別瞧不起它, 那個中學教材中的公式

柳柏濂

一. 一個貌不驚人的式子

我的朋友蕭文強兄在「數播」(第二十卷第三期) 中發了一篇大作, 向讀者問一句"你懂得數嗎?"然後又謙遜地回答,"我可不懂"。文中, 蕭兄在"一勞永逸的數數"一節, 介紹了一個式子:

$$1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x}, \qquad (*)$$

用它, 可以解決一些複雜的計數問題 (如 Fibonacci 數列的通項公式)。該文囿於講座對象, 未涉及高等數學"禁區"。即便如此, 掩卷之餘, 冒班門弄斧之險, 仍想說幾句話, 但願不是畫蛇添足之作。

就 $(*)$ 式而言, 是一個中學生也熟悉的式子。在中學教材"數列和極限"部分, 當我們考慮等比數列前 n 項和時,

$$1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x},$$

$(*)$ 式的左邊, 實質是

$$\lim_{n\to\infty}(1+x+x^2+\cdots+x^n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{n+1}}{1-x} \qquad (1)$$

當然, (1) 不能任何情況下都存在。於是, 歸結為一個求極限問題:

當 $|x|<1$ 時, 顯然, 由 (1) 得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{n+1}}{1-x}=\frac{1}{1-x}$$

於是, 我們說, 當 $|x|<1$ 時, $1+x+x^2+\cdots$ 收斂於 $\frac{1}{1-x}$。

$(*)$ 式令數學家高興: 它實現了由無限向有限的轉化, 使對無限問題的研究不再那樣縹渺。$(*)$ 式又令中學生迷惘: 一系列無窮無盡的量相加, 竟然能夠等於一個確定的數?!

如果你一時之間也覺得不可思議的話, 那麼, 不難理解, 為什麼八十多年前, 當德國數學家康托 (cantor) 先生開始研究無限時, 竟被那麼多人 (甚至權威學者) 譏笑為"瘋子"。

二. Be careful! 歐拉 (Euler) 也曾出錯。

從有限到無限, 我們研究的對象已經不能一個個地窮舉出來。要把問題看得清楚, 只能靠嚴格的邏輯推理。這恰恰是對一個人數學才能的最大考驗。從出生那天開始, 生活在眼睛所及的"有限"空間中, 接觸著十、百、千的有限數量, 要一下子想像和推斷那個無限的空間形式和數量關係, 就好像騎了幾十年

自行車突然換開摩托車一樣, 一不小心, 容易出事。

可不是嗎? 在自然數集 $\mathbb{N}$ 中, 當我們建立了一一對應 $k \leftrightarrow 2k (k \in \mathbb{N})$, 偶數和自然數一樣多, 也就是部分竟然與全體相等。兩條點數一樣多的線段, 竟然長度不一樣。(見圖1 的 AB 與 CD), 這些都是我們用"世俗"眼光, 所不能理解而又完全正確的結論。

現在, 讓我們回到所討論的 $(*)$ 式中。十八世紀歐州的大數學家歐拉, 就犯過下列的錯誤。

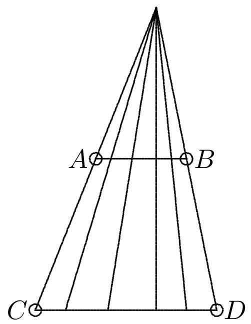

圖 1

運用 $(*)$ 式

$$n+n^2+n^3+\cdots=\frac{1}{1-n}-1=\frac{n}{1-n} \tag{2}$$

又

$$1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{n}}=\frac{n}{n-1} \tag{3}$$

(2),(3) 兩式相加, 得

$$\cdots\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}+1+n+n^2+n^3+\cdots=\frac{n}{1-n}+\frac{n}{n-1}=0 \tag{4}$$

如果說, (4) 式的錯誤還不明顯的話, 那麼, 在 $(*)$ 式中, 若令 $x=2$, 我們將得到一個荒謬得更顯然的式子:

$$1+2+4+8+16+\cdots=-1$$

這些謬誤的產生, 在於沒有弄淸 $1+x+x^2+\cdots$, 僅當 $|x|<1$ 的範圍內收斂。也就是, 要在 $(*)$ 中的 x 代入數, 使等式成立, 就必須代入 $|x|<1$ 範圍內的數。

從有限到無限, 處處應該 be careful! (小心)。

三."換一個活法", 如何?

