高斯EUCLID 環的除式個數

宋秉信

摘要: 本文對高斯 EUCLID 環中一對元 x, $y \neq 0$ 的 EUCLID 除式的個數進行討論, 並得出其定理。

關鍵字: 歐氏環、整點、格點。

一、預備知識

(1) 若域 F 上的多項式環 $F[x]$ 是一個歐氏環, 那麼對於 $F[x]$ 中的任意兩個多項式 $f(x), g(x) \neq 0$, 在 $F[x]$ 中存在唯一的 $q(x), v(x)$, 使

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x), v(x) = 0;$$

或

$$\deg(g(x)) > \deg(v(x))。$$

就是說, 這種表達式是唯一的。

(2) 我們知道, 整數環是歐氏環中的一種, 而其中這種表達形式一般不會超過兩個。

(3) 高斯 EUCLID 環是整數環 $G = \{a+bi,\ a, b \in \mathbf{Z}\}$ 及其 $N(a+bi) = a^2+b^2$ 爲 EUCLID 函數 EUCLID 環。

問題是高斯 EUCLID 環的這種表達形式有多少種, 即除式的個數有多少?

二、除式個數定理

我們把一對元 x,$y \neq 0$ 的除式個數記爲 $P(x, y)$, 把以 $(x_0$,$y_0)$ 爲中心, 以 1 爲半徑的圓內整點個數記爲 $Q(x_0$,$y_0)$。

定理 1: 設 $(G$,$N)$ 是高斯 EUCLID 環,$\forall\ x = a + bi, y = c + di \in G = \{a + bi, a$,$b \in \mathbf{Z}\}$,$y \neq 0$, 則 $P(x$,$y) = Q(x_0$,$y_0)$。

其中

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} a & -b \\ d & c \end{vmatrix}}{N(y)}, \quad y_0 = -\frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{N(y)}$$

證明: $\forall x = a + bi,\ y = c + di \in G$。

根據歐氏環的定義, 存在 $\rho = e + fi$, $\lambda = g + hi \in G$, 使得 $x = ye + \lambda$, 此外 $\lambda = 0$ 或 $N(\lambda) < N(y)$。

$\because x - \lambda = ye$, 而

$$x–\lambda=(a+bi)–(g+hi)=(a–g)+(b–h)i$$

$ye=(c+di)(e+fi)=(ce-df)+(cf+de)i$

$\therefore a-g=ce-df, b-h=cf+de$。

現分別討論:

(1) 若存在 ρ, 使 $x=ye$, 則 $p(x,y)=1$。否則, 將還有 $x=ye_1+\lambda_1,\lambda_1=0$ 或 $N(\lambda_1)<N(y)$, 則 $y(\rho-\rho_1)=\lambda_1$。如果 $\lambda_1=0$, 但 $y\neq 0$, 那麼只有 $\rho=\rho_1$, 這時除式 $x=ye+\lambda$, 與 $x=y\rho$ 是一致的; 如果 $\lambda_1\neq 0$, 由於 $y\neq 0$, 所以 $\rho-\rho_1\neq 0$, 從而有 $N(\lambda_1)\geq N(y)$。這與 $N(\lambda_1)<N(y)$ 相矛盾。因此, 在這種情況下, $\lambda=0$, 即 $g=h=0$。從而有

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}。$$

$$\because N(y)=N(c+di)=c^2+d^2,$$

$$\therefore \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}=\frac{1}{N(y)}\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{N(y)}\begin{pmatrix} ac+bd \\ cb-ad \end{pmatrix},$$

由於 $e,f\in\mathbf{Z}$, 所以, 當 $N(y)$ 整除 $\begin{vmatrix} a & -b \\ c & d \end{vmatrix}$ 與 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 時, x 與 y 有且僅有一個除式, 即 $P(x,y)=1$。

(2) 若 x 與 y 有兩個或兩個以上的除式, 此時 $\lambda=0$, 因爲

$$\begin{cases} g=a-ce+df \\ h=b-cf-ae \\ c^2+d^2>g^2+h^2 \end{cases}$$

其中 e,f,g,h 均爲未知整數。

顯然, 它的一組整解 (e,f) 決定相應的整解 (g,h), 而 (e,f) 的整解數恰是 x 與 y 的除式個數。

將 $g=a-ce+df$, $h=b-cf-de$ 代入不等式 $c^2+d^2>g^2+h^2$, 化簡整理後, 便得

$$(c^2+d^2)\,(e^2+f^2)-2e(ac+bd)+2(ad-bc)f+(a^2+b^2)-(c^2+d^2)<0。$$

即

$$(c^2+d^2)\,[(e^2+f^2)-\frac{2e(ac+bd)}{c^2+d^2}+\frac{2f(ad-bc)}{c^2+d^2}]+(a^2+b^2)-(c^2+d^2)<0,$$

即

$$N(y)\quad\Big[(e^2+f^2)-\frac{2e\begin{vmatrix} a & -b \\ d & c \end{vmatrix}}{N(y)}+\frac{2f\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{N(y)}\Big]+N(x)-N(y)<0$$

經配方, 得

$$\Big[e-\frac{\begin{vmatrix} a & -b \\ d & c \end{vmatrix}}{N(y)}\Big]^2+\Big[f+\frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{N(y)}\Big]^2-\frac{\begin{vmatrix} a & -b \\ d & c \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}^2-N(x)N(y)+N^2(y)}{N^2(y)}<0。$$

由於

$$\begin{vmatrix} a & -b \\ d & c \end{vmatrix}^2$$

$$= (ac+bd)^2 = a^2c^2+b^2d^2+2abcd$$
$$= (a^2+b^2)(c^2+d^2)-a^2d^2-b^2c^2+2abcd$$
$$= N(x)N(y)-(ad-bc)^2$$
$$= N(x)N(y) - \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}^2$$

