_2' 的定義可知, 猜想 $4'$ 成立。

由於這種等價性, 猜想 i' 可不再考慮; 於是有一般性的

猜想 5 ((p_sn+1) 問題): 設 $p_1=2$, $p_2=3, p_3, p_4, \ldots$ 爲連續的素數數列, $s \geq 2$ 爲給定的自然數, $m \in N$,

(1) 若 $p_1, p_2, \ldots, p_{s-1}$ 中有能整除 m 的, 則用它去除 m; (2) 若 $p_i \nmid m (i=1,\ldots,s-1)$, 則用 p_s 乘 m 再加1。

對上述運算結果再行上述運算, 最後結果必形成有限個循環 $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{\ell}$, 且 $\psi_1 = \{1\}$。

whc8: 證明或推翻上述猜想。如果猜想得到證明, 則對給定的 $s \in N$, $s \geq 2$, 試進一步確定 ℓ 及 $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{\ell}$。

上述猜想是建立在連續素數數列基礎上的, 問題在於, 對單個的素數或任意排列的素數列, 將會有什麼樣的結果? 對單個素數,1991年3月, 張煥明給出了一個猜想:

whc 設 m 爲自然數,

(1) 若 $m=3k$ $(k \in N)$, 則用3除 m;

(2) 若 $m=3k+1$ $(k \in N)$, 則用4乘 m 再減去1;

(3) 若 $m=3k-1$ ($k\in N$), 則用4乘 m 再加上1,

對上述運算結果再行上述運算, 經有限次後, 結果總爲1。

這結果正確嗎? 能否進行系列推廣?

1985年拉嘎利斯 (C. Lagarias) 著文「$3x+1$ 問題及其推廣」(The American Mathematical Monthly, Jan, 1985) 概述了其研究情況, 引進了“停止時間函數”等概念, 但很少實質性進展, 唯揭示其同遍歷理論之聯繫, 頗有啓發性, 這就要整數集上定義映射 $T:Z\to Z$:

$$T(\alpha)=\begin{cases}\frac{\alpha}{2}, & \alpha\equiv 0 (\operatorname{mod} 2)\\ \frac{3\alpha+1}{2}, & \alpha\equiv 1 (\operatorname{mod} 2)\end{cases}$$

然後再加以擴充。

4. 黑洞數問題

對任一個數字不全相同的三位數, 如207, 施行重排求差運算 T: 把數字重排, 用所得最大數減去最小數, 對結果再行同樣運算, 最終必得495, 即

$$207\xrightarrow{T:720\text{-}027}693\xrightarrow{T:963\text{-}369}594$$
$$\xrightarrow{T:954\text{-}459}495\xrightarrow{T:954\text{-}459}495\cdots$$

再換一個, 也是如此。

這可作出一般的證明: 取 $n=\overline{b_3b_2b_1}$, 不妨設 $b_3\ge b_2\ge b_1$, $b_3\ne b_1$, 則

$$\begin{aligned}T(n)&=\overline{b_3b_2b_1}-\overline{b_1b_2b_3}\\&=\overline{(b_3-b_1-1)9(10+b_1-b_3)}\end{aligned}$$

$T(n)$ 的10位數字是9, 首末位數字的和也是 $(b_3-b_1-1)+(10+b_1-b_3)=9$。因而, 只要對990,891,792,693,594 加以驗證就可以了, 結果爲:

$$990\xrightarrow{T}891\xrightarrow{T}792\xrightarrow{T}693\xrightarrow{T}594\xrightarrow{T}495$$

一般地, 設 N_m 表示由 m 個不屬相同的數字排成的自然數 (10進制數, 包括前面若干位爲0的數如0012$\cdots$7) 的集合 (事實上, N_m 爲不超過 m 位但數字不全相同的數的集合), $T(n)$ 表示將 n ($n\in N_m$) 的數字重排, 用所得最大數減去最小數的差 (稱爲重排求差), 我們來考查圖 (N_m,T) 的有趣性質。

如果存在不同的數 $n_1,n_2,\ldots,n_k\in N_m$, 使

$$\begin{aligned}&T(n_1)=n_2, T(n_2)=n_3,\ldots,\\&T(n_{k-1})=n_k, T(n_k)=n_1,\end{aligned}$$

則 $(n_1,\ldots,n_k)$ 形成圖 (N_m,T) 中一個圈, 也叫做一個黑洞, $n_1,n_2,\ldots,n_k$ 稱爲 N_m (或 m 位) 的 *一組黑洞數*, k 表明了黑洞的大小, 叫做 *週長*。