討論 $(*)$ 式的收斂和發散, 是函數論專家的事情。他們專注於連續的數學。可是, 事情就是這麼有趣: 如果我們把 $(*)$ 式用另一個觀點來處理,"換一個活法", 它竟可以處理離散數學中的計數問題。

還是從 $(*)$ 式談起。把 $(*)$ 兩邊平方, 即

$$(1+x+x^2+\cdots)^2=\frac{1}{(1-x)^2} \tag{5}$$

(5) 式的左邊, 用乘法可得

$$\begin{aligned}&(1+x+x^2+\cdots)^2\\ =&1+2x+3x^2+4x^3\\ &+\cdots+(n+1)x^n+\cdots\end{aligned} \tag{6}$$

(5) 式的右邊, 用長除法, 得

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^2}&=\frac{1}{1-2x+x^2}\\ &=1+2x+3x^2+4x^3\\ &\quad+\cdots+(n+1)x^2\cdots,\end{aligned} \tag{7}$$

(6) 和 (7) 相應的 x^k 項的係數相等。一般來說, (7) 的推導比 (6) 容易, 那麼我們便可通過 (5)、(7) 式, 直接得到 (6) 式, 解決了一個無窮級數的平方問題。

這個例子啓示我們: 如果不考慮 x 的值, 僅把 $(*)$ 式作爲一種形式的冪級數, 那麼, 利用它, 把無限 (級數) 變成有限 (函數), 把無限 (級數) 的運算轉化爲有限 (函數) 的運算 ((5) 式), 再把運算結果回復到無限 (如 (7) 展成級數)。注意到前後兩個級數的 x^k 項係數相等, 於是, 便幫助我們解決無窮級數的運算問題。下面, 我們還可以看到, 進而解決一些計數問題。

一般, 一個無窮數列 $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ 這是一個離散的研究對象。如果我們用 x^i 的指數 "記錄" a_i 的下標, 那麼, 可以把數列寫成下列形式冪級數

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

進一步, 若上述形式冪級數能等於一個函數 (哪怕它在 x 的某一範圍內收斂),

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots=f(x),$$

則 $f(x)$ 稱爲數列 $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ 的生成函數。(或準確地說: 常生成函數)。例如, 在 $(*)$ 式中, $\frac{1}{1-x}$ 是數列 $(1, 1, 1, \ldots)$ 的生成函數。

把離散和無窮的數列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ 載上 $f(x)$ 的這隻船上。下面我們將看到, 怎樣依靠 $f(x)$ 這隻船的動力, 把 $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ 駛到彼岸。

四. 再走一步, 便能小試牛刀

不要小覷了 $(*)$ 的那個中學教材中的式子, 再走一步, 就能幹大事。

如上所述, $(1-x)^{-1}=1+x+x^2+\cdots$。

$$\begin{aligned}(1-x)^{-2}&=1+2x+3x^2+4x^3\\&\quad+\cdots+(n+1)x^n+\cdots\end{aligned}$$

再做下去,

$$\begin{aligned}&(1-x)^{-3}\\=&(1+x+x^2+\cdots)\\&\cdot(1+x+x^2+\cdots)\\&\cdot(1+x+x^2+\cdots)\\=&1+3x+6x^2+10x^3+\cdots\\&+\frac{1}{2}(n+2)(n+1)x^n+\cdots\\=&\binom{2}{0}+\binom{3}{1}x+\binom{4}{2}x^2\\&+\binom{5}{3}x^3+\cdots+\binom{n+2}{n}x^n+\cdots\end{aligned}$$

自然, 可以推測

$$\begin{aligned}&(1-x)^{-1}\\=&\binom{r-1}{0}+\binom{r}{1}x+\binom{r+1}{2}x^2+\cdots\\&+\binom{r+n-1}{n}x^n+\cdots,\end{aligned}$$