代入上面不等式, 得

$$\Big[e-\frac{\begin{vmatrix} a & -b \\ d & c \end{vmatrix}}{N(y)}\Big]^2+\Big[f+\frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{N(y)}\Big]^2-1<0$$

$$\text{令}x_0 = \frac{\begin{vmatrix} a & -b \\ d & c \end{vmatrix}}{N(y)}, \quad y_0 = \frac{-\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{N(y)}\text{。}$$

$$\therefore (e-x_0)^2+(f-y_0)^2<1\text{。}$$

這就是說, x 除以 y 的商爲 $e+fi$, 則 (e,f) 在以 (x_o,y_o) 爲中心的單位圓內, 從而有

$$P(x,y) \le Q(x_o,y_o)\text{。}$$

反之, 若 (e,f) 是以 (x_o,y_o) 爲中心的單位圓內的任意整點, 不妨令 $g+hi=(a+bi)-(c+di)(e+fi)$, 由於

$$N(g+hi)$$
$$= N((a-ce+df)+(b-cf-de)i)$$
$$= (a-ce+df)^2+(b-de-cf)^2$$
$$= a^2+c^2e^2+d^2f^2-2ace+2adf-2cdef+b^2$$
$$+d^2e^2+c^2f^2$$

$$-2bde-2bcf+2cdef$$
$$= (a^2+b^2)+(c^2+d^2)(e^2+f^2)$$
$$-2(ac+bd)e+2(ad-bc)f$$

$$\text{而}\Big[e-\frac{\begin{vmatrix} a & -b \\ d & c \end{vmatrix}}{N(y)}\Big]^2+\Big[f+\frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{N(y)}\Big]^2-1<0$$

$$N(x)N(y) = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$$
$$= a^2c^2+b^2c^2+a^2d^2+b^2d^2$$
$$= (ac+bd)^2+(ad-bc)^2$$
$$= \begin{vmatrix} a & -b \\ d & c \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}^2$$

故有

$$\frac{N(\lambda)}{N(y)} = \frac{N(x)}{N(y)}+e^2+f^2$$
$$-\frac{2(ac+bd)e-2(ad-bc)f}{N(y)}$$
$$= \frac{N(x)}{N(y)}+\Big[e-\frac{\begin{vmatrix} a & -b \\ d & c \end{vmatrix}}{N(y)}\Big]^2$$
$$+\Big[f+\frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{N(y)}\Big]^2$$
$$-\frac{\begin{vmatrix} a & -b \\ d & c \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}^2}{N^2(y)}$$
$$= \frac{N(x)}{N(y)}+(e-x_0)^2+(f-y_0)^2$$
$$-\frac{N(x)N(y)}{N^2(y)}$$
$$= \frac{N(x)}{N(y)}+(e-x_0)^2+(f-y_0)^2$$
$$-\frac{N(x)}{N(y)}$$
$$= (e-x_0)^2+(f-y_0)^2<1\text{。}$$

所以有 $N(\lambda) < N(y)$。這就說明凡是以 (x_0,y_0) 爲中心的單位圓內的整點 (e,f) 相應的 $e+fi$ 是 x 除以 y 的一個商, 故有 $P(x,y) \ge Q(x_0,y_0)$。

綜上所述, 我們便證明了 $P(x,y) = Q(x_0,y_0)$。就是說, 高斯 EUCLID 環中一對

元 $x, y \neq 0$ 的 EUCLID 除式的個數等於以 (x_0, y_0) 爲中心的單位圓內的整點的個數。

定理2: 設 (G, N) 是高斯 EUCLID 環,

$$\forall x, y \in G, y \neq 0, P(x, y) \leq 4。$$

就是說, 高斯 EUCLID 環除式的個數不超過4個。

由於在單位圓內格點至多只有4個, 所以定理顯然是成立的。

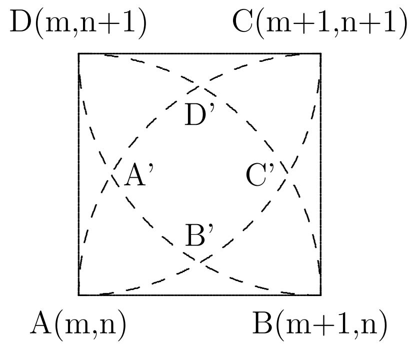
對於高斯 EUCLID 環中任意一對元 $x, y \in G,\ y \neq 0$, 有1-4個除式的情形分析如下:

1.$(x_0, y_0) \in I_1 = \{$ 格點正方形4個頂點 $\}$, $P(x, y) = 1$; 如圖所示。

2.$(x_0, y_0) \in I_2 = \{$ 曲線三角形 $A'AD$, $B'AB$,$C'BC$,$D'CD$ 上或內, 除去頂點 A,B,C,D 的點$\}$, $P(x, y) = 2$;

3.$(x_0, y_0) \in I_3 = \{$ 曲邊三角形 $AA'B', BB'C', CC'D', DD'A'$ 之內點及四條不包括端點在內的弧段 $\overset{\frown}{A'B'}$, $\overset{\frown}{B'C'}$,$\overset{\frown}{C'D'}$,$\overset{\frown}{D'A'}$ 上的點 $\}$,$P(x, y) = 3$;

4.$(x_0, y_0) \in I_4 = \{$ 曲線四邊形 $A'B'C'D'$ 的內點 $\}$,$P(x, y) = 4$。



參考資料

1. 吳品三著,「近世代數」北京高等教育出版社, 1979年12月。
2. 華羅庚著,「數論導引」北京科學出版社,1957年7月。

—本文作者任教於中國湖南省湘潭教育學院—