由定義知, $N_1=\phi$, 上已證明

定理1-6: 圖 (N_3,T) 中恰有一個黑洞 (495)。

有文獻說, 印度數學家們研究過所謂“陷阱數”, 且證明了四位陷阱數爲6174, 即

定理1-7: 圖 (N_4,T) 中恰有一個黑洞 (6174)。

(N_2,T) 如何? 容易證明。

定理1-8: 圖 (N_2,T) 中恰有一個週長 $k=5$ 的黑洞 (09,81,63,27,45)

在圖1-4中給出的是一個完全歸納的證明。

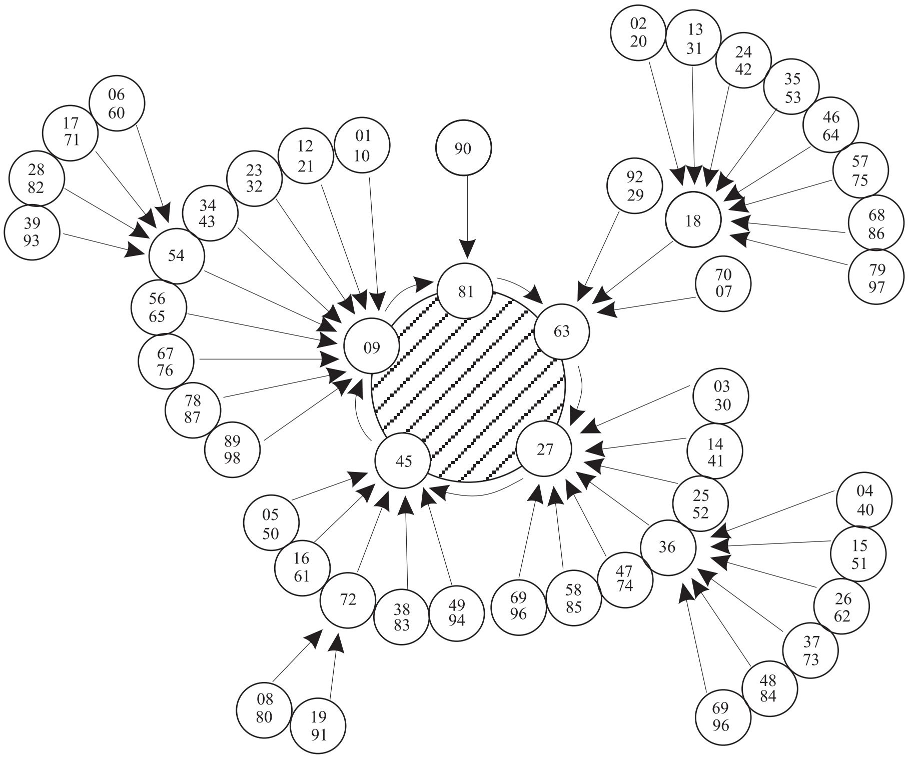

圖 $1-4$

仔細觀察這個圖, 不難發現 (N_2, T) 構造上的一些特點。

易見, 若 $n \in N_m$, 則 $T(n) \in N_m$; $n_1, n_2 \in N_m$, 但只有數字排列不同, 則 $T(n_1) = T(n_2)$; 由於 N_m 中元素個數是有限的 ($|N_m| = 10^m - 10$), 運算 T 卻可無限進行下去, 因此有如下

定理 1-9 (*黑洞存在定理*): 對任何 $m \in N$, $m \geq 2$, m 位黑洞數存在, 即圖 (N_m, T) 中必有黑洞。

黑洞乃是 N_m 中對 T 封閉的子集, 且具有“只入不出”的性質, 同宇宙黑洞有某些類似, 其名亦由此而得, 現已找到:

(N_s, T) 中的三個黑洞 (僅列其中一個數):

$$(63954, \ldots)(k = 4),$$
$$(62964, \ldots)(k = 4)$$
$$(53955, \ldots)(k = 2)$$

(N_6, T)中三個黑洞

$$(642654, \ldots)(k = 7),$$
$$(6317464, \ldots)(k = 7)$$
$$(549945, \ldots)(k = 7)$$

(N_7, T) 中的一個黑洞: $(8719722, \ldots)$ $(k = 8)$。

(N_8, T) 中的四個黑洞:

$$(63317664)(k = 1),$$
$$(97508421)(k = 1)$$

$$(83208762,\ldots)(k=3),$$
$$(86308632,\ldots)(k=7)$$

(N_9,T) 中的三個黑洞:

$$(864197532)(k=1),$$
$$(554999445)(k=1)$$
$$(865296432,\ldots)(k=14)$$

whc10: 對於自然數 $m\geq 5$, 設圖 (N_m,T) 中共 L_m 個黑洞, 則 $L_m=?$ 這些黑洞的週長各是多少? 怎樣具體地構造這些黑洞?

設 $n\in N_m$, 則 $T(n)$ 各位數字之和爲 9的倍數, 還知道它的一些數字結構特徵, 但尙不知:

whc11: $n\in N_m$ 是黑洞數的充分必要條件 (除了定義) 是甚麼?