用求和記號 $\sum$, 可記爲

$$(1-x)^{-r}=\sum_{n=1}^{\infty}\binom{r+n-1}{n}x^n \qquad (**)$$

要證明 $(**)$ 式, 也不是非要高等數學不可, 我們採用數學歸納法解決它。

證明: $r=1$, 公式 $(**)$ 即爲 $(*)$, 成立。(直接用長除法亦可證明)。

設 $(**)$ 對 r 成立, 往證對 $r+1$ 亦成立。

$$\begin{aligned}
&(1-x)^{-(r+1)}\\
&=(1-x)^{-r}\cdot(1-x)^{-1}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\binom{r+n-1}{n}x^n\cdot(1-x)^{-1}\\
&=[\binom{r-1}{0}+\binom{r}{1}x+\binom{r+1}{2}x^2+\cdots\\
&\quad+\binom{r+n-1}{n}x^n+\cdots]\cdot\\
&\quad(1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots)\\
&=\binom{r-1}{0}+[\binom{r-1}{0}+\binom{r}{1}]x\\
&\quad+[\binom{r-1}{0}+\binom{r}{1}+\binom{r+2}{2}]x^2+\cdots\\
&\quad+[\binom{r-1}{0}+\binom{r}{1}+\binom{r+1}{2}\\
&\quad+\cdots+\binom{r+n+1}{n}]x^n+\cdots\\
&=\binom{r}{0}+\binom{r+1}{1}x+\binom{r+2}{2}x^2\\
&\quad+\cdots+\binom{r+n}{n}x^n+\cdots\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\binom{(r+1)+n-1}{n}x^n.
\end{aligned}$$

上述的化簡, 只是重複應用組合恆等式

$$\binom{m}{k-1}+\binom{m}{k}=\binom{m+1}{k}$$

的結果。於是, 便證得 $(**)$ 式。

有了 $(**)$ 式 ($(*)$ 是它的特例), 我們可以對一些組合問題小試牛刀了。

問題1: 求不定方程

$$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_r=n \tag{8}$$

的非負整數解 $(x_1,x_2,\ldots,x_r)$ 的個數。

解: 每個不定元 x_i 的取值可能是 $0,1,2,3,\ldots,$ $i=1,2,\ldots r$, 我們用冪指數表之以

$$1+x+x^2+x^3+\cdots+\cdots=(1-x)^{-1}$$

於是, 問題歸結爲求 $(1+x+x^2+x^3+\cdots)^r$ 的展開式中 x^n 的係數。

由$(**)$ 式, $(1+x+x^2+x^3+\cdots)^r=(1-x)^{-r}=\sum_{n=1}^{\infty}\binom{r+n-1}{n}x^n$, x^n 的係數是 $\binom{r+n-1}{n}$, 即 (8) 的非負整數解個數是

$$\binom{r+n-1}{n}。\tag{9}$$

附註: 如果把問題1的“非負整數解”條件改爲“正整數解”條件, 則只須對方程 (8) 作一個變換 $x_i=y_i+1$, $r=1,2,\ldots,r$。問題歸結爲求 $y_1+y_2+\cdots+y_r=n-r$ 的非負整數解 $(y_1,y_2,\ldots,y_r)$ 的個數, 由問題1結論, 得

$$\begin{aligned}\binom{r+(n-r)-1}{n-r}&=\binom{n-1}{n-r}\\&=\binom{n-1}{r-1}\end{aligned}\tag{10}$$

問題2: 求方程 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=21$ 的所有奇數解的個數。

解: 只需求 $(x+x^3+x^5+\cdots)^5$ 展開式中的項 x^{21} 的係數。

因 $x^5(1+x^2+x^4+\cdots)^5=x^5(1-x)^{-5}$, 即求 $(1-x^2)^{-5}$ 的 x^{16} 項係數, 也即求 $(x^2)^8$ 係數。由結果 (9), 得 $\binom{5+8-1}{8}=495$。