若 $n\in N_m$ 不是黑洞數, 且 $T(n)=n_1$, $T(n_1)=n_2,\ldots,T(n_{d-1})=n_d$, 且 $n_1,\ldots,n_{d-1}$ 都不是黑洞數, n_d 是黑洞數, 則 $h_m(n)=d$ 叫做 黑程 (相當於數列 (1) 中非循環部分的項數); 若 n 是黑洞數, 約定 $h_m(n)=0$。

怎樣求 $h_m(n)$? 它有解析式嗎?

自1993年以來, 人們發現了黑洞數的不少衍生規律, 但對上述幾個問題的研究, 無實質性進展。

whc12: 設 $p\in N$, $p\geq 2$, 試在 p 進制下考慮相應的黑洞數問題。

爲了簡化 N_m 中黑洞的研究, 岳陽的李抗強提出一種方法即"特徵數法":

設 $n\in N_m$, 將其數字由大到小排列爲 $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ $(\alpha_1\geq\alpha_2\geq\cdots\geq\alpha_m)$, 命 $\beta_i=\alpha_i-\alpha_{m-i+1}$ $(i=2,3,\ldots,[\frac{m}{2}])$, 則稱 $\bar{n}=\beta_1\beta_2\cdots\beta_{[m/2]}0\cdots0$ 爲 n 的特徵數 (由 $\alpha_1\geq\cdots\geq\alpha_m$ 知 $\beta_1\geq\cdots\geq\beta_{[m/2]}$)。$\bar{n}(n\in N_m)$ 的集合記爲 $\overline{N}_m$, 則 $\overline{N}_m\subset N_m$, $\overline{N}_m$ 中共有 $C_{9+[m/2]}^{[m/2]}-1$ 個元素, 比 N_m 少得多, 特徵數有如下性質:

i) 若 $n\in N_m$, 則 $T(n)=T(\overline{n})$;

ii) 若 $n_1,n_2\in N_m$, 則 $T(n_1)=T(n_2)\Leftrightarrow\overline{n_1}=\overline{n_2}$。

對 $\overline{n}\in\overline{N_m}$, 我們定義 $\overline{T}(\overline{n})=\overline{T(n)}$, 則 $\overline{T}$ 稱爲 T 在 $\overline{N}_m$ 中的共軛運算, 那麼 $\overline{T}$ 在 $\overline{N}_m$ 中是封閉的, 因此它是 $\overline{N}_m$ 中的二元關係, 從而可構造圖 $(\overline{N}_m,\overline{T})$。可以證明:

定理 1-10: (N_m,T) 中的黑洞可與 $(\overline{N}_m,\overline{T})$ 中的黑洞建立一一對應關係, 且對應黑洞週長相等。

略證如下:

設 $(\overline{n}_1,\ldots,\overline{n}_k)$ 爲 $(\overline{N}_m,\overline{T})$ 中一個黑洞, 則

$$\overline{T}(\overline{n}_1)=\overline{n}_2,\overline{T}(\overline{n}_2)=\overline{n}_3,\ldots,\overline{T}(\overline{n}_k)=\overline{n}_1$$

於是

$$T(\overline{T}(\overline{n}_1))=T(\overline{n}_2),\ldots,T(\overline{T}(\overline{n}_k))=T(\overline{n}_1)$$

由性質 i) 及 $\overline{T}$ 的定義:

$$\begin{aligned}T(\overline{T}(\overline{n}))&=T(\overline{T}(n))\ (\text{定義})\\&=T(T(n))\ (\text{性質i})\\&=T(T(\overline{n}))\ (\text{性質i})\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&T(T(\overline{n}_1))=T(\overline{T}(\overline{T}(\overline{n}_1))=T(\overline{n}_2),\\&T(T(\overline{n}_2))=T(\overline{n}_3),\\&\qquad\cdots T(T(\overline{n}_k))=T(\overline{n}_1)\end{aligned}$$

這說明 $(T(\overline{n}_1),\ldots,T(\overline{n}_k))$ 爲 (N_m,T) 中一個黑洞, 即

$$F:(\overline{n}_1,\ldots,\overline{n}_k)\to(T(\overline{n}_1),\ldots,T(\overline{n}_k))$$

爲 $(\overline{N}_m,\overline{T})$ 中黑洞集合 $\overline{H}_m$ 到 (N_m,T) 中黑洞集合 H_m 的一個映射。由性質 i),ii) 知, $\overline{H}_m$ 中的不同黑洞映射到 H_m 中的不同黑洞, 即 F 爲單射。

設 $(n_1,\ldots,n_k)\in H_m$, 則 $T(n_1)=n_2,\ldots,T(n_k)=n_1$, 由性質 i), 有 $T(\overline{n}_1)=n_2,\ldots,T(\overline{n}_k)=n_1$。因此

$$\overline{T}(\overline{n}_1)=\overline{n}_2,\ldots,\overline{T}(\overline{n}_k)=\overline{n}_1$$

可見, $(\overline{n}_1,\ldots,\overline{n}_k)\in\overline{H}_m$, 說明 F 爲滿射, 從而 F 是 $\overline{H}_m$ 到 H_m 的一一映射, 由證明過程還可知, 對應黑洞週長相等。

上述證明過程還給出了 H_m中黑洞的構造方法, 它們也是特徵數的性質:

iii) 若 $(\overline{n}_1,\ldots,\overline{n}_k)\in\overline{H}_m$, 則 $(T(\overline{n}_1),\ldots,T(\overline{n}_k))\in H_m$;

iv) $T(\overline{n})$ 爲 (N_m,T) 中黑洞數 $\Longleftrightarrow\overline{n}$ 爲 $(\overline{N}_m,\overline{T})$ 中黑洞數;

v) 設 n_0 在 N_m 中黑程爲 $h(n_0)$, $\overline{n}_0$ 在 $\overline{N}_m$ 中黑程爲 $\overline{h}(\bar{n}_0)$, 如 $\overline{h}(\overline{n}_0)\neq 0$, 則 $h(n_0)=\overline{h}(\overline{n}_0)+1$; 如 $\overline{h}(\overline{n}_0)=0$, 則 $h(n_0)=0$ 或1。

事實上, 記 $\overline{h}(\overline{n}_0)=d\neq 0$, 則 $\overline{T}(\overline{n}_0)=\overline{n}_1,\ldots,\overline{T}(\overline{n}_{k-1})=\overline{n}_d$, 其中 $\overline{n}_0,\ldots,\overline{n}_{d-1}$ 均非黑洞數, 而 $\overline{n}_d$ 爲 $\overline{N}_m$ 中黑洞數, 仿定理1-10的證明過程可知, $T(n_0)=T(\overline{n}_0)$, $T(T(\overline{n}_0))=T(\overline{n}_1),\ldots,T(T(\overline{n}_{d-1}))=T(\overline{n}_d)$, 由性質 iv, 知 $T(\overline{n}_0),\ldots,T(\overline{n}_{d-1})$ 非 N_m 中黑洞數, 而 $T(\overline{n}_d)$ 爲 N_m 中黑洞數, 因此 $h(n_0)=d+1=\overline{h}(\overline{n}_0)+1$, 但當 $\overline{h}(\overline{n}_0)=0$ 時, $\overline{n}_0$ 雖爲 $\overline{N}_m$ 中黑洞數, $\overline{n}_0$ 卻可能是也可能不是 N_m 中黑洞數, 因此 $h(n_0)=0$ 或1。

5. 映射數列問題研究的意義與前景

由前面所舉的幾例不難看出, 映射數列 (1) 或與之相應的圖 (N',T) 的性質, 既與 n_0 (及相應的集合 N') 有關, 又同映射 T 有關, 於是就開闢了研究自然數的一個新的領域: 研究數在各種映射之下的性質, 數的動態性質。如果設

$$T(2)=3,T(3)=5,\ldots,T(p_{k-1})=p_k,\ldots$$

$p_k(k=1,2,\ldots)$ 爲連續素數, 那麼我們對素數的研究, 也可看作對一種映射數列的研究。

由於映射 T 的多對性, 以及相應的圖論表示 (N',T), 這就給映射數列的研究開闢了無限廣闊的前景。至於研究方法, 由於它既與數論、分析有關, 又同圖論聯繫, 乃是一種邊緣數學, 因此, 不僅可自如地運用已有的數論、圖論、函數論的成熟方法, 還可把它們融匯貫通, 創造獨等的方法。

但應注意的是: 雖然我們前面介紹的幾類都是週期數列, 可並不意味著只有週期映射數列才有研究價值。我們相信, 在大量非週期映射數列中, 也必然有大量值得研究的問題, 至於那些可能引向混沌映射數列 (把 N 擴充到複整數), 更會引人入勝, 還有二階的 $(T(n_{i-1},n_i)=n_{i+1})$ 映射數列呢?

文獻:

1. Collatz, About the motivation of the $(3n+1)$-problem, 譯文刊「曲阜師大學報」, 1986年3月。
2. 楊之, 張忠輔, 角谷猜想與黑洞數問題的圖論表示,「自然雜志」,1988年6月。
3. 楊之, 自然數在變換下的性質及其圖論表示中的研究課題,「中國初等數學研究文集」(楊世明主編), 湖南教育出版社,1992年6月。

—本文作者張忠輔任教於中國甘肅省蘭州鐵道學院, 楊世明任職於中國天津市寶坻縣教研室—