問題3: 求方程 $x_1+x_2+x_3=14$ 不大於8的非負整數解的個數。

解: 只需求 $(1+x+x^2+\cdots+x^8)^3$ 的展式中 x^{14} 的係數。但 $(1+x+x^2+\cdots+x^8)^3=(1-x^9)^3(1-x)^{-3}$。$(1-x^9)^3$ 的展式中 x 的次數不大於 14 的項僅有 1 和 $-3x^9$, 於是只需考慮 $(1-x)^{-3}$ 中 x^{14} 與 x^5 的係數, 它們分別是 $\binom{3+14-1}{14}$ 和 $\binom{3+5-1}{5}$。因此, 所求的解的個數是

$$\begin{aligned}&\binom{3+14-1}{14}-3\binom{3+5-1}{5}\\ =&\binom{16}{2}-3\binom{7}{2}=57\end{aligned}$$

問題4: 求方程 $x_1+2x_2=n(n\geq 0)$ 的非負整數解個數。

解: 把 $\frac{1}{(1-x)}\cdot\frac{1}{(1-x^2)}$ 分解爲部分分式, 即

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}=\frac{1}{(1-x)^2(1+x)}\\ =&\frac{1}{2(1-x)^2}+\frac{1}{4(1-x)}+\frac{1}{4(1+x)}\\ =&\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}x^n\\ &+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n\\ =&\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{n+1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{(-1)^n}{4})x^n。\end{aligned}$$

於是, 所求的非負整數解個數

$$=\begin{cases}\frac{n+1}{2}, & n\text{爲奇數}\\ \frac{n}{2}+1, & n\text{爲偶數}\end{cases}$$

對一般的 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx^n=n$ 的非負整數解個數, 其生成函數應是

$$\frac{1}{(1-t^{a_1})(1-t^{a_2})\cdots(1-t^{a_n})},$$

但由於分解部分分式遇到的困難 (見問題4), 求解將是一個極爲困難的問題。哈代 (Hardy) 曾提供下列特殊不定方程

$$x+2y+3z=n \qquad (11)$$

的非負整數解個數的簡潔表達式 $\langle\frac{1}{12}(n+3)^2\rangle$, 其中 $\langle\alpha\rangle$ 表正實數 α 的最接近整數 (其中 2α並非一整數), 即 $|\langle\alpha\rangle-\alpha|<\frac{1}{2}$。

哈代的解法是: 令 $w=e^{2\pi i/3}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$, $(i=\sqrt{-1})$ 則(11) 的生成函數

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)}\\ =&\frac{1}{(1-t)^3(1+t)(1-wt)(1-w^2t)}\\ =&\frac{1}{6(1-t)^3}+\frac{1}{4(1-t)^2}+\frac{1}{72(1-t)}\\ &+\frac{1}{8(1+t)}+\frac{1}{9(1-wt)}+\frac{1}{9(1-w^2t)}\\ =&\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{(n+3)^2}{12}-\frac{7}{72}\\ &+\frac{(-1)^n}{8}+\frac{2}{9}\cos\frac{2n\pi}{3})t^n\end{aligned}$$

因 $|-\frac{7}{72}+\frac{(-1)^n}{8}+\frac{2}{9}\cos\frac{2n\pi}{3}|\leq\frac{32}{72}<\frac{1}{2}$, 且 (11) 的解組個數必爲整數, 故此個數是 $\langle(n+3)^2/12\rangle$。

請讀者不要以爲, 我們僅僅在討論一次不定方程的非負整數解的個數問題。要知道, 很多組合計數問題, 都可以把上述不定方程作爲它的數學模型。請看

問題5 (分配問題): 把12個相同的球投入5個不同的箱子內, 有多少種不同的放法?

這實質是求$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=12$ 的非負整數解個數。

問題6 (齊次項問題): 5個不定元組成6次齊式, 最多有多少種不同類項?

設 5 個不定元的 6 次齊式一般式是 $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}x_4^{\alpha_4}x_5^{\alpha_5}$, 這即求 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5=6$ 的非負解個數。

問題9 (擲骰問題): 擲 n 顆骰子, 有多少種不同的結果?

即求 $x_1+x_2+\cdots+x_6=n$ 的非負整數解個數。

對於求 $x_1+x_2+\cdots+x_r=n$ 的非負整數解個數的問題, 我們還可以這樣理解: 從 r 類不同的物中取出 n 個, 每類物允許取重複數, 有多少種不同的取法。因此, $\binom{r+n-1}{n}$ 就是從 r 個物中可重複地取 n 個的組合數。

此外, 這類問題的另一個組合意義是: 把一個整數 n 分拆爲 r 部分, 其中可以包括 0, 這稱爲 n 的 r 有序分拆, 其分拆個數便是 $\binom{n+r-1}{n}$。

給出幾個問題, 似乎都是小打小鬧, 然而, 它卻揭示了生成函數方法的精髓。運用這一技巧, 我們試試做一點“大事”。

五. 把那一類遞歸式一攬子解出來

借用電視螢幕經常出現的字句, 說一聲: “下列內容可能引起部分觀衆不安”, 可是, 認眞咀嚼一下, 也許你會覺得: 味道好極了。

試考察關於 u_n 的常係數線性齊次遞歸式

$$\begin{cases} u_{n+p}=\sum_{i+0}^{p-1}a_{p-i-1}u_{n+i} \\ u_i=c_i,\ i=0,1,\ldots,p-1 \end{cases} \tag{12}$$

這裡 $a_i,c_i,i=0,1,\ldots,p-1$ 是常數。

求 (12) 的一般解 u_n, 是計數理論中的一個重要問題。對於 (12) 式的特殊情況, 可以用特徵方程法。但對一般情形, 由於要遇到高次特徵方程, 此法便不敷應用。在 (12) 式中, 若令 $p=2$, $a_0=a_1=1$, $c_0=c_1=1$, 則其解便是 Fibonacci 數的通項公式, 在蕭文 (「數播」二十卷三期) 中敍述了求解的生成函數方法。現在, 我們一般地, 給出 (12) 的一個解。

設序列 $u_0,u_1,\ldots,u_n$ 的生成函數

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_nx^n \tag{13}$$

則由 (12),

$$(1-\sum_{i=1}^{p}a_{i-1}x^i)u(x)=\sum_{j=0}^{p-1}b_jx^j。 \tag{14}$$

這裡

$$b_j=c_j-\sum_{i=0}^{j-1}a_{j-i-1}c_i,$$
$$\text{約定當}i<0\text{時}, a_i=0, \tag{15}$$

由 (14) 得

$$u(x)=(\sum_{j=0}^{p-1}b_jx^j)(1-\sum_{i=0}^{j-1}a_{i-1}x^i)^{-1}, \tag{16}$$

依 $(*)$ 式

$$(1-\sum_{i=1}^{p}a_{i-1}x^i)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{i=1}^{p}a_{i-1}x^i)^n \tag{17}$$

由多項式定理, 展開

$$(\sum_{i=1}^{p}a_{i-1}x^i)^n$$

$$= \sum_{\sum_{i=1}^{p} ik_{i-1}=n} \binom{\sum_{i=0}^{p-1} k_i}{k_0, k_1, \ldots, k_{p-1}} \cdot a_0^{k_0} a_1^{k_1} \cdots a_{p-1}^{k_{p-1}} x^n, \tag{18}$$

爲方便敍述, 令 $\sum_{i=0}^{p-1} k_i = k$,

$$f^{(n)} = \binom{k}{k_0, k_1, \ldots, k_{p-1}} a_0^{k_0} a_1^{k_1} \cdots a_{p-1}^{k_{p-1}}$$

則由 (18)

$$(\sum_{i=1}^{p} a_{i-1}x^i)^n = \sum_{\sum ik_{i-1}=n} f^{(n)} x^n \tag{19}$$

把 (19) 代入 (17) 得

$$(1-\sum_{i=1}^{p} a_{i-1}x^i)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{\sum ik_{i-1}=n} f^{(n)}) x^n \tag{20}$$

記

$$F^{(n)} = \sum_{\sum ik_{i-1}=n} f^{(n)} \tag{21}$$

(20) 簡記爲

$$(1-\sum_{i=1}^{p} a_{i-1}x^i)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)} x^n,$$

代入(16), 便得

$$u_{(x)} = (\sum_{j=0}^{p-1} b_j x^j)(\sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)} x^n),$$

$$u_{(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{j=0}^{p-1} b_j F^{(n-j)}) x^n$$

與 (13) 對比, 便得

$$u_n = \sum_{j=0}^{p-1} b_j F^{(n-j)}$$

以 (15) 代入, 得

$$u_n = \sum_{j=0}^{p-1} (c_j - \sum_{i=0}^{j-1} a_{j-i-1} c_i) F^{(n-j)}$$

$$= \sum_{j=0}^{p-1} F^{(n-j)} c_j - \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{j-1} a_{j-i-1} F^{(n-j)} c_i$$

$$= \sum_{j=0}^{p-1} F^{(n-j)} c_j - \sum_{i=0}^{p-2} \sum_{j=i+1}^{p-1} a_{j-i-1} F^{(n-j)} c_i$$

故得

$$u_n = \sum_{i=0}^{p-2} [F^{(n-i)} - \sum_{j=i+1}^{p-1} a_{j-i-1} F^{(n-j)}] c_i + F^{(n-p+1)} c_{p-1}, \tag{22}$$

(22) 便是 (12) 的一般解。

試考察 $p = 2$, $a_0 = a_1 = 1$, 且令 $c_0 = c_1 = 1$, 則 (12) 變爲

$$\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \\ u_0 = u_1 = 1 \end{cases}$$

易知, 這是 Fibonacci 數列的遞歸定義。這時 (21) 式爲

$$F^{(n)} = \sum_{k_0+2k_1=n} \binom{k_1+k_2}{k_2} = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n-k}{k}。$$

又因 $\sum_{j=0}^{i} b_j x^j = b_0 + b_1 x = 1$ (由 (15) 得 $b_0 = 1$, $b_1 = 0$) 故得

$$u_n = F^{(n)} = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n-k}{k}。$$

六. 大數學家做出的結果, 我們也來試試

十九世紀, 克希霍夫 (Kirchhoff) 在研究電路網路, 凱萊 (Cayley) 在計算有機化學的同分異構體個數時, 引進了樹圖—連通而不含圈的無向圖。對於有 n 個標號點的樹

(簡稱爲 n 階標號樹) 的個數, 已有 Cayley 公式 n^{n-2}。如果把一棵樹的某一點稱爲根, 則這棵樹稱爲有根樹。因爲每個點都有可能是根, 根據 Cayley 公式, n 階標號有根樹的個數自然是 $n\cdot n^{n-2}=n^{n-1}$。關於 Cayley 公式的不同證明, 已經吸引了不少數學家的興趣, 並且開發了很多精巧的方法。讀者可以參看拙作「樹的計數-從樹到超樹」(「數播」第十九卷四期)。

如果把 n 個標號點的標號去掉, 那麼, 樹的計數要複雜得多。就拿有根樹來看, $n=4$ 時, n 階標號有根樹的個數是 $4^{4-1}=64$個, 而 n 階有根樹的個數僅有4個, (如圖1), 後者的計數要兼顧判斷同構的樹。

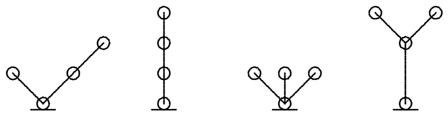

圖2: 4階有根樹

凱萊研究了 n 階有根樹的個數 T_n, 他用生成函數把序列 $\{T_n\}$ 表爲 $T(x)=\sum_{n=1}^{\infty}T_nx^n$, 得出了下列結果

$$T(x)=x\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{-T_n} \tag{23}$$

運用 (23), 加上一些代數變換技巧, 我們可以算得 T_n, 茲把電腦算得的某些值羅列如下:

T_n 值表 $n\le 12$

n	1	2	3	4	5	6	7	8
T_n	1	1	2	4	9	20	48	115

n	9	10	11	12
T_n	286	719	1842	4766

當年, 凱萊推導 (23) 式時, 用了較複雜的方法。注意到 (23) 式的樣子, 並不像標號樹的計數式那樣漂亮。因此, 數學家對尋求它的簡明的證法信心和與趣都不大。在計數理論中, (23) 的推導基本上還是凱萊的思路。現在, 我們著手嘗試用一一對應的思想和本文論述的 $(**)$ 式, 去給出一個新而簡明的證法。

我們可以如下考察 $(n+1)$ 階有根樹: 一個 $(n+1)$ 階有根樹去掉根點, 並令原來與根點相鄰的各點爲根點, 就得到若干支有根樹 (如圖3所示意)

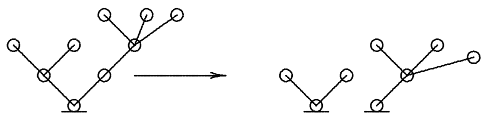

圖 3

這些有根樹所成的集合具有如下特點:

(1) 它們按階數有可能分爲 n 類, 階數爲 i 的類, 我們稱之爲第 i 類。$i=1,2,\ldots,n$

(2) 第 i 類的有根樹又可能有 T_i 種各不相同的有根樹, 把這 T_i 種有根樹編號爲 $1,2,3,\ldots,T_i$, 則第 i 類的樹必取自這 T_i 種樹的“倉庫”中。設所取的各種樹的個數依次爲 $t_i^{(1)},t_i^{(2)},\ldots,t_i^{(T_i)}$, 則第 i 類有根樹共有點 $i(t_i^{(1)}+t_i^{(2)}+\cdots+t_i^{(T_i)})$ 個。於是

$$\sum_{i=1}^{n}i(t_i^{(1)}+t_i^{(2)}+\cdots+t_i^{(T_i)})=n。$$

按上述去掉根點的辦法, 每一個 $(n+1)$ 階有根樹對應於一組有根樹, 其個數分別爲

$$t_1^{(1)},t_1^{(2)},\ldots,$$

$$t_1^{(T_1)}, t_2^{(1)}, t_2^{(2)}, \ldots,$$
$$t_2^{(T_2)}, \ldots, t_n^{(1)}, t_n^{(2)}, \ldots, t_n^{(T_n)} \quad (24)$$

其中 $t_i^{(j)}$ 是 n 個點構成的有根樹中, 第 j 種 i 階有根樹的個數。注意到這些有根樹與次序無關, 故上述的對應是唯一的。

反之, 給出一組 (24), 我們添加一個新點 O 作爲根點, 把數組 (24) 所對應的有根樹的根點與 O 連結起來 (連結後, 只有 O 是根點)。由於與次序無關, 而僅與這些有根樹的種類多少有關, 故又唯一地對應一個 $n+1$ 階有根樹。

$$\text{令 } S = \{(t_1^{(1)}, t_1^{(2)}, \ldots, t_1^{(T_1)}, t_2^{(1)}, t_2^{(2)}, \ldots, t_2^{(T_2)}, \ldots, t_n^{(1)}, t_n^{(2)}, \ldots, t_n^{(T_n)}) \mid \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{T_i} i t_i^{(j)} = n\}$$

於是 S 就與所有 $(n+1)$ 階有根樹所成的集一一對應。即

$$|S| = T_{n+1}。$$

顯見, $|S|$ 就是方程 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{T_i} i t_i^{(j)} = n$ 的所有解 $((t_1^{(1)}, t_1^{(2)}, \ldots, t_1^{(T_1)}, t_2^{(1)}, t_2^{(2)}, \ldots, t_2^{(T_2)}, \ldots, t_n^{(1)}, t_n^{(2)}, \ldots, t_n^{(T_n)})$ 的個數。即

$$(1+x+x^2+\cdots)^{T_1} \cdot (1+x^2+x^4+\cdots)^{T_2} \cdots \cdot (1+x^n+x^{2n}+\cdots)^{T_n}$$

展開式中 x^n 項的係數, 也即 (由 $(*)$ 式)

$$(1-x)^{-T_1}(1-x^2)^{-T_2}\cdots(1-x^n)^{-T_n}$$

展式中 x^n 項的係數。由於把上式伸延成無窮乘積不影響展式中 x^n 項係數的值。於是,

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{-T_n} = \sum_{n=1}^{\infty}|S|x^n = \sum_{n=1}^{\infty}T_{n+1}x^n,$$

故

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty}T_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}T_{n+1}x^{n+1} = x\sum_{n=0}^{\infty}T_{n+1}x^n = x\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{-T_n}。$$

這便是有根樹計數的 Cayley 公式 (23)。

上述證明並且無複雜的推導, 僅靠 $(*)$ 式和生成函數的思路。大數學家做出的結果, 我們也能行。

別瞧不起它, 那個中學教材中的公式。

—本文作者任教於中國華南師範大學數學